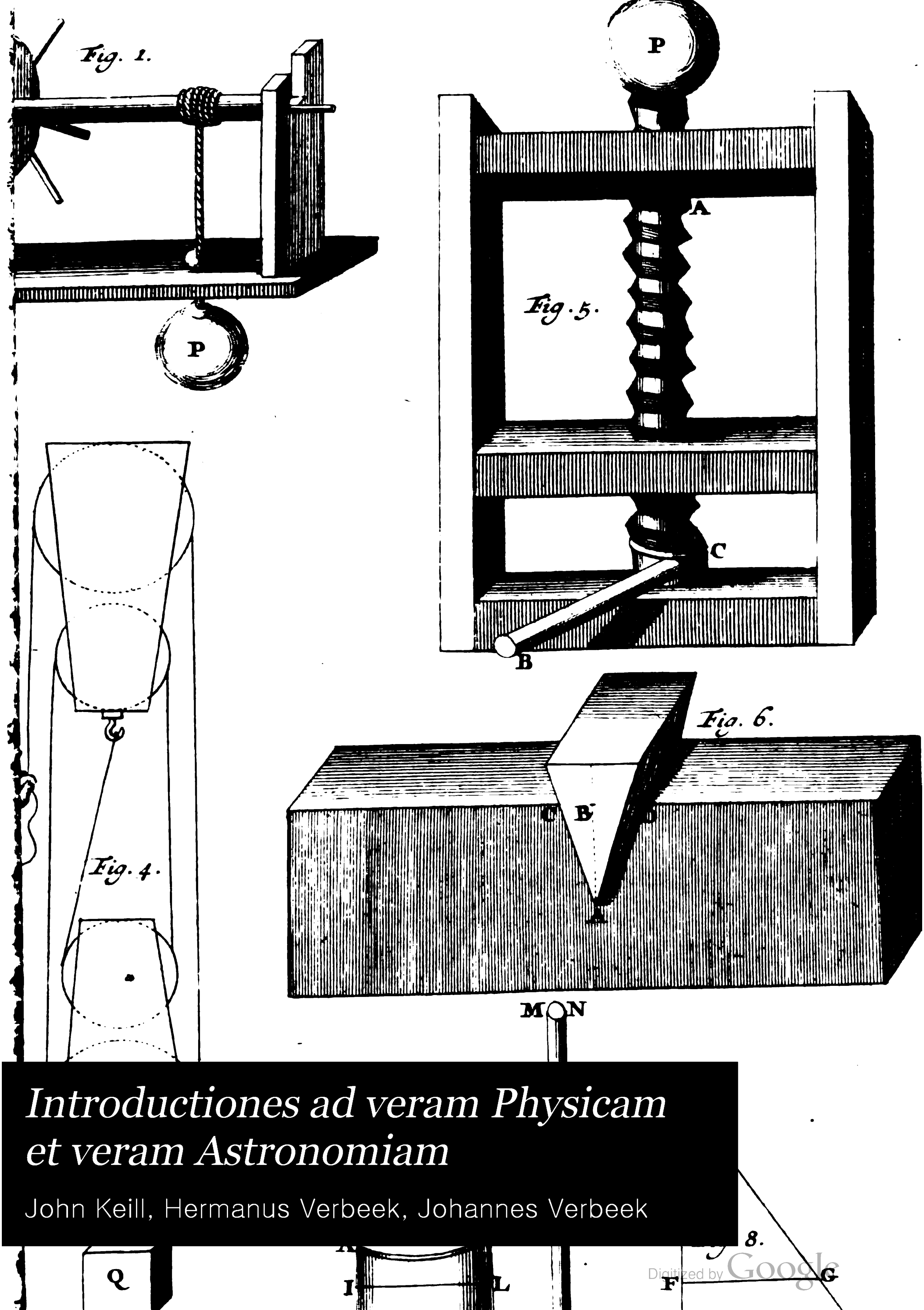


Introductiones ad veram Physicam et veram Astronomiam

John Keill, Hermanus Verbeek, Johannes Verbeek

JOANNIS KEILL, M. D.

Regiæ Soc. Lond. Socii, In Acad. Oxon. Astronomiæ Professoris Saviliani

INTRODUCTIONES

AD VERAM

PHYSICAM

ET VERAM

ASTRONOMIAM.

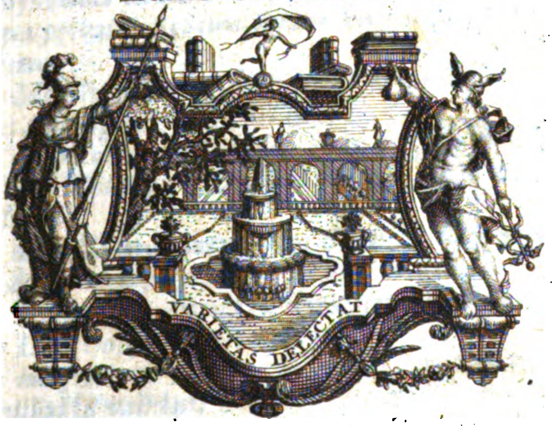
Quibus accedunt

TRIGONOMETRIA.

DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

DE LEGIBUS ATTRACTIONIS.

Editio Novissima.



LUGDUNI BATAVORUM,

Apud **JOH. ET HERM. VERBEEK.** Bibliop.

MDCCXXXIX.

JOANNIS KEILL, M. D.

Regiæ Soc. Lond. Socii, In Acad. Oxon. Astronomiæ Professoris Saviliani

INTRODUCTIONES

AD VERAM

PHYSICAM

ET VERAM

ASTRONOMIAM.

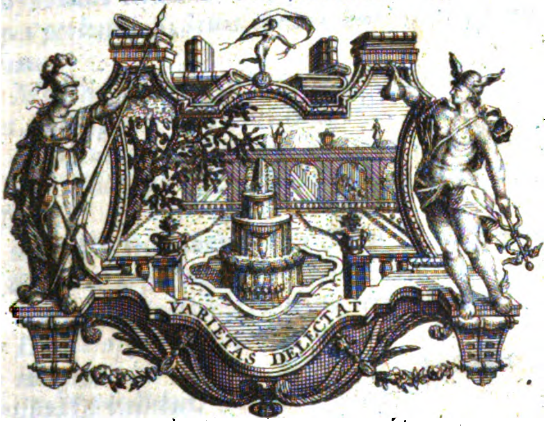
Quibus accedunt

TRIGONOMETRIA.

DE VIRIBUS CENTRALIBUS.

DE LEGIBUS ATTRACTIONIS.

Editio Novissima.



LUGDUNI BATAVORUM,

Apud **JOH. ET HERM. VERBEEK.** Bibliop.

MDCCXXXIX.

INDEX
IN
INTRODUCTIONEM
AD VERAM
PHYSICAM.

13. *De*

INTRODUCTIO
AD
VERAM PHYSICAM:
SEU
LECTIONES PHYSICÆ

Habitæ in Schola Naturalis Philosophiæ Academiæ OXONIENSIS An. Dom. 1700.

Quibus accedunt Theorematum Hugenianorum de Vi Centrifuga & Motu Circulari demonstrationes.

Authore

JOANNE KEILL, M. D.

Astronomiæ Professore Saviliano. R. S. S.

NOBILISSIMO ET HONORATISSIMO

D^NO^. D^NO^. THOMÆ

COMITI

PENBROCHIÆ,

ET

MONTGOMERIÆ, &c.

Nobilissimi Ordinis Periscelidis Equiti,

SUMMO

CLASSIUM BRITANNICARUM

PRÆFECTO.

TIBI, Vir Honoratissime, Exercitationes hasce destinantem, merito me deterreret Dignitatis Tuæ splendor & amplitudo, nisi illis aditum aperire præ se ferret ea, quam Tu foves & ornas, Philosophia. Cum enim gravissimis Reipublicæ negotiis ingenua literarum studia admiscere soleas, eum ad Te haud ægre sines accedere, qui tantas quidem curas Tuas interpellare minime audet, otio tamen aliquid liberalis oblectamenti offerre magnopere cupit. Hoc enim cum paucis commune habes, ut idem & in literis optime versatus sis, & in Republica; idem tam philosophorum scholis, quam Regum conciliis præesse merearis.

Dum itaque in idoneis consiliis adhibendis quam sapiens sis, Regum sapientissimus; in fœderibus sanciendis quam prudens sis, universa loquitur *Europa*; quam interim de literis meritus es laudem, ab Academico ne recuses.

Liceat etiam & nobis, Tibi de novissimis Tuis honoribus gratulari, liceat nobis cum patria una gaudere; id Tibi deferri munus, quod non modo virum in rebus gerendis fidum fortemque, sed reconditiore matheseos scientia optime instructum desiderat. Hisce studiis ita animum imbuisti Tuum, ut in Tuis manibus Præfectura Classium & Oceani Imperium, hoc est, populi *Anglicani* salus & tutela tuto possit deponi. Dum itaque eo in munere versaris, ut ejusmodi literaturæ sepositam olim apud Te supellectilem revisere denuo & in lucem proferre liceat; sinas Vir Nobilissime, ut hosce in re physica conatus mathematicis argumentis potissimum innixos, ad Te haud importunus deducam, qui quidem quocunque rationis pondere fulciri videantur, ad judicium Tuum non appellant, sed implorant Patrocinium.

Illustrissimæ Meritissimæque Dignitatis,

Nobilitatis, & Magnitudinis Tuæ

Oxoniæ,
Feb. 14. 170$\frac{2}{3}$.

Observantissimus Cultor

JO. KEILL.

PRÆFATIO.

QUAMVIS nunc dierum celebretur Philosophia Mechanica, & insignes in hoc ævo obtineat sui cultores; in plerisque tamen physicorum scriptis, vix quicquam mechanicæ præter ipsius nomen inveniri potest. In cujus locum substituunt philosophi corpusculorum quæ nunquam viderunt, figuras, vias, poros & interstitia, partium intestinum motum, pugnas & conflictus Alkali & Acidi, & quid boni malive exinde oritur ita ad amussim narrant, ut nihil in historia naturali præter fidem desideretur, quoties materiæ subtilis miracula prædicant; miracula dico, nam illud proculdubio miraculi instar est, quod contra passim notas naturæ leges, & stabilita mechanicæ principia evenit; qualia futura essent omnia naturæ phænomena, si à materia subtili & methodo operandi à Physicis tradita producerentur.

Ad ipsam naturam explicandam postulata adhibent quæ nec concedi possunt, nec intelligi; & quæ magis implicata sunt, quam illa ipsa phænomena quorum causas investigant. Quod si ipsis sua concedantur postulata, non tamen exinde orientur effectus isti, quorum rationes & origines se enucleasse gloriantur.

Ne vero quisquam hoc gratis & malevole à nobis dictum suspicetur,

cetur, Theoriam illam, quam ad explicandam affectionem corporum terrestrium omnium maxime universalem condiderunt, examini subjiciamus; Gravitatem intelligo, quam ex legibus mechanicis per materiæ subtilis actionem se deduxisse maxime jactitant.

Cartesiani gravitatem ab actione materiæ cœlestis oriri volunt, quæ in vortice agitata circa terram defertur, & proinde quantum possit à terra recedit, & corpora terrestria minus agitata versus terram propellit. Vel, ut clarius recentiores mentem suam explicant, cum materia ætherea continuos circa terram gyros perficiat, corporum in circulo moventium ritu, conatum à centro motûs recedendi habebit, adeoque corpora terrestria minorem vim habentia versus centrum protrudet; ut aqua versus terram gravitans corpora minoris pro mole ponderis demersa sursum seu ad circumferentiam pellit.

Hæc utcunque speciosa prima facie videantur, si ad examen revoces, omnibus fere naturæ legibus adversari invenies. Nam primo Cartesiani postulant materiam æthereum circa terram in circulis deferri; at qua ratione motus iste oriatur, aut quo pacto conservetur, æque arduum esset exponere, ac ipsius gravitatis rationem reddere: Qui igitur gravitatem exinde ortum suum ducere contendunt, ignotum per ignotius explicare suscipiunt; præsertim cum non pauca adduci possunt argumenta quibus istiusmodi rotatio penitus evertitur. Verum Cartesianis concedamus illud postulatum, & videamus utrum exinde sequetur quod volunt Phænomenon. Cum necesse sit ut vorticis terram circumrotantis velocitas ad terræ superficiem, sit æqualis ipsius terrenæ rotationis velocitati (nam si major esset, aliqua motus pars in terram impenderetur, quo fieret ut ipsius velocitas semper minueretur & terræ augeretur donec ad æqualitatem pervenirent,) unde ex notis Terræ magnitudine & tempore rotationis, dabitur spatium, quod corpus, urgente vi centrifuga materiæ cœlestis, percurrere potest, in dato tempore, æquale scil. arcus interea descripti quadrato ad circuli diametrum applicato. Per Lem. 2. ad demonstrationes Theorematum Hugenii *de Vi Centrifuga & Motu Circulari. Ex quo principio si calculus ineatur, inveniretur spatium, tempore unius scrupuli secundi*

cundi

endi à corpore vi centrifugâ ætheris agitato percurrendum, non excedere pedem dimidium: Si igitur mechanicè produceretur effectus gravitatis, tempore unius scrupuli secundi gravia non ultra dimidium pedem descenderent: At gravia in motu suo deorsum pedes 15 in eo tempore percurrunt; adeoque si hoc modo æther gravitatis causa esset, contra mechanicæ leges ageret, efficiendo ut corpus per pedes 15 in scrupulo secundo descendat.

Ut hujus objectionis vim effugiant, supponunt materiæ æthereæ vertiginem vertigine terræ multo celeriorem. Quod licet fieri non possit, illud tamen si denuo iis concedamus, nec inde sequetur mechanica gravitatis actio. Nam cum materia verticis semper defertur in circulis æquatori parallelis, & virium centrifugarum directiones secundum lineas in planis horum circulorum jacentes semper fiant, oportet ut corpora omnia in hisce planis descendant, & perpendiculariter ad axem, non ad ipsam terram tendant. Si igitur materia subtilis mechanice ageret, corpora ad axem rectà pelleret; unde cum secundum hos Theoristas ad centrum terræ tendere cogit, effectum à veris mechanicæ legibus abhorrentem producit.

Ut hanc difficultatem tollant, ulterius supponunt materiam æthereum non in circulis æquatori parallelis, sed in magnis sphæræ circulis deferri: At quo pacto hoc concipi possit, plane nescio; cum enim quivis circulus maximus alios omnes infinitos bis secet, oportet ut motus particulæ cujusvis ab aliis infinitis secundum diversas vias pergentibus impediatur, atque tandem motus ejus sistatur, si primò in omnes partes æqualis impressa fuerit motus quantitas; vel ut ultima in circulis parallelis omnis deferatur, si major fuit ab initio motus versus unam partem quam aliam. Quin & illud etiam quæri potest, unde fit ut materia ætherea in superficie sphæræ extimæ moveatur; cum vim centrifugam habeat, videtur ipsam debere inde recedere; quid igitur est quod ipsam inhibeat? Dicunt alia corpora ambientia materiam in extima superficie coarctare & ejus recessum impedire. Cum autem oporteat ut materia hæc alia corpora ipsam ambientia premat, necesse est ut motum ipsis communicet; & hæc corpora aliis ipsa ambientibus motum pariter imprimant, atque sic in infinitum propagabitur mo-

tus

tus materiæ subtilis, unde necesse est ut celeritas ipsius paulatim languescat.

Aliæ quam plurimæ difficultates, mechanicas hasce gravitatis explicationes urgent, quarum unam ad omnes istiusmodi ipsius Theorias se extendentem libet proponere. Scilicet si corpus deorsum à materia subtili, quovis modo pellatur, vis qua pellitur necessario erit ut numerus particularum, quibus simul agentibus versus terram truditur: Sed numerus particularum est ut corporis superficies; quare erit vis quâ corpus deorsum premitur ut ejusdem superficies, & non ut ipsius quantitas materiæ, quod experientiæ contradicit. Nec minus cæteras plerasque omnes, quas de aliis rebus condunt hypotheses, si ad examen reducantur, naturæ legibus repugnantes inveniemus.

Omnes errores ex hoc fonte promanasse videntur, quod homines ignari Geometriæ philosophari ausi sunt, & rerum naturalium causas reddere. Quid enim aliud præter hallucinationes ab iis exspectandum, qui Geometriam totius physicæ fundamentum neglexerunt; & ignotis naturæ viribus per Geometriam tantum æstimandis, ipsius tamen operationes, methodo regulis mechanicis minime congruâ explicare sunt agressi?

Inter hujusmodi philosophos Cartesius *agmen ducit, qui etiamsi Geometra fuerit insignis, ignavo tamen & desidi ut placeret philosophantium populo, nullum Geometriæ usum in philosophia adhibuit: Et quamvis profiteatur se omnia mechanice per materiam & motum explicaturum, Philosophiam tamen excogitavit, quæ à veris Mechanicæ legibus tantum abhorret quantum quæ longissime. Illius sectæ nomina dant, quicunque recte, hoc est Geometrice, philosophandi laborem refugiunt: Magna equidem turba per orbem terrarum longe lateque diffusa.*

At licet tanta philosophantium pars umbram philosophiæ, non ipsam substantiam amplexa sit; non tamen desunt (nec ut spero unquam deerunt) qui in veris naturæ legibus perscrutandis, & rerum causis per principia mechanica exinde investigandis, haud inanem posuerunt operam.

Inter antiquos physicos præcipue eminuit Divinus Archimedes, *qui præter illa Geometrica sua monumenta, Mechanicæ &*

Staticæ

Staticæ principia duobus libris De Æquiponderantibus & De Humido Insidentibus *nobis demonstrata reliquit. Post hunc per longam annorum seriem delituit mechanica philosophia, nec nisi paucis quibusdam accuratioris ingenii viris exculta est. Inter quos* Rogerus Bacon Oxoniensis & Hieronymus Cardanus *meritò nominandi sunt. Tandem sub initio seculi ultimo elapsi, nobilis ille Lynceus philosophus* Galileus, *clave Geometrica rursus reseratis naturæ claustris, novam condidit de Motu scientiam, & methodum monstravit, qua rerum causæ mechanicæ sint indagandæ. Ejus vestigiis insistentes, insignes viri* Torricellius & Paschalius *philosophiam novis speculationibus adauxerunt. Postquam vero à duobus potentissimis Regibus, societates* Londinensis & Parisiensis *ad philosophiam excolendam institutæ fuerint, miris inventis ampliata est rerum naturalium scientia, non iis solum quæ in nuda speculatione versantur, sed aliis quamplurimis quæ hominum utilitatibus inserviunt. Arduum esset negotium innumera illa recensere beneficia, quæ ex utriusque societatis laboribus humano generi provenerunt: Nec facile est ostendere, quantum debebit omnis posteritas illustris* Hugenii *Geometricis de motu Pendulorum demonstrationibus, aut egregiis nobilis* Boylei *experimentis, quibus ille admiranda plurima retegit naturæ arcana.* Wallisii *Geometriam de Motu, Opus in suo genere perfectissimum, grato animo revolvent seri nepotes. Non ulterius torquebunt philosophos fluviorum & ventorum causæ ab acutissimo Geometra* Halleio *in Actis Philosoph. traditæ, ante ipsum frustra tentatæ.*

Ad aliorum erga rempublicam philosophicam merita commemoranda pergerem, nisi circa Newtoni *præclara inventa non subsistere nefas ducerem, cujus sagacissimum ingenium plura & abstrusiora patefecit naturæ mysteria quam sperare mortalibus fas erat; cumque illius inventa intra angustos hujus præfatiunculæ limites non sunt coarctanda, sufficiat hoc solum indicasse; quod quæcunque Patres nostri ab omni temporum memoria de philosophia mechanica nobis tradiderunt, ea ne ad decimam eorum assurgunt partem, quæ proprio Marte, per summam in Geometria peritiam, adinvenit* Newtonus. *Quam facile autem ad rerum à nobis longe dissitarum affectiones explicandas, Planetarum scil. motus ipsorum-*

que inæqualitates, adhiberi possint principia Mechanica, nuper literato orbi innotuit per Elementa Astronomiæ Physicæ & Geometricæ à D. Gregorio *Astronomiæ Professore Saviliano Edita: Opus cum Sole & Luna duraturum.*

Cum vero talis sit philosophiæ mechanicæ status, ut nulla alia ratione quam per Geometriam aditus ad ipsam pateat; id a me efflagitabant amici mei ut ipsius principia faciliora à primis tantum Geometriæ Elementis pendentia, & quæ exinde fluunt phænomena, Juventuti Academicæ exponenda susciperem; quod etiam à me non iniquo jure postulavit Vir Clarissimus & omni literarum genere ornatus Dominus Thomas Millington *Eques M. D. Philosophiæ Naturalis in hac Academia Professor* Sidleianus, *& Collegii Medicorum apud* Londinenses *Præses, cum me ad munus hoc obeundum in scholis publicis suffecit. Illius consilio sequentes in Academia lectiones habui: In quibus id præcipue mihi curæ fuit, ut discentium conceptus de generalibus corporum affectionibus rite & distincte formarentur; ab obscuris enim & falsis de rebus ideis, omnes in re physica errores originem ducunt; ideoque corporis extensionem, soliditatem, & divisibilitatem à plerisque satis obscure traditas, quantum potui, dilucide exposui: Deinde motus naturam & proprietates, ab omnibus præterquam quibusdam philosophis satis clare concipiendas, explicui, & leges naturæ exinde deduxi; vim gravitatis seu pondera corporum quantitatibus materiæ in iisdem proportionalia esse, & principium quo per machinas magna pondera elevantur ostendi. Motus deinde leges, & causam accelerationis gravium ab iisdem pendentem, & qua proportione crescunt vel decrescunt spatia à gravibus pro variis temporum intervallis percursa monstravi. Hisce succedunt regulæ congressuum tam in corporibus duris quam elasticis, & modus quo ictus magnitudo æstimanda est: Quibus adjunxi motuum compositiones & resolutiones, & alia quædam Theoremata, quorum haud exiguus est in philosophia usus: Et ut ulterius videant philosophi, quousque se extendat in scientia rerum naturalium Geometriæ etiam elementaris usus, pulcherrima illa* Hugenii *Theoremata de Vi Centrifuga & Motu Circulari ex Elementis demonstravi.*

INTRO-

INTRODUCTIO AD VERAM PHYSICAM.

LECTIO I.

De Methodo Philosophandi.

QUandoquidem Muneris Nostri institutum postulat, ut coram vobis, Academici, corporum naturas & affectiones explicandas suscipiamus, necessarium duximus, priusquam rem ipsam aggrediamur, quædam, de Physicorum sectis, principiis, & methodis præfari; eamque rationi exponere, quam amplexuri sumus in scientia corporum naturalium investiganda.

Philosophorum, qui de rebus physicis scripserunt, quatuor præ cæteris genera inclaruerunt. Primum est eorum, qui rerum naturas per numerorum & figurarum Geometricarum proprietates illustrarunt, dicam? An occulerunt? Quales scil. fuere Pythagorici & Platonici, quippe qui dogmata sua temere in profanum vulgus effundere non sustinuerunt, ideoque larvis & Hieroglyphicis ex Geometria & Arithmetica petitis Physicam suam velarunt, nec quisquam eorum discipulus, nisi post plures exactos probationis annos, ad veram Physicam atque arcanam illorum Philosophiam perdiscendam admissus fuit. Quamvis hoc modo sua Philosophiæ dignitas conservata fuerit; pessime tamen nobis horum Philosophorum posteris consultum est; exinde enim adeo larvata atque tenebris involuta ad nostras pervenere manus eorum dogmata, ut, quales fuerint veræ de rebus atque rerum naturis sententiæ, parum constet: quantumvis autem obscuram accepimus hujus sectæ Philosophiam, certius tamen ex ea liquet Philosophos illos Geometriam & Arithmeticam ad solvenda naturæ phænomena necessarias duxisse, atque in hunc finem eas adhibuisse.

Secunda Physicorum gens à Schola Peripatetica originem duxit; hæc secta per materiam & formas, privationes, virtutes elementares, qualitates occultas, Sympathias & Antipathias, facultates, attractiones & id genus alia, Physicam suam explicavit. Verum, ut opinor, hujus nominis philosophi non tam rerum causas indagasse visi sunt, quam idonea rebus ipsis imposuisse nomina, atque terminos adinvenisse, quibus Actiones naturales rite designare possumus.

Tertium Philosophantium genus per experimenta procedit, atque in id solum incumbit, ut corporis cujusque proprietates, & actiones omnes, per sensuum repræsentamina nobis innotescant. Hujus sectæ laboribus haud exigua debet philosophia incrementa; plura fortasse exinde receptura, si methodi experimentalis sectatores nullas sibi ipsis finxissent Theorias, ad quas confirmandas experimenta sua pessime detorserunt.

Quarta denique Physicorum classis Mechanica dici solet, & qui huic sectæ nomina dant, omnia naturæ phænomena, per materiam & motum, partium figuram atque texturam, particulas subtiles, atque effluviorum actiones, se posse enodare putant, atque horum operationes secundum notas atque stabilitas mechanicæ leges fieri contendunt.

Ex variis hisce philosophandi methodis, uti nulla est in qua omnia placent, ita in omnibus quædam probare possumus; quocirca ut delectus habeatur oportet, ea eligendo quæ usui maxime futura sunt, & rationem ex hisce omnibus compositam sequendo.

Et primo, cum antiquis Pythagoricis & Platonicis, Geometriam & Arithmeticam, tanquam artes ad rite philosophandum necessarias, in auxilium accersemus, sine quibus parum admodum certi de causis naturalibus constabit. Cum enim omnis actio physica à motu dependeat, aut saltem non fiat absque motu, motûs quântitas & proportio, corporum motorum magnitudines, figuræ, numerus, collisiones, & vires ad alia corpora movenda, investiganda erunt. Verum hæc

hæc omnia, nisi ex notâ quantitatis & proportionis natura, determinari non possunt: adeoque opus erit iis artibus, quæ harum proprietates demonstrant: & proinde Geometria & Arithmetica necessariæ ad rite philosophandum censendæ sunt.

Secundo cum Peripateticis non verebimur usurpare terminos Qualitatis, Facultatis, Attractionis, & similium; non quod his vocibus veram causam seu rationem physicam, & modum actionis definimus, sed quia actiones hæ possunt intendi & remitti; adeoque cum illâ qualitatum proprietate gaudeant, jure possunt earum titulo insigniri, & sub hoc nomine, virium seu intensionis & remissionis rationes expendi possunt. *v. g.* possumus gravitatem qualitatem dicere, qua corpora omnia deorsum feruntur, sive ejus causa à virtute corporis centralis oriatur, sive sit corporibus innata, seu ab actione ætheris vi centrifuga agitati & altiora petentis procedat; sive demum alio quocunque producatur modo. Sic etiam corporum conatus ad se mutuo accedendi Attractionis vocabimus, qua voce non determinamus actiones istius causam, sive fiat ab actione corporum vel se mutuo petentium, vel per effluvia emissa se invicem agitantium, seu ab actione ætheris, aut aëris, aut medii cujuscunque corpora innatantia ad se invicem utcunque impellentis, possumus, inquam, has actiones illis vocibus denotare. Et si veræ illarum causæ nos lateant, quidni etiam qualitates occultæ dici mereantur? Eodem sane jure, quo in æquatione Algebraica incognitas quantitates literis x vel y designamus, & methodo haud multum absimili, harum qualitatum intensiones & remissiones, quæ ex positis quibuscunque conditionibus sequuntur, investigari possunt. Libet hanc rem exemplo illustrare.

Utcunque ignota sit qualitatum natura, utcunque nos lateat operandi modus, possumus tamen de earum intensione & remissione sequens demonstrare Theorema; scil. quod Qualitas seu virtus omnis, quæ undique à centro per rectas lineas propagatur, remittitur in ratione distantiæ duplicata.

TAB. I. fig. I. Sit A punctum, à quo undique diffunditur qualitas quæcunque, secundum rectas AB, AC, AD, & cæteras innumeras per totum spatium indefinite protensas. Dico intensionem istius qualitatis decrescere in ratione ejus, qua crescunt distantiæ, duplicatâ; seu quod idem est, intensionem ejus in distantia æquali ipsi AB esse ad illius intensionem in distantia æquali rectæ AE, reciproce in duplicata ratione distantiæ AE ad distantiam AB, hoc est, ut quadratum ipsius AE ad quadratum ipsius AB. Cum ex hypothesi qualitas per rectas lineas undique in orbem propagatur, erit ejus intensio, in quavis à centro distantia, spissitudini radiorum in ea distantiâ proportionalis; per radios hîc intelligimus vias rectilineas per quas diffunditur qualitas; at radii, qui ad distantiam AB diffunduntur per superficiem sphæricam BCDH, ad distantiam AE per totam superficiem sphæricam EFGK sese dispergunt; sed datorum radiorum spissitudines sunt reciproce ut spatia quæ ab iis occupantur; nempe si superficies EFGK sit dupla BCDH, erunt radii ad superficiem BCDH duplo confertiores, quàm iidem radii sunt ad superficiem EFGK, & si superficies EFGK sit tripla superficiei BCDH, erunt quoque radii ad superficiem BCDH triplo densiores quàm iidem radii sunt ad superficiem EFGK: & universaliter quamcunque proportionem habet superficies EFGK ad superficiem BCDH, eandem habebit reciproce densitas radiorum ad superficiem BCDH, ad densitatem eorundem ad superficiem EFGK. Sed ut constat ex *Archimedis libris de sphæra & cylindro*, superficies sphæricæ sunt in duplicata ratione diametrorum vel semidiametrorum; est igitur spissitudo seu densitas radiorum per quos propagatur qualitas ad distantiam æqualem distantiæ AB, ad eorundem densitatem in distantia æquali AE, reciproce in duplicata ratione semidiametri seu distantiæ AE ad semidiametrum seu distantiam AB. Sed ut hactenus dictum est, intensio qualitatis in quavis data distantia est semper ut spissitudo radiorum per quos propagatur in ea distantia; quare erit etiam intensio qualitatis ad distantiam æqualem ipsi AB ad ejusdem intensionem ad distantiam æqualem ipsi AE, reciproce

ce

œ in duplicata ratione distantiæ AE ad distantiam AB.

Theorema hoc universaliter demonstravimus, quæcunque sit Qualitatis natura, modo secundum rectas lineas agat; atque hinc sequitur luminis, caloris, frigoris, odorum, & istiusmodi qualitatum intensiones esse reciproce ut quadrata distantiarum à puncto unde procedant. Hinc etiam comparari inter se possunt actiones Solis in diversos Planetas, sed hæc non sunt præsentis instituti.

Post notas virium rationes in datis conditionibus seu suppositionibus, conferendæ sunt rationes illæ cum naturæ phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum generibus competant. Verum ut hoc fiat, plurima in subsidium advocanda sunt experimenta, qualia scilicet tertiæ sectæ Philosophi nobis tradiderunt: haud sine cautela tamen illa adhibenda sunt, quæ non nisi à *Theorista* aliquo ad suam probandam hypothesin adducuntur; novimus enim hoc hominum genus, quam impense suis faveant Theoriis, quam vellent esse veras, quam facile vel alios decipiant, vel seipsos in experimentis perficiendis decipi patiantur; quæ autem ab omnibus afferuntur, quæ quotiescunque tentata succedunt, ea tanquam indubitata principiorum seu axiomatum loco habebimus, simplicissimis tamen & monstratu facillimis plus est fidendum, quam magis compositis & exploratu difficilioribus.

Denique, Academici, cum antiquis Atomistis, & novæ philosophiæ sectatoribus, experiemur, quæ & qualia phænomena per materiam & motum, & notas atque stabilitas Mechanicæ leges explicari possunt.

Ut vero tutius in hoc negotio progrediamur, & quantum possumus erroris periculum evitemus, sequentes regulas nobismet observandas proponimus. Primo, secundum Geometrarum methodum Definitiones ad rerum notitiam necessariæ ponendæ sunt: Nolim tamen ut à me exspectetis definitiones Logicas ex genere & differentia constantes, vel eas quæ intimam rei definitæ essentiam & ultimam causam prodant: Has aliis disputandas relinquo. Ut ingenue fatear

tear, ignorantiam, me latent intimæ rerum naturæ & causæ; quicquid mihi de corporibus eorumque actionibus compertum est, illud vel à sensibus hausi, vel ex aliqua eorum proprietate mihi per sensus notâ, deduxi. Sufficiat ergo, si loco istiusmodi definitionis (quam afferunt Logici) descriptionem adhibeamus; qua scilicet res descripta clare & distincte concipiatur, & ab omni alia discernatur. Res igitur per proprietates definiemus, unam aliquam simplicem assumendo, vel etiam plures, quas experientiâ rebus ipsis competere certissime novimus, atque ex illis, alias earundem proprietates methodo geometrica deducemus. Contra hanc regulam peccant plerique Philosophiæ novæ magistri, qui res definiunt non quidem per proprietates rebus ipsis certò competentes, sed per essentias & naturas quas inesse rebus supponunt. Supponunt quidem, at minime interim constat an quales illi definiunt naturas rebus ipsis revera insint; *e.g.* Cartesiani dicunt fluidum esse, cujus partes in continuo motu versantur; verum nec sensu, nec experientiâ, nec ratione proditum est, talem esse fluidi naturam: imo, quod illi afferunt argumentum ad hypothesin suam stabiliendam, hoc ipsum demonstratione Geometrica evertemus. Volunt enim corporis in fluido moventis minorem esse resistentiam, si partes fluidi motu intestino cieantur, quam si nullus talis adesset fluidi motus; cujus contrarium, cum de fluidorum resistentia agetur, demonstrabimus.

Quanto rectius philosophiæ Mathematicæ scriptores, qui ex notissima fluidi proprietate illius desumunt definitionem: fluidum dicunt esse corpus cujus partes vi cuicunque illatæ cedunt, & cedendo facile moventur inter se: ex qua definitione pulcherrima condunt Theoremata ad usus humanos maxime accommoda, cum interea philosophi Cartesiani nihil certum aut solidum, nedum utile, ex sua protulerunt.

2*do* In veritate physica investiganda, utile erit conditiones solum primo positas considerare, & ab omnibus aliis interea temporis abstrahere. Mens enim humana, finita cum sit, si nimia rerum multitudine implicita distrahatur, parum habilis ad Theoremata detegenda reddetur. Hanc regulam

gulam observant scriptores Mechanici in spatiis comparandis à duobus mobilibus percursis: corpora enim mota in illo casu tanquam puncta considerant, ab illorum magnitudine, figura, & colore abstrahentes, quæ longitudinem percursam nullo modo variant.

3tio. Necesse erit à simplicissimis casibus ordiri, atque illis semel stabilitis, exinde ad magis compositos progredi licebit; sic iidem Mechanici corporum motus in vacuo seu medio non resistente fieri supponunt, atque motus legibus in illo casu indagatis, exinde ad medii resistentiæ leges investigandas procedunt, & quales mutationes ex eâ corporibus motis oriri debeant, deinde contemplantur. Quo vero minus corporum motibus resistit medium, eo minus recedunt corporum in eo medio motorum leges à legibus prius inventis. Sic etiam in Hydrostatica, supponitur nullam esse fluidi tenacitatem, seu partium cohærentiam, sed eas posse minima qualibet vi à se invicem divelli; ex qua suppositione corporum demersorum pressiones & positiones determinantur. Verum fortasse nullum est in natura fluidum, cujus partes omni cohæsione destituuntur, adeoque variatio, seu à legibus prius inventis discrepantia investiganda erit; & si parva admodum sit partium cohærentia, parva erit etiam & vix sensibilis à prædictis legibus discrepantia.

Contra hanc methodi legem peccant plerique *Theoristæ*, qui, primis & simplicioribus Mechanicæ philosophiæ neglectis vel non satis intellectis principiis, ardua & difficillima problemata statim aggrediuntur, & quo pacto mundus aut planeta aut animal fabricari possint, temerario ausu ostendere conantur; quibusdam in Geometria sciolis haud absimiles, qui cum elementa Geometriæ vix primis labiis tetigerunt, Quadraturam circuli, anguli Trisectionem per rectas lineas & circulares, Cubi Duplicationem & id genus alia statim adoriuntur. Ita nostri Theoristæ, haud bene jactis fundamentis, insanum exstruunt ædificium; unde nil mirum erit, si tantæ molis opus statim collabatur, haud sine ingenti fabricantium dedecore. At rite philosophantibus alia tentanda est via, alia progrediendum est methodo, &

quamvis nec Mundum, nec Terram, nec alium quemvis Planetam condituri sunt, efficere tamen possunt, ut Philosophiae Mechanicæ principia & fundamenta firmiter stabiliantur, &, quæ exinde consequi possint phænomena, explicentur.

Lectio II.

De Corporis Soliditate & Extensione.

Corporis definitionem non hic afferemus ex ejus intima natura seu essentia desumptam, qualem non satis perspectam habemus; nec fortasse ad ejus cognitionem unquam sumus perventuri: verum secundum regulam in priore lectione nobis propositam, per notas quasdam illius proprietates, illud ab omni alio entis genere distinguendo, definiemus: idque *Corpus* dicimus *quod extensum est, solidum & mobile*.

Nemo, ut opinor, adeo hebeti est ingenio, quin facile percipiat omnis corporis finiti aliquos esse terminos, quos superficies vocamus, harumque unam aliquam ab opposita distare: quin & hujus rursus superficiei, (cum infinita non sit) dantur extrema, quæ lineas dicimus, quarum necesse est aliquam esse à se invicem distantiam. Etiam & harum linearum erunt aliqui termini, quos puncta nominamus, inter quæ denique aliquod intervallum poni oportet: Ex hisce omnibus distantiis simul junctis, claram extensionis in trinam dimensionem ideam percipimus. Etenim distantia inter duas oppositas ejusdem corporis superficies, illius crassities seu profunditas dicitur; distantia inter binas oppositas ejusdem superficiei lineas, latitudo vocatur; & distantia inter utramque lineæ extremitatem, corporis longitudo nominari potest. Nullum est corpus cui trina hæc dimensio non congruit, & quantulumcunque corpus esse supponamus, necesse tamen erit ut crassitiem, latitudinem & longitudinem habeat: quod autem in corpore est, hisce omnibus destitutum, illud non corpus, sed punctum est, nec ipsa magnitudo sed magnitudinis initium aut finis.

Soli-

Soliditas est ea corporis proprietas, per quam omnibus aliis corporibus undequaque prementibus resistit, & quamdiu aliquem occupat locum, alia corpora omnia, quantacunque cum vi illud urgeant, in eundem intrare prohibet. Sic *v. g.* si corpus aliquod intra manus teneatur, quantumvis magna vi prematur, manus tamen ad mutuos contactus pervenire non patietur.

Hæc est illa proprietas, quam plerique Peripatetici Impenetrabilitatem vocant, qua scil. duo corpora non possunt esse simul in eodem loco, vel se mutuo penetrare; ego tamen cum illustri hujus ætatis Philosopho, soliditatem malui appellare. Hæc etiam proprietas ita omnibus corporibus essentialis videtur, ut nihil aliud in rerum natura sit, cui ea competere possit: Etsi enim dantur aliæ magnitudinis species, sola tamen magnitudo corporea soliditatem admittit; reliqua quanta, vel etiam non quanta seu puncta, possunt sese mutuo penetrare, uniri, & in eodem esse loco; quippe si duo globi sibi mutuo occurrant, in concursu punctum unius unietur cum puncto alterius, seu congruent vel in eodem erunt spatii puncto. Similiter si sint duo cubi æquales, potest eorum unus super alterum imponi, ita ut duæ eorum superficies quadratæ congruant, latera nempe unius quadrati cum alterius quadrati lateribus coincident; & anguli unius cum alterius angulis unientur, quæ proinde quantitates sese penetrabunt & in eodem erunt loco, quod ut ipsis contingat corporibus impossibile est.

Hinc facile perspicitis, Academici, quam diverso sensu *Soliditatis* vocem usurpamus, ab eo qui apud Geometras habetur, qui solida sese mutuo penetrare posse, supponunt; *v. g.* cum demonstrat Euclides (Elemento undecimo) duo solida parallelepipeda super eadem basi, inter eadem parallela plana constituta, esse inter se æqualia; cum autem duo diversa parallelepipeda sic constituta sese penetrare necesse est, liquet Geometras sua solida tanquam penetrabilia supponere. Soliditatis igitur vocem, diverso prorsus sensu accipiunt Geometræ, quam Philosophi, nec sua solida magnitudini penetrabili opponunt, sed planæ seu superficiebus, angulis planis, & lineis; omne enim illud apud eos solidum est, quod trina dimensione constat.

At alterius generis est corporum soliditas, quam ut ad corpora solummodo pertinere diximus, ita etiam omnibus corporum generibus inest, sive fluida sint sive dura, sive firma & fixa sint, seu facile mobilia & ictui cedentia, seu gravia admodum sint, sive parum habeant ponderis vel si omnino levia fuerint, si modo talia darentur corpora: non enim minus prohibet duorum quorumvis corporum contactum gutta aquæ, vel aëris particula inter duo illa corpora immota manens, quam durissimum ferrum aut adamas.

Per hanc denique proprietatem, distinguitur corpus ab alio extensionis genere, quod penetrabile concipimus, & *Spatium* vocamus, in quo omnia corpora locari & moveri cernimus, illud ipsum ut immobile spectantes.

Cartesiani, qui corpus per ejus naturam (quam in sola extensione consistere volunt) definiunt, nullum agnoscunt spatium, seu extensum, quod non sit corporeum: verum cum nos spatii ideam, à corporis idea distinctam habemus, vel saltem nos habere imaginamur; peccant contra bonæ methodi leges, qui corporis naturam seu essentiam intimam, in aliquo ejus attributo ponunt, quod an illi soli competat non certe constat.

At dicunt Cartesiani Corporis naturam in alio nullo illius attributo consistere posse, cum nec durities, nec colores, nec pondus, nec figuræ, nec sapores, nec quælibet istiusmodi qualitatum sensum afficientium, illius essentiam constituere possunt. Omnia quippe hæc attributa possunt à corpore tolli, integra tamen manente corporis natura; sublata tamen extensione, statim tolletur Ens corporeum, adeoque in sola extensione corporis naturam sitam esse necesse est.

Hoc est ipsius Cartesii argumentum, philosopho prorsus indignum: nihil enim exinde sequitur, nisi quod sensibiles illæ, quas affert, qualitates non sunt de essentia corporis, extensionem tamen esse attributum corpori necessarium & *essentiale*. At quid inde? potestne unum universale attributum

butum duabus diversis rerum speciebus convenire? An necesse est ut res omnes, quæ idem habent attributum, eandem habeant etiam naturam & essentiam? Si verum hoc sit, nulla erit rerum distinctio, nulla diversitas. Quamvis igitur spatium & corpus, unum & idem habeant essentiale attributum utrique commune, sunt tamen res omnino diversæ; & alia dantur etiam essentialia attributa, singulis propria, per quæ satis distinguuntur.

In primis supra descripta soliditas solis corporibus propria est, & illis omnibus ita essentialis, ut eam ab iis ne vel cogitatione divellere possis, quin simul sustuleris ipsam, quam assumpsisti, corporis ideam; adeoque si in uno aliquo attributo, corporis essentia & intima natura ponenda sit, multo potiore jure hanc sibi vindicabit soliditas quam extensio; præsertim cum aliud videtur esse entis genus à corpore diversum, quod spatium dicimus, cui etiam congruit extensio; saltem contrarium nondum constat.

Præterea, hujus spatii ideam à corporis idea omnino distinctam habemus; utrumque vindicare videtur attributa non diversa solum & sibi propria, sed ita contraria ut impossibile sit, illa tanquam uni & eidem inhærentia subjecto concipere: Corpus nempe, tanquam solidum seu impenetrabile, mobile, & divisibile apprehendimus, cujus partes disjungi, separari, & ad quamlibet à se invicem distantiam poni possunt. Potest unum corpus alteri corpori moventi obstare; potest ipsius motum sistere, vel saltem diminuere; potest etiam corpus alteri quiescenti, vel minori cum vi ad eandem vel contrarias partes moventi, motum suum communicare, atque illud secum abripere.

E contra, Spatium concipimus, tanquam illud in quo corpus omne locatur, seu suum habet *Ubi*; quod omnino penetrabile sit, omnia in se recipiens corpora, nec ullius rei refugiens ingressum; quod immobiliter fixum est, nullius actionis, formæ, seu qualitatis capax; cujus partes à se invicem separari nulla vi possunt, sed spatium ipsum immobile manens, mobilium successiones excipit, motuum velocitatem determinat, & rerum diſtantias metitur: hæc ſpatii & corporis tam diſſona & repugnantia attributa eidem ſubjecto competere impoſſibile eſt.

Reſpondebunt forte Carteſiani, ideam illam, qualem nos dedimus ſpatii à corpore diſtincti, imaginariam prorſus eſſe & chimæricam, cui ſcil. aliquid ſimile, in rerum natura, nullâ potentiâ exiſtere poteſt. Verum contra Carteſianos in promptu eſt demonſtrare, revera dari ſpatium à corpore diſtinctum, vel ſpatium & corpus non eſſe prorſus idem: ſed primo advertendum eſt, nos realem ſpatii corporis vacui exiſtentiam in hoc loco non eſſe evicturos; illud in alia lectione præſtandum erit: ſufficiet in præſentia illius poſſibilitatem adſtruere.

Ponamus ergo vas quodcunque, & aëre primo repleatur, deinde exhauriatur intra vas contentus aër, vel per divinam potentiam annihiletur, & omne aliud corpus in illius locum ingredi prohibeatur; quæro jam an in tali rerum conditione, ſpatium futurum ſit à corporibus vacuum? Corpus omne quod in vaſe continebatur, deſtructum eſt, omnis alterius corporis ingreſſus prohibetur, & vas ſuam figuram conſervare ſupponitur, certe neceſſarium eſſe videtur, ut Vacuum ſeu ſpatium corpore non repletum detur: Reſpondent Carteſiani hiſce ſuppoſitis, vaſis latera corruitura, & ad ſe invicem neceſſario acceſſura. At cum ſecundum ipſos Carteſianos nullum corpus poteſt ſeipſum movere, cumque ex hypotheſi, nullum aliud eſt corpus quod vaſis latera ad ſe invicem pellat, nullus etiam ſequetur eorum ad ſe invicem acceſſus, dicent forſan aërem undequaque diffuſum & vaſis latera circumcirca prementem, iſtius motus cauſam fore. Verum cum preſſio aëris ſit vis finita, talis poteſt eſſe vaſis firmitas, quæ iſti preſſioni æquipollere poſſit, adeoque vas ſuam conſervabit figuram: ſed demus illis vaſis latera corruitura, quæro quodnam corpus in illorum locum ſucceſſurum erit? (reſpondebunt) aër; quodnam corpus locum ab eo aëre derelictum poſſidebit? Alius (fortaſſe dicent) aër ſucceſſurus erit; at tandem ſubſiſtere oportet, & ad corpus aliquod pervenire neceſſe eſt, in cujus locum nullum sum aliud corpus ingreditur; absurdum enim est dari progressum in infinitum: Vacuum igitur in illo casu necessario dabitur.

Sed & alia invicta demonstratione ex Geometria petita, spatii corporis vacui possibilem saltem existentiam ostendemus: ad quod præstandum præmittimus duo sequentia effata tanquam axiomata a nemine philosophorum in dubium vocanda. Primum est, quod corpus nullum, aut nulla materiæ pars, alterius corporis existentiâ indigeat, ad suam existentiam, *v. g.* Potest sphæra existere sive aliud quodcunque corpus existat aut non existat; hoc ex natura substantiæ clare sequitur. *2do.* Potest corpus aliquod, saltem si durum sit, suam conservare figuram, si nulla sint corpora externa, vel nulla agentia quæ ei mutationem inferre conantur. Certe agnoscendum est, Deum posse corpus quodlibet in eodem statu atque situ conservare, & quæcunque extrinsecus accidant, potest nihilominus figura corporis immutata manere.

Cum igitur sphæra una vel etiam plures possunt existere, nullis aliis existentibus corporibus; ponamus omnia alia corpora à Deo annihilari, præter duas sphæras; vel potius fingamus omnem materiam mundanam in duas sphæras coacervari, quæ exponantur per duos circulos, quorum centra sint A & B, cumque supponitur nullum aliud existere corpus, possunt corpora illa sphærica suam conservare figuram, cum nullum ponitur agens externum quod figuram sphæricam destruat vel mutet: duæ igitur illæ sphæræ, vel contiguæ sunt vel disjunctæ: Disjunctæ si sint, erit spatium aliquod intermedium, nullo corpore repletum; adeoque omne spatium non erit corpus. Si vero sphæræ sese mutuo tangant; illas sphæras in unico puncto sese tangere necesse est, per demonstrata in Elementis; inter alia igitur sphærarum puncta est aliqua distantia, hoc est spatium aliquod interjacebit. Sumantur enim duo quæcunque extra contactum puncta puta D & E, si inter illa nullum interveniat spatium, hoc est nulla distantia, sphæræ illæ in eisdem punctis sese contingent, quod est impossibile. TAB. II. fig. 2.

Vel

Vel ulterius sic ostensive demonstrari potest spatium ab omni corpore vacuum. Ponamus duas sphæras, in quibus omnis materia mundana cumulari supponitur, esse æquales; in utraque accommodentur rectæ CD, CE semidiametro utriusvis sphæræ æquales, jungatur DE; erit hæc recta semidiametro sphæræ æqualis, ducantur enim AD, BE, & quia in triangulis æquilateris ACD, BCE anguli ACD, BCE sunt utervis duorum rectorum pars tertia, erit angulus DCE duorum rectorum etiam pars tertia, omnes enim anguli ad punctum C constituunt duos rectos; unde cum DC, CE æquales sunt, erunt anguli CDE & CED etiam æquales, & simul sumpti conficient duorum rectorum duas partes tertias; quare utervis erit duorum rectorum una pars tertia, æquiangulum igitur erit triangulum DCE; adeoque erit DE æqualis semidiametro utriusvis sphæræ, nec in hoc casu major vel minor esse potest. Similiter inter alia quæcunque sphærarum puncta, extra contactum ad C, erit distantia quædam ad sphærarum diametrum determinabilem habens rationem, adeoque erit inter eas sphæras spatium certum & determinatum, nullo corpore repletum; verum in eo spatio potest admitti corpus, cujus dimensiones dictis congruunt distantiis, quod vero majores habet dimensiones, nullâ potentiâ potest in prædicto spatio locari; unde cum proprietates tales prædicto spatio demonstrative congruant, & nemine cogitante potest tale spatium revera existere, clare sequitur contra Cartesianos, ideam quam de spatio habemus non esse Chimæricam aut imaginariam; quod enim Chimæricum est, nullam habere potest extra intellectum existentiam.

Statuendum igitur est revera esse spatium ab omni corpore distinctum; quod sit quasi vas universale intra quod omnia corpora continentur & moventur. At qualis sit hujus spatii natura, num sit quid positivum, actu per se extensum, & reali dimensione præditum; sive ejus extensio oriatur ex relatione corporum in eo existentium, adeo ut sit mera capacitas, *ponibilitas*, seu *interponibilitas*, ut nonnullis loqui placet, & in eadem entium classe ponendum, qua mobili-

tas

tas & contiguitas; Sive ſpatium noſtrum ſit ipſa divina immenſitas, quæ eſt per omnia & in omnibus, ſive ſit creatum aut increatum, finitum vel infinitum, à Deo dependens vel independens, hic non diſquiremus; hæc omnia Metaphyſicis diſputanda relinquimus. Noſtro negotio ſufficiet quaſdam illius proprietates expoſuiſſe, & ejus diſtinctionem ſeu naturam à corporis natura diverſam adſtruxiſſe & demonſtraſſe; qui plura velit, Philoſophos conſulat.

LECTIO III.

De Magnitudinum Diviſibilitate.

QUamvis, Academici, ſpatium à corpore realiter diſtinctum eſſe plurimis demonſtrari poteſt argumentis, & hactenus quædam attulimus quæ inſolubilia eſſe videntur; in eo tamen conveniunt ambo, quod extenſio univerſale *ſit* attributum ad utrumque neceſſario & eſſentialiter pertinens. Priuſquam igitur ulterius progrediamur, non à re alienum erit, generalem quandam extenſionis affectionem, *illius* nempe diviſibilitatem exponere.

Hæc extenſionis proprietas omni magnitudinis ſpeciei, tam lineis quam ſuperficiebus, tam ſpatio quam corpori competit, & neceſſario ineſt. Per diviſibilitatem autem non hic loci intelligimus actualem partium à ſe invicem ſeparationem, quæ motum ſupponit, qualem quidem ſpatii natura non admittit, nec talem ſeparationem demonſtrationes ex Geometria accerſitæ probant; verum noſtra, quam hic evincere conabimur, diviſibilitas, eſt ſolum magnitudinis cujuſvis in ſuas partes reſolutio, ſeu earum diſtinctio & aſſignabilitas, *v. g.* Cum docet Euclides, in propoſitione nona Elementi primi, angulum quemvis rectilineum biſariam ſecare, non in ea methodum oſtendit, qua una anguli pars media ab altera divulſa recedat, & ad datam ab eâ diſtantiam ponatur, ſed methodum tantum tradit qua linea ducatur, ita angulum in duos alios angulos dividens, ut qui ab una iſtius lineæ parte jacet angulus, æqualis sit ei qui ad alteram partem existit: Sic etiam cum, in propositione sequenti, docet rectam quamvis bisecare, docet tantum assignare punctum medium datam rectam in duas partes æquales dirimens, quod sit utriusque partis communis terminus, ubi scilicet desinit una partium æqualium, & incipit altera. Hæc magnitudinis in partes resolutio ita ei intima & essentialis est, ut illud quod partes non habet, scil. punctum, non magnitudo, sed magnitudinis initium dicatur vel finis; nec magnitudo quævis ex punctis potest conflari, licet numero infinitis; omnis verò magnitudo non ex punctis, sed partibus, aliis nempe ejusdem generis magnitudinibus componitur, quarum unaquæque ex aliis etiam conflatur partibus, & rursus quælibet harum partium alias adhuc in se continet partes, & sic in infinitum: nec unquam ad magnitudinem tam parvam pervenire possumus, quin adhuc in plures dividi possit partes, nullumque datur in quacunque magnitudinis specie absolutè minimum, sed quicquid dividitur, dividitur in partes adhuc etiam divisibiles. Hæc semper ulterior materiæ in partes resolutio, illius *Divisibilitas in infinitum* à philosophis nuncupatur; & recte sane, cum nulla assignari potest quantitas materiæ adeo minuta, & numerus finitus adeo magnus, quin numerus partium eam quantitatem componentium, in quas scil. resolvi potest illa quantitas, major sit numero illo utcunque magno; nam *illud infinitum vocamus quod omni finito majus est.*

Quoniam autem infinita hæc materiæ divisibilitas rationibus ex Geometria petitis demonstranda sit, & cum hodie existent quidam Philosophi, qui Geometriam ex Physica exulare cupiunt, eo quod ipsi Divinæ illius Scientiæ imperiti sint; & dum inter doctissimos haberi satagunt, nullum non movent lapidem, quo harum demonstrationum vim irrito utcunque convellant conatu; necesse erit, priusquam argumenta nostra Geometrica proferamus, eorum vim stabilire, & objectionibus quibusdam respondere.

Cum itaque, inter hujus generis Philosophos, emineat Vir Clar. *Joannes Baptista Du Hamel*, Philosophiæ *Burgun-*

gineiice ſcriptor, libet illius ſententiam ſuper hac re proferre. Dicit igitur Hypotheſes Geometricas nec veras eſſe nec poſſibiles, cum ſcil. nec puncta, nec lineæ, nec ſuperficies, prout à Geometris concipiuntur, vere in rerum natura exiſtant; adeoque demonſtrationes, quæ ex his afferuntur, ad res actu exiſtentes applicari non poſſe, cum ſcil. nihil eorum vere exiſtit niſi in ideis noſtris: jubet igitur Geometras ſibi ſuas ſervare demonſtrationes, nec eas ad phyſicam transferre, quæ non lucem, ſed majores huic ſcientiæ offundant tenebras.

Miror ego hujus viri alias doctiſſimi in hacce re imperitiam; potuit ſane eodem jure ſuppoſitiones etiam quaſcunque phyſicas ſuſtuliſſe, cum hypotheſes Geometricæ æquè certæ & æquè poſſibiles ſunt & reales, ac illæ ſunt quas phyſicas dicit: imo ſi exiſtat corpus, neceſſario etiam exiſtent vera puncta, veræ lineæ, & veræ ſuperficies, prout à Geometris concipiuntur; quod facile oſtendemus. Nam ſi detur corpus, illud cum infinitum non ſit, ſuos habebit terminos; corporis vero termini ſunt ſuperficies, & termini illi nullam habent profunditatem; ſi enim haberent, eo ipſo quod profunditatem haberent corpora eſſent, haberentque illa corpora alios rurſus terminos qui ſuperficies eſſent, adeoque eſſet ſuperficiei ſuperficies. Vel igitur ſuperficies illa omni deſtituta eſt profunditate, vel etiam profunditatem habebit: Si prius, habemus quod petimus; ſin poſterius, ad aliam rurſus pervenimus ſuperficiem; atque ſic progrederemur in infinitum, quod eſt abſurdum: quare dicendum eſt terminos illos omni profunditate privari, ac proinde veræ erunt ſuperficies, & prout à Geometris concipiuntur abſque profunditate, ſeu quæ longitudinem & latitudinem tantum habent ad ſuam eſſentiam conſtituendam.

Rurſus, cum ſuperficies illa infinita non eſt, ſuis etiam claudetur terminis; termini vero illi lineæ dicuntur, quæ revera nullam habent latitudinem, aliàs enim ſuperficies eſſent, & ſuos etiam haberent terminos; quos ſaltem concipere oportet omni latitudine deſtitutos; non enim (ut prius dictum

ctum est) dari potest progressus in infinitum, unde sequitur dari lineas, quæ sunt tantum longæ absque omni latitudine: eodem prorsus modo & lineis sui etiam competunt termini, qui puncta vocantur, quibus nec longitudo, nec latitudo, nec profunditas convenit. Quare si corpus existere supponatur, necessario tam superficies, quam lineæ & puncta Geometrica, non tantum ut possibilia, sed etiam ut verè existentia ponentur.

Sed respondebunt puncta illa, lineas & superficies non esse materialia. Quid inde? Quis unquam dixit punctum Mathematicum materiam esse? Quis superficiem materialem agnoscit? Si materialis esset, suam haberet etiam superficiem sive terminum: superficiei autem superficiem quis unquam imaginatus est? Verum etiamsi nec superficies, nec lineæ, nec puncta sunt ipsa materia, in ea tamen existunt vel existere possunt, tanquam illius modi, termini seu accidentia; eodem prorsus modo, quo figura non est ipsum corpus, sed ejus tantum affectio, qua corpus sub datis terminis comprehenditur, habetque hæc proprietates reales à corporis proprietatibus omnino distinctas.

Sed rursus objiciunt nostri ἀγεωμέτρητοι Philosophi, nullam esse in rerum natura superficiem perfecte planam, nullum corpus perfecte sphæricum, quale sibi fingunt Geometræ, nec curvam ullam perfecte circularem. At quo pacto hoc illis innotuit? An omnia viderunt quotquot sunt in mundo corpora, & per microscopia ea contemplati sunt? Dicent fortasse, corporum superficies planas vel sphæricas esse non posse, quia in harum figurarum naturis est contradictio quædam & impossibilitas. At, ut contradictionem ostendant velim; corpus omne aliqua saltem figura terminari necesse est; superficies planæ vel sphæricæ sunt omnium conceptu facillimæ & simplicissimæ: Qualis igitur est in illis repugnantia, ut impossibile sit corpus sub istiusmodi superficiebus comprehendi? Credo neminem esse, qui Geometriam vel primis labiis tetigerit, quin harum figurarum naturam & proprietates magis perspectas habeat, & plures earum affectiones nôrit, quam omnes istiusmodi Philosophi intelligunt,

gunt, vel fortasse unquam sunt intellecturi: At horum nemo talem deprehendit in hisce figuris repugnantiam; nullus Geometra istiusmodi contradictiones in figurarum naturis unquam suspicatus est: è contra, harum possibilitatem evincunt tot pulchræ earum proprietates à Geometris detectæ atque demonstratæ; nam rei impossibilis nulla est vera proprietas, nulla demonstratio. Restat igitur, ut has figuras tanquam possibiles agnoscant; & si possibiles sunt, potest Deus corpora istiusmodi superficies habentia è materiâ formare. Ponamus igitur duo corpora, quorum unum planis, alterum sphæricâ terminatur superficie; si igitur corpus sphæricum super plano constituatur, illud vere continget: at continget in unico tantum & indivisibili puncto, seu in puncto quod partes non habet, (per Cor. Prop. 2. El. 3tii) & proinde erit in illo casu verum punctum. Sed ulterius, ponamus corpus sphæricum super plana superficie moveri, seu progredi absque omni circa axem aliquem rotatione, ita scil. ut punctum sphæræ planum contingens semper in eodem *plano* inveniatur; eritque via, quam punctum illud motu suo describit, linea vere mathematica absque omni *latitudine*: & si quidem sit via brevissima inter duo quælibet puncta in illo plano, orietur ex motu illo linea recta, sin alias, curva vel ex pluribus rectis composita, vel partim ex his partim ex illis conflata. Puncta igitur, lineæ, & superficies, prout à Geometris concipiuntur vel finguntur, sunt possibilia, quod ostendi oportebat. Aliis etiam innumeris modis potest eorum possibilitas demonstrari, verum piget hisce ineptiis diutius immorari. Hoc tantum libet admonere, quod inter duo quælibet duorum corporum puncta, erit distantia data & determinata; *v. g.* inter Solis & stellæ fixæ centra, est determinata distantia, quæ per rectam lineam mensuratur duo illa puncta interjacentem; quæ erit omnium linearum quæ à puncto uno ad alterum duci possunt, brevissima, & minimo tempore data velocitate peragranda; hæc inquam distantia eadem manet, qualiscunque futura sit corporis intermedii figura, sive planis claudatur, sive sphæricis contineatur superficiebus, sive demum absit omne corpus medium, & nihil intersit præter spatium; eadem manebit linea magnitudine & positione, quamdiu corporum centra immota manent.

Stabilitis jam principiis, ad propositum redeo, ut scil. demonstretur extensionem omnem, tam corpoream, quam incorpoream, in infinitum esse divisibilem, seu partes habere numero infinitas; quod pluribus invictis rationibus probare conabimur. Prima sit hæc; exponatur linea quævis AB; dico illam divisibilem esse in partes numero omni finito numero dato majores.

Tab. I. fig. 3. Ducatur per A recta quævis AC, & huic per punctum B parallela ducatur BD, & in AC capiatur punctum quodvis C. Si igitur recta AB non est divisibilis in infinitum partium numerum, divisibilis tantum erit in numerum partium finitum; sit ille numerus qualiscunque *v. g.* senarius: In linea BD ad partes puncto C oppositas capiantur quotcunque puncta plura quam sex *v. g.* puncta E, F, G, H, I, K, L, & ducantur per postulatum primum *Euclidis* CE, CF, CG, CH, CI, CK, CL: hæ ductæ divident rectam AB in tot partes quot sunt rectæ: si enim non divident, ergo plures rectæ in uno aliquo puncto rectam AB intersecabunt; sed omnes se intersecant in communi puncto C, quare duæ aliquæ rectæ sese bis secabunt, & proinde vel spatium comprehendent, vel habebunt idem segmentum commune: quorum utrumque est contra axiomata in Elementis posita. Dividitur igitur AB in tot partes diversas, quot sunt rectæ; sed tot sunt rectæ, quot puncta in recta BD sumpta fuerint: quare cum sumpta fuerint plura puncta quam sex, erit linea AB in plures partes quam sex divisibilis. Eodem modo, quantumvis magnus ponatur numerus, ostendi potest lineam AB esse divisibilem in partes numero majores illo numero, majorem scil. assumendo in recta BD punctorum numerum (quod facile fieri potest, cum nullus sit numerus finitus ita magnus, quin major sumi possit, ideoque in data quavis ratione majoris inæqualitatis) atque ducendo rectas à puncto C ad puncta in recta BD assumpta; hæ quippe rectæ rectam AB divident in tot partes, quot sunt rectæ, adeoque in plures

par-

partes quam numerus primo positus, qui (utcunque magnus sit) constat unitatibus; erit itaque recta AB divisibilis in plures partes quam per ullum numerum finitum exprimi potest, adeoque erit divisibilis in infinitum: Q. E. D.

Argumentum secundum. Exponatur recta quæcunque AB, dico illam divisibilem esse in infinitas numero partes; si enim non est divisibilis in partes numero infinitas, divisibilis erit in partes numero finitas; sit ille numerus quivis *v. g.* quinarius; ducatur recta quævis AK angulum utcunque cum AB continens, in eaque, quantum opus est producta, capiantur quot volueris puncta plura quam quinque: sint *v. g.* C, D, E, F, G, H, K; jungatur KB; perque puncta C, D, E, F, G, H ducantur rectæ ipsi KB parallelæ, divident hæ necessario rectam AB in tot partes quot sunt rectæ: si enim non dividant, ergo plures rectæ in uno puncto concurrent: at non concurrent, cum parallelæ ponantur, quare unaquæque recta in diverso puncto rectam AB intersecabit, & omnes in tot partes rectam AB divident, quot sunt rectæ parallelæ ductæ. At ductæ sunt plures quam quinque, ergo divisa erit recta AB in plures partes quam quinque: idem de alio quovis numero dicendum erit. Quare nullus est numerus tam magnus, quin numerus partium, in quas recta AB est divisibilis, erit illo numero major, adeoque recta AB est divisibilis in infinitum. Tab. 1. fig. 4.

3tio. Si quantitas non est divisibilis in infinitum, divisibilis erit in partes ulterius non divisibiles; at nulla est pars quæ ulterius dividi non potest: quia nulla datur quantitas tam parva, quin adhuc minor accipi possit, idque in data ratione minoris inæqualitatis. Sit enim recta AB, & ejus pars quantumvis parva sit AC, dico ipsâ AC minorem lineam accipi posse, in ratione quacunque minoris inæqualitatis, *v. g.* ut unum ad tria. Ducatur à puncto A recta quævis AD, inque ea capiantur rectæ AE, EF, FG æquales: jungatur GC & per E agatur EH ipsi GC parallela, erit recta AH ipsius AC pars tertia: demonstratio constat ex *nona propositione Elementi sexti.* Adeoque recta AC non erit minima quæ accipi potest. Idem de alia quavis recta demonstrari potest, Tab. 1. fig. 5.

poteſt, ac proinde nulla eſt in natura quantitas minima.

Præterea, ſi quantitas ex indiviſibilibus componeretur, multa exinde ſequerentur abſurda; ſint enim *v. g.* duo circuli ABCD, EFGH concentrici, dividaturque circumferentia major in partes ſuas indiviſibiles, & ducantur à centro Q ad ſingulas haſce partes rectæ, QOM, QPN quæ circumferentiam utramque in æquales numero partes divident, & circumferentia major ABCD in partes ſuas minimas diviſa erit; quare & circumferentia minor EFG tot partibus minimis ſeu indiviſibilibus conſtabit, quot conſtat ABC circumferentia: adeoque cum indiviſibile indiviſibili æquale ſit, erit circumferentia EFGH æqualis circumferentiæ ABCD; minor majori: quod fieri non poteſt.

TAB. I. *fig.* 6.

Ultimo, ex hac quantitatis ex indiviſibilibus compoſitione ſequitur nullas dari magnitudines incommenſurabiles, contra quod à Geometris paſſim demonſtratur. Nam ſi magnitudo omnis ex indiviſibilibus conſtaret, indiviſibile illud eſſet omnium magnitudinum ejuſdem generis adæquata & communis menſura: in omnibus enim aliquoties exacte continebitur, adeoque omnes magnitudines communem menſuram habebunt, & latus quadrati illius diagonio eſſet commenſurabile; contra *ultimam Propoſitionem Elementi decimi.*

Innumeræ aliæ poſſunt adduci demonſtrationes, quibus continui infinita diviſibilitas oſtendatur, & indiviſibilium hypotheſis funditus evertatur. Sed quid opus eſt pluribus? Cum hactenus allata argumenta non minorem habeant vim ad aſſenſum cogendum, quam demonſtratio quævis in Elementis *Euclidis*; imo impoſſibile eſt ut ea convellantur, quin ſimul Geometriæ fundamenta corruant; quæ tamen nulla unquam ætas, nulla Philoſophorum hæreſis labefactare poterit.

Ut igitur argumentorum vim devitent Philoſophi, diſtinguunt inter corpus Mathematicum & corpus Phyſicum; Corpus ſcil. Mathematicum diviſibile eſſe in infinitum, demonſtrationum vi coacti, lubenter agnoſcunt; at Corpus Phyſicum in partes ulterius diviſibiles ſemper reſolvi poſſe negant. Sed quid quæſo eſt corpus mathematicum, niſi quid-

dam

idem in trinam dimensionem extensum? Nonne corpori mathematico competit divisibilitas eo quod extensum est? At eodem etiam modo extenditur corpus Physicum; quare cum divisibilitas ab ipsius extensionis natura & essentia dependeat, & inde ortum suum trahat, illam omnibus extensis tam Physicis quam Mathematicis convenire necesse erit. Ut enim Logicorum phrasi utar, quicquid prædicatur de genere, prædicatur de omnibus speciebus sub eo genere contentis.

Est & alia apud Philosophos haud absimilis distinctio, qua corpus quodvis mathematice divisibile esse in infinitum concedunt; divisibile autem esse physice negant. Si ullus sit horum verborum sensus, hic erit: Corpus esse Mathematice, hoc est, realiter & demonstrative divisibile in infinitum concedunt; Physice autem seu secundum falsam suam hypothesin negant; atque sic habebunt distinctionem, contra quam nihil urgeri potest.

Quoniam Philosophi, contra quos disputamus, demonstrationibus Geometricis non satis assueti sunt, & proinde earum evidentiam non facile perspiciant; priusquam huic lectioni finem imponemus, libet unum argumentum Physicum ex motu petitum, pro infinita continui divisibilitate proferre; scil. si continuum ex indivisibilibus constaret, sequeretur omnes motus æquiveloces fore, nec minus in eodem tempore conficiet spatium segnissima testudo, quam πόδας ὠκὺς Achilles. Ponamus enim Achillem velocissime cursurum & testudinem segnissime repturam: si continuum ex indivisibilibus constaret, non potest testudo in aliquo dato tempore minus conficere spatium quam Achilles; nam si Achilles in uno temporis instanti, indivisibile pertransit spatium, non potest testudo minus spatium in eodem temporis momento transire, quia ex hypothesi non datur minus. Indivisibile enim alio indivisibili minus non erit, ergo pertransibit æquale: idem de alio quovis temporis momento dicendum est: ergo semper ab utroque percurrentur spatia æqualia; & proinde Achilles velocissimus non plus conficiet spatii quam testudo lentissima; quod est absurdum. Alia ejusdem

dem generis absurda ex eadem indivisibilium hypothesi deduci possunt; verum quae dicta sunt sufficiant.

LECTIO IV.

In qua respondetur objectionibus contra materiae divisibilitatem afferri solitis.

Hactenus, Academici, argumenta exposuimus, quibus continuam materiae in infinitas numero partes divisionem clare satis demonstravimus; restat ut objectionibus seu Philosophorum argutiis respondeamus. Sunt enim Philosophi haud pauci, qui nescio qua idearum obscuritate laborantes, & demonstrationum, quas attulimus, evidentiam non satis perspicientes, contra rem tam manifeste veram argumenta sua proferre non audeant tantum, verum & confidant specioso demonstrationum titulo ea insignire. At ego, qui plures illorum evolvi libros, nunquam incidi in quicquam ab iis de hacce re scriptum, quod rationis quidem speciem haberet; adeo equidem sunt demonstrationibus destituti, ut ne minimam demonstrationis umbram in iis quisquam Geometra, etsi Lynceis donatus fuerit oculis, perspicere queat. Fateor tamen esse aliquid in natura infiniti, quod humano intellectui haud adaequate comprehensibile esse videtur; adeoque non mirum erit, si ex ea quaedam sequuntur, quae hominum mentes densa caligine involutae concipere non possunt: & speciatim in hac, quam nunc prosequimur, quaestione, multa sunt, quae quibusdam Philosophis hisce rebus minus assuetis paradoxa & incredibilia videntur: nihil tamen exinde sequitur, quod vel contradictionem implicat, vel cuivis axiomati aut demonstrationi repugnat. Sed videamus, quas afferunt Philosophi Atomistae, argutias. Prima est ea Epicuri; si continuum divisibile esset in infinitum, contineret infinitas numero partes, adeoque finitum contineret infinitum, quod est absurdum. At rogo ut terminos suos explicent, & dicant quid per has voces intelligunt, *infini-*

finitum non posse contineri in finito; si dicant infinitam magnitudinem non posse in magnitudine finita contineri, hoc lubenter concedam; at hujus contrarium non sequitur ex ea, quam proposuimus, doctrinâ; nec unquam illud necessariâ consequentiâ exinde deducere possunt. Si dicant partes numero infinitas, & infinite exiguas, non posse finitâ magnitudine contineri, hoc illud ipsum est quod iis probandum incumbit. Non, ut opinor, dicent ipsis absque ratione credendum esse; nec illud tanquam propositionem per se claram inter axiomata reponent, cujus contrarium tot validis rationibus demonstrari potest. Urgeant itaque partes numero infinitas infinitam magnitudinem componere: sed hoc rursus est Principium petere; illud enim ipsum est de quo disputamus, utrum scil. finita magnitudo potest habere partes numero infinitas? Certum enim est, quotcunque partes habeat, sive finitas, sive infinitas, eas suo toti æquari: sicut enim decem partes decimæ unitatis efficiunt unitatem, centum centesimæ unitatis partes simul sumptæ etiam unitatem component, & mille partium millesimarum in unum collectarum summa toto non major erit; ita etiam partes infinitæ infinitesimæ alicujus magnitudinis ipsam magnitudinem adæquant. Vel sic: sit linea AB divisa in partes centum; erunt omnes hæ simul sumptæ ipsi AB æquales: & eodem modo, si recta AB dividi intelligatur in mille partes, harum partium mille simul sumptæ magnitudinem nec majorem nec minorem ipsa AB component. Vel etiam, si divideretur recta AB in milliones, partes hæ rursus simul sumptæ toti AB erunt æquales; & universaliter, si sint duæ magnitudines AB & C, habeatque C eandem rationem ad AB quam habet unitas ad numerum quemvis N, erit quantitas C per numerum N multiplicata ipsi AB æqualis. Cum enim quantitates C. AB, unitas & numerus N sint proportionales, erunt extremæ in se invicem ductæ mediis in se invicem ductis æquales; at cum AB per unitatem multiplicata ipsi AB est æqualis (unitas enim nec multiplicatione auget, nec divisione minuit) erit quantitas C per N numerum TAB. I, *fig.* 7.

multiplicata ipſi AB æqualis: Quantumvis igitur magnus ſive parvus ſit numerus N, hic multiplicans quantitatem C faciet ſemper productum ipſi AB æqualem, modo C talis ſit quantitas ut ad AB eandem habeat proportionem quam habet unitas ad dictum numerum N. Adeoque ſi N ſit numerus infinitus, & C pars rectæ AB infiniteſima, hoc eſt, ſi eandem habeat quantitas C rationem ad AB quam habet unitas ad numerum infinitum N, eſt etiam quantitas C per numerum infinitum N multiplicata, hoc eſt infinities ſumpta, quantitati AB æqualis, nec eâ major, ſicut nec minor eſſe poteſt. Si igitur partium magnitudo eadem ratione diminuatur, qua earum numerus augetur, totum ex hiſce omnibus partibus conflatum idem manebit; nec æſtimanda eſt quantitas aliqua ex partium numero, ſed ex earum numero & magnitudine conjunctim; adeoque ſi partes infinite parvæ ſint, neceſſe erit ut earum multitudo ſit infinite magna, priuſquam quantitatem quamvis dabilem exſuperare poſſunt. Sed præterea, plura poſſumus proferre exempla tam ex Arithmetica, quam ex Geometria, ubi, ipſis fatentibus adverſariis, partium numerus erit infinitus, at ipſa magnitudo ex partibus iſtis infinitis compoſita finita erit. Sit primum exemplum ſeries infinita numerorum in ratione quavis decreſcentium, quæ finito adæquatur numero *v. g.* $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{64}$ &c. Hujus ſeriei in infinitum continuatæ ſumma erit unitati æqualis; at cum in infinitum extenditur ſeries, erunt ejus termini numero infiniti; quare in hoc caſu partes quantitatis numero infinitæ finitam efficiunt quantitatem. Similiter & hujus ſeriei ſumma $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{27}$ $\frac{1}{81}$, &c. cum in infinitum continuatur æqualis erit parti uni ſecundæ ſeu unitatis dimidio, ut in Arithmetica demonſtratur; at nemo negabit ſeriem hanc in infinitum continuatam infinitas partes habere; quare poſſunt dari partes quantitatis numero infinitæ, quæ tamen unitatis partem dimidiam non exſuperant. Similiter in Geometria, notum eſt ſpatium poſſe dari infinite longum, quod tamen ſpatio finito perfecte adæquatur: hoc enim infinitis fere exemplis demonſtraverunt Clariſſimi Geometræ *Torricellius*, *Walliſius*, *Barovius* & alii, ex quibus

bus libet exempla quædam proferre. Et primo sit Curva ABCD talis naturæ ut si sumptæ fuerint in Asymptoto EH rectæ EF, FG, GH, æquales, seu positis rectis EF, EG, EH in proportione Arithmetica; & ad puncta E, F, G, H ordinatim applicentur rectæ AE, BF, CG, DH, sint ordinatæ hæ in proportione Geometricâ: curva ABCD dicitur curva Logarithmica, & spatium interminabile inter Asymptoton & curvam infinite productas contentum, æquale erit spatio finito, ut à Clarissimo *Barovio* in Lectionibus Geometricis demonstratur; ex qua potest colligi supra nominata proprietas numerorum in proportione quavis Geometrica decrescentium. Sed ut hoc ad propositum nostrum applicemus; nemo non agnoscet in spatio interminabili HGFEABCD, quod infinite longum est, esse partes numero infinitas; at omnes illas spatii partes esse spatio finito æquales demonstrant Geometræ; quare sunt aliquæ partes spatii numero infinitæ, quæ non spatium infinitum sed finitum conficere possunt. Eodem modo, in Hyperbolis omnibus, Apollonianâ exceptâ, erit area inter curvam & Asymptoton infinite protensas perfecte quadrabilis, & areæ finitæ æqualis; sed in areis hisce omnibus sunt partes numero infinitæ, quare erunt partes numero infinitæ æquales quantitati finitæ. Præterea, in Hyperbola Apolloniana CAB, etsi area interminabilis inter curvam AB & Asymptoton EF in infinitum protensas contenta, sit area infinita, seu qualibet finitâ major; si tamen area illa infinita circa Asymptoton suam revolvatur, generabitur solidum seu corpus vere infinite longum, quod tamen æquale erit solido seu corpori finito; ut elegantissime à *Torricellio* demonstratum est, qui solidum hoc Hyperbolicum acutum nominavit: at in hoc solido sunt partes numero infinitæ, cum scil. infinitè longum est; ergo partes corporis numero infinitæ finitum component corpus. Alia innumera proferre possumus hujus rei exempla, sed diutius fortasse, quam par est, huic objectioni refellendæ immorati sumus.

Tab. I. fig. 8.

Tab. I. fig. 9.

2*do* Objiciunt Atomistæ; si quantitas omnis est divisibilis *in infinitum*, magnitudo quævis minima æquabitur maximæ, cum ſcil. tot partes habet minima quot maxima. Qualis, quæſo, eſt hæc conſequentia? An quia ulna *Anglicana* dividi poteſt in centum partes, & pes Anglicanus etiam dividi poteſt in centum partes, ideo ſequitur pedem ulnæ æquari? At ovum ovo non ſimilius invenietur, quam eſt hæc argumentatio illorum objectioni; quæ falſiſſima innititur hypotheſi, qua magnitudines volunt ſolum per partium numerum, non item per earum quantitates eſſe menſurandas.

Ulterius objiciunt; ſi pes dividatur in infinitas partes æquales, & ulna etiam ita dividatur, ut pars unaquæque ulnæ ſit æqualis parti cuivis pedis, erit numerus partium in ulna triplus numeri partium in pede; unde cum numerus partium in pede ſit infinitus, erit numerus partium in ulna iſtius numeri infiniti triplus, & inde daretur infinitum triplo majus. At unde notum eſt illis hoc eſſe abſurdum? An contradicit axiomati alicui vulgo recepto? Nequaquam mehercule; nullum enim eſt axioma quod omnia infinita æqualia ponit. Nec infiniti naturæ repugnat ut ab alio infinito ſuperetur: nam ſi detur infinitum, infinita *v. g.* linea, erunt in ea infinita milliaria, plura ſtadia & multo plures pedes. Sic in ſpatio, quod undique extenſum imaginamur, ſi duæ lineæ parallelæ in infinitum producantur, erit area ab hiſce rectis comprehenſa revera area infinita, eo quod omnem aream finitam ſeu undique clauſam ſuperat; erunt igitur in eâ infinita jugera, plures perticæ quadratæ, & multo plures pedes quadrati; rurſus, ſi intra has lineas ducatur recta utrivis earum parallela, dividet hæc linea priorem aream in duas areas etiam infinitas; quæ igitur ſimul ſumptæ priori infinito adæquantur. Non igitur naturæ infiniti repugnat, illud poſſe ab alio infinito excedi, per aliud multiplicari, & in alia etiamnum infinita dividi; hæc, inquam, nullo modo repugnant, ſed ex ipſius rei natura facillime ſequuntur; imo nemo eſt, qui infinitum ſpatium concedit, quin ſimul agnoſcere cogatur iſtius ſpatii in alia infinita diviſibilitatem.

Aliud petunt argumentum contra infinitam materiæ diviſibilitatem ex omnipotentia divina. Dicunt enim Deum poſſe se continuum quodvis in partes suas infinitesimas resolvere, atque partes hasce a se invicem separare: sed si hoc fiat, daretur pars ultima, & divisibilitas continui tandem exhaurietur; ergo continuum non in infinitum sectile est. Respondeo proculdubio Deum posse quicquid est possibile, aut quod immutabili ipsius naturæ non repugnat; at cum hactenus demonstravimus nullam dari posse materiæ particulam utcunque parvam, quæ non iterum secari potest in infinitas alias etiam particulas; liquet exinde Deum non posse ita secare materiam, ut detur pars ultima indivisibilis. Si enim ad hoc se extenderet potentia Divina, posset Deus aliquid quod contradictionem involveret, vel quod immutabili ipsius Essentiæ repugnaret. Sed ulterius urgent, si quantitas omnis sit divisibilis in infinitum, & partes actu sint in continuo, dabitur actu pars infinitè parva, adeoque ulterius non divisibilis. Respondeo primo; possum cum *Aristotele* negare esse partes actu in continuo, & inde corrueret eorum argumentum quod ut demonstrationem invictam tantopere prædicant. 2*do.* Concedamus illis partes esse actu in continuo, concedamus esse partes infinitè parvas & indivisibiles, concedamus denique argumentum, nihil tamen exinde infertur contra quantitatis non infinite parvæ continuam & in infinitum divisibilitatem; hæc in argumento supponitur, at non refellitur; an quia pars continui infinite parva non est ulterius divisibilis, ideo sequitur partem datam, seu partem non infinitè parvam, etiam non esse ulterius divisibilem? Si aliquid exinde sequatur, sequitur continuam omnem quantitatem in partes infinitè parvas posse resolvi, adeoque continuum esse in infinitum divisibile. Sed tertia & vera responsio sit; negando esse partes in continuo adeo minutas seu parvas, ut nequeant esse ulterius divisibiles; & quamvis darentur partes infinitè exiguæ, vel tales quæ eandem habent proportionem ad sua tota quam numerus finitus ad infinitum, vel spatium finitum ad infinitum; negamus tamen hasce partes non esse ulterius divisibiles: sed cum ipsæ sint extensæ, erunt etiam divisibiles non tantum in duas, tres vel plures partes, sed etiam quælibet potest in infinitum secari: quantitatis

titatis infinite parvæ partes numero infinitæ, infinitesimæ infinitesimarum seu Fluxiones Fluxionum à Geometris dici solent, à quibus adhibentur ad plura problemata aliàs intricatissima solvenda. Præterea, & harum Fluxionum dantur & aliæ Fluxiones seu partes suis totis infinite minores, & harum rursus partium erunt aliæ partes, atque sic quousque libet progredi licebit. Non dissimulo ob humani ingenii imbecillitatem hoc conceptu esse difficillimum; non ideo tamen deserenda est veritas validissimis suffulta argumentis, præsertim cum quædam sunt, quæ à tenui nostro intellectu difficulter admodum capiuntur, quæ tamen esse certissime novimus. Exempla possumus comparare plurima, at ea tantum adducemus quæ ad rem propositam illustrandam inserviunt; quibus ostendemus esse quantitates infinite minores aliis datis quantitatibus, quæ tamen erunt aliis infinite majores; ita, si dentur quædam quantitates infinite parvæ, erunt quædam etiam quantitates his infinite minores, & rursus his ultimis fieri possunt aliæ infinite minores, & sic semper deinceps usque ad infinitum.

Tab. I. fig. 10. Primo igitur, sic probamus dari quantitates, quæ quantitatibus infinitè parvis sunt infinitè minores; sit circulus ABF, cujus diameter AB, sitque BF pars peripheriæ infinitè parva, cujus proinde chorda erit etiam infinitè parva, hoc est, chorda BF, ad magnitudinem quamvis determinatam, *v. g.* ad circuli diametrum AB, eam habebit proportionem, quam habet magnitudo quævis finita ad infinitam. Demissa intelligatur à puncto F ad AB, perpendicularis FG; erit BG rectâ BF infinitè minor. Ducatur enim AF, eritque angulus AFB in semicirculo rectus. Adeoque in triangulo AFB rectangulo ad F, ob demissam in basim AB perpendicularem FG, erit, per 8vam 6ti El. AB ad BF ut BF ad BG. Sed, ex hypothesi, AB infinitè major est quam BF, quare erit & BF infinitè major quam BG; erit igitur quantitas, quæ, etsi aliâ datâ quantitate sit infinitè minor, alia tamen quantitate infinitè major erit.

Sic etiam in circulo notum est, Sinum cujuslibet arcus esse suo arcu minorem, Tangentem vero esse arcu majorem, &

& proinde tangens arcûs erit etiam ejusdem sinu major. Sit itaque in circulo, cujus centrum C, & diameter AB, arcus infinite parvus BF, cujus tangens sit BE, sinus rectus GF, & sinus versus GB; per F ducatur FH ad AB parallela, erit HE æqualis differentiæ sinus recti FG & tangentis BE, quæ ex jam ostensis non est omnino nihil. Jam in triangulis CBE, FHE æquiangulis, ob angulos ad H & B rectos & E communem, erit, per 4^{tam} 6^{ti}, CB ad BE sicut FH est ad HE: sed ex hypothesi CB infinitè major est quam BE; quare erit & FH infinitè major quam HE: id est, in præsenti casu, erit BG sinus versus arcus infinitè parvi infinite major quam differentia inter sinum rectum & tangentem ejusdem arcus. Cum igitur CB sit infinitè major quam BE, & BE, ut superius demonstratum est, sit infinitè major quam BG, & rursus, per jam ostensa, BG infinite major quam HE, liquet propositum. TAB. 1. fig. 11.

Ad uberiorem hujus doctrinæ illustrationem, aliud libet afferre exemplum, quod à summo illo Philosopho & Geometra *Newtono* deprompsimus, in Scholio sectionis primæ *Philosophiæ Natur.* Sit curva AC Parabola Apolloniana, cujus axis AB, & AE tangens in vertice A. Demonstrant scriptores Conici, ut in circulo, sic etiam in Parabola, angulum contactus EAC esse angulo quovis rectilineo infinite minorem. Ad eundem jam axem AB & verticem A, describi intelligatur alterius generis parabola, cubicalis scil. cujus ordinatim applicatæ crescunt in subtriplicata ratione interceptarum; erit angulus contactus FAD angulo contactus Parabolæ FAC infinite minor; vel quod idem est, nullæ sunt Parabolæ Apollonianæ, vel nulli circuli, quantumvis magna Parametro describantur, qui inter Parabolam cubicalem & ejus ad verticem Tangentem duci possunt; quod facilè sic demonstratur. Dicatur Parabolæ Apollonianæ AC Parameter a; Parabolæ cubicalis AD Parameter sit b; accipiatur in Tangente punctum E tale, ut sit AE rectis a & b tertia proportionalis, hoc est, ut sit $a \times AE = b^2$; per punctum quodlibet F medium inter A & E ducatur FD ad axem parallela, curvæ AD occurrens in D; ducatur BCD ad tangentem pa- TAB. 1. fig. 12.

rallela, & vocetur BD, in parabola AD ordinatim applicata, z; BC autem, ordinata in parabola AC, sit y; & intercepta AB sit x: Erit ex natura harum curvarum $ax = y^2$, & $b^2 x = z^3$, adeoque $\frac{y^2}{a} = x = \frac{z^3}{b^2}$; unde $b^2 y^2 = a z^3$, & igitur reducendo hanc æquationem ad analogiam, $b^2 : az :: z^2 : y^2$, hoc est, b^2 seu $a \times$ AE est ad az seu $a \times$ BD vel $a \times$ AF, ut BD^2 ad BC^2: sed est $a \times$ AE major quam $a \times$ AF, quare erit BD^2 major quam BC^2, & proinde BD major quam BC; punctum igitur C cadit intra parabolam AD. Idem verum est de omnibus ordinatis BC, quæ sunt recta AE minores; adeoque portio Parabolæ Apollonianæ AC ad verticem cadit intra Parabolam cubicalem. Eadem de quavis alia parabola Apolloniana est demonstratio; adeoque nulla potest duci parabola, & proinde nullus circulus (qui semper alicui parabolæ est æquicurvus) inter parabolam cubicalem & ejus ad verticem Tangentem.

Quantumvis igitur diminuatur angulus contactus parabolicus vel circularis, erit tamen angulo contactus ad verticem parabolæ cubicalis major; ideoque erit quivis datus angulus contactus circularis vel parabolicus angulo contactus ad verticem parabolæ cubicalis infinite major; quantitas enim alterâ infinite major est, quæ quantumvis diminuta alteram illam semper superat.

Adhuc, ad eundem axem & verticem, describi intelligatur alia curva parabolica AG, cujus ordinatim applicata quævis crescat semper in subquadruplicata ratione interceptæ; erit angulus contactus FAG angulo FAD infinitè minor; quod ratiocinio priori haud dissimili demonstrare facile est. Eodem modo ad eundem axem & verticem, potest alia describi curva parabolica AH, cujus ordinatim applicatæ crescunt in subquintuplicata ratione interceptarum, in qua sit angulus contactus FAH angulo FAG infinite minor; atque sic progredi licebit in infinitum, semper assignando alias atque alias figuras parabolicas, quarum anguli contactus infinite à se invicem differant: scil. erit angulus FAC infinite minor angulo quovis rectilineo, & angulus FAD infinite te minor angulo FAC, & angulus FAG infinite minor angulo FAD: atque ſic habebitur ſeries angulorum contactuum in infinitum pergentium, quorum quilibet poſterior eſt infinite minor priore; imo inter duos quoſlibet angulos, alii interſeri poſſunt anguli innumeri, qui ſeſe infinite ſuperant. Sed & inter duos quoſvis ex hiſce angulis, poteſt ſeries in infinitum pergens angulorum intermediorum interſeri, quorum quilibet poſterior erit infinite minor priore. Quin etiam poſſunt eſſe anguli innumeri angulo contactus circulari infinite majores, qui tamen erunt angulo rectilineo infinite minores: Atque ſic progreditur in infinitum; *neque novit natura limitem.*

Hæc adhibui exempla, ut videant adverſarii, immane quantum diſcedunt à veris rerum naturis eorum de rebus ipſis ſpeculationes.

LECTIO V.

De Materiæ Subtilitate.

POſtquam infinitam materiæ diviſibilitatem validiſſimis (ut nobis videtur) propugnaverimus rationibus; objectionibus, quæ alicujus momenti ſunt, proſtratis prorſus & deletis; reſtat, ut mirandam naturæ ſubtilitatem, & minutiſſimas illas particulas, in quas materia actu dividitur, vel ex quibus componitur, pauliſper contemplemur; has quidem undique comparatis exemplis, ante oculos veſtros poni, ſenſibus obverti, & ipſarum exilitatem calculo oſtendi, facillimum foret: Nos autem pauca tantum proferemus.

Et primo, ex ſumma auri ductilitate, exiguam partium ipſius molem computatione collegerunt Doctiſſimi viri, *Robaultus* Gallus in *Tractatu ſuo Phyſico*; Nobilis *Boyleus*, noſtras, in libro de *Effluviis*; & nuper Clariſſimus *Halleius* in *Actis Philoſophicis numero* 194. *Halleius* quidem demonſtravit unum auri granum in 10000 partes viſibiles poſſe ſecari; adeoque cum unum auri granum æquale ſit circiter $\frac{21}{100000}$ unius digiti cubici, ſequitur unum digitum cubicum auri dividi posse in partes 47619047; quæ omnes erunt nudo oculo satis spectabiles.

Computavit præterea *Halleius* crassitiem istius lamellæ aureæ, quæ super argentea fila ab artificibus inducitur; invenitque eam $\frac{1}{124500}$ digiti non excedere; hoc est, si digitus longus dividatur in partes 124500, crassities istius lamellæ unam harum partium vix adæquabit; adeoque cubus partis centesimæ unius digiti, vel, quod idem est, digiti cubici pars $\frac{1}{1000\ 000}$ potest continere 243 000 000 talium particularum.

Alia experimenta quamplurima tradit de hac re Insignis ille & nobilis Philosophus *Robertus Boyle*, in præfato libro *De Natura & Subtilitate Effluviorum*; quorum unum aut alterum hic adducere liceat. Et primo, dissolvit unum cupri granum in spiritu salis *Armoniaci*; & inde orta solutio, cum aqua distillata mixta, tincturam coeruleam saturam valde atque conspicuam largita est granis aquæ 28534; unde, cum aquæ quantitas, cujus pondus est unius grani, æqualis sit $\frac{37}{10000}$ unius digiti cubici, erunt grana aquæ 28534 magnitudine æqualia digitis cubicis 105, 57. Cum igitur unum cupri granum potest colorem cœruleum tantæ aquarum copiæ communicare, necesse erit ut sit pars aliqua hujus cupri in parte quavis visibili prædictæ aquarum copiæ; adeoque quot sunt partes in ea aquæ quantitate oculo visibiles, in tot ad minimum partes divisum erat unum cupri granum; at visu sensibilis est linea, cujus longitudo est pars digiti centesima, adeoque ejus lineæ quadratum aut cubus adhuc multo magis erit visu dignoscibilis: quare cum cubus cujus latus est pars digiti longi centesima, sit pars digiti cubici millionesima $\frac{1}{1\,000\ 000}$, sequitur ad minimum in digitis cubicis aquæ 105, 57 esse partes sensu distinguibiles 105 570 000; adeoque per prædictam solutionem in tot ad minimum partes dividetur

cu-

cupri granum. Est vero magnitudo unius cupri grani æqualis digiti partibus circiter $\frac{55}{100\,000}$, adeoque cum digitus cubicus contineat propemodum 20000 talium particularum, hinc sequitur digitum cupri cubicum in partes 2 111 400 000 000 actu posse resolvi: Et si accipiatur minutissima arenula, talis sc. ut ejus diameter sit pars digiti centesima, vel quod tantundem est, ut ipsa arenula sit pars digiti millionesima, hæc duos milliones centum & undecim millia & quadringenti, seu 2111400 particularum, in quas divisum est cuprum, continebit.

Secundum, quod proponimus, exemplum ex sequentibus ducitur principiis.

Omnes recentiores consentiunt Philosophi, odores oriri à profluviis ex corpore odorifero prodeuntibus, & undique in medio dispersis, quæ ope spiritus, quem per nares trahimus, in nervos olfactorios irruunt, eos irritant, atque sic sensorium afficiunt; unde sequitur, in quocunque loco odor cujusvis corporis sentitur, in eo esse aliquas particulas corporis odoriferi sensum afficientes. At plurima sunt corpora odora, quæ ad distantiam quinque pedum facile olent, & sensum olfactorium movent; erunt igitur per omne illud spatium quædam corporis odori diffusæ particulæ, ita scil. ut ubicunque in eo spatio ponantur nares, ibi aliqua esse corporis odoriferi effluvia necesse sit; saltem quædam erunt in ea aëris quantitate, quæ simul per inspirationem intra nares ducitur. Ponamus igitur esse unam tantum corporis odori particulam in unaquaque istius spatii parte, quæ digiti cubici partem quartam magnitudine adæquat: quamvis verisimile sit, effluvia tam rara vix sensum afficere posse, nolumus tamen plura assumere; tot igitur ad minimum erunt particulæ odorem producentes, quot sunt in sphæra, cujus semidiameter est quinque pedum, spatiola, quorum unumquodque æquale est digiti cubici parti quartæ: At in illa sphæra sunt ejusmodi spatiola numero 57 839 616; tot erunt igitur in illo spatio particulæ odorem producentes.

Utcunque igitur definito effluviorum numero, progrediamur ad eorum magnitudinem determinandam. Cum quantum effluviorum à corpore quovis decidit, tantum necesse erit ut corpus illud de pondere suo amittat; erit pondus effluviorum omnium, in dato quovis tempore, à corpore odorifero prodeuntium æquale ponderi partis eo in tempore amissæ. Jam per experimenta comprobavit *Boyleus* determinatam quandam Assæ foetidæ massam aperto aëri expositam, sex dierum spatio, grani partem octavam de suo pondere amisisse: cum vero continuus est effluviorum à corpore odorifero effluxus, patet oportere eum semper tempori proportionalem esse, adeoque tempore unius minuti primi erit pondus effluviorum ab Assa foetida decidentium æquale grani parti $\frac{1}{69\,120}$. Est autem magnitudo particulæ aqueæ, cujus pondus est unius grani, æqualis digiti cubici partibus $\frac{369}{100\,000}$, & proinde ejusdem aquæ particula, cujus pondus est pars grani $\frac{1}{69\,120}$, magnitudine æqualis erit partibus digiti cubici $\frac{533}{10\,000\,000\,000}$: Atqui est gravitas Assæ foetidæ ad aquæ gravitatem (ut ipse expertus sum) ut 8 ad 7, & proinde magnitudo quantitatis Assæ foetidæ, cujus pondus est unius grani pars $\frac{1}{69\,120}$, æqualis erit partibus digiti cubici $\frac{466}{10\,000\,000\,000}$; sed effluviorum omnium numerus supra inventus ponitur 57 839 616, adeoque cum omnia hæc effluvia digiti cubici partes $\frac{466}{10\,000\,000\,000}$ tantum adæquant, erit unaquæque particula æqualis digiti cubici partibus $\frac{466}{578\,396\,160\,000\,000\,000}$; seu reducendo hanc fractionem ad

deci-

decimalem, erit uniuscujusque particulæ magnitudo æqualis $\frac{8}{10\,000\,000\,000\,000\,000}$ digiti cubici partibus, seu decemmillebillionesimis partibus octo.

In hisce supposuimus particulas odorem producentes esse ubique in prædicta distantia æqualiter diffusas; at cum versus centrum seu corpus odoriferum, à quo prodeunt, spissiores & plures sunt quam versus extimam sphæræ superficiem, multo plures erunt particulæ quam superius determinavimus. Cum enim odores (sicut cæteræ omnes qualitates, quæ à centro secundum rectas lineas propagantur) decrescant in duplicata ratione distantiæ auctæ ab eodem centro, erit numerus particularum odorem producentium, & in dato spatio inclusarum, *v. g.* in digiti cubici quadrante, ad distantiam unius pedis, quadruplus numeri particularum quæ in spatio æquali ad distantiam duorum à centro pedum locantur: & novies major erit numero particularum ad distantiam trium pedum, & sic de cæteris. At si ubique non plures forent quam sunt ad extremam superficiem, esset earum numerus supra inventus 57839616. Patet igitur revera esse ipsarum numerum numero prædicto multo majorem.

Ut igitur, in prædicto casu, particularum odores producentium numerus determinetur, cognoscenda est quantitas Assæ fœtidæ, quam aëri exposuit *Boyleus*; at ex ipsius scriptis non constat quanta hæc fuit; necesse erit igitur ut assumamus aliquam illius quantitatem; sed quó minorem ipsam ponamus, eo major evadit proportio numeri particularum ex ea profluentium ad numerum superius inventum, cæteris omnibus pariter positis. Ut igitur numerum vero non majorem eruamus, assumenda est quantitas probabiliter major ea quam aëri exposuit *Boyleus*; sitque ea æqualis sphæræ cujus diameter sit sex digitorum, per circulum DBO hic repræsentatæ; sitque recta AD quinque pedum, seu 60 digitorum; erit AB 63 digitorum. Ad punctum A super AB erigatur perpendicularis AG, quæ repræsentet densitatem seu numerum particularum intra datum spatium ad distantiam AB; & si in omnibus distantiis eadem esset particularum densitas, TAB. 2. *fig.* 1.

ſitas, earum numerus per rectas innumeras EQ, *m* R, DH, &c. parallelogrammum AH complentes, hoc eſt, per ipſum parallelogrammum AH, exponi poſſit. Cum vero numerus particularum, in acceſſu ad centrum, ſupponatur creſcere in ratione diſtantiæ diminutæ duplicata; ad puncta E, *m*, D, & alia innumera in recta AB ſumpta, erigantur perpendicula EL, *mn*, DC, quæ ſint ad AG, ut quadratum rectæ AB ad quadrata rectarum EB, *m* B, DB &c. reſpective; & per puncta G, L, *n*, C, & alia innumera eodem modo determinata ducatur Curva; ſi jam AG repræſentet numerum particularum ad diſtantiam AB, EL repræſentabit earum numerum ad diſtantiam EB, poſito quod particularum denſitates ſunt reciproce in duplicata ratione diſtantiarum à centro: at EQ ipſarum numerum denotaſſet, ſi ubique eadem fuiſſet earundem denſitas; eodem modo *mn* exponet denſitatem particularum ad diſtantiam *m* B; at *m* R ipſarum numerum repræſentaſſet, ſi ubique uniformiter ſpiſſæ eſſent: ſic etiam DC denotabit numerum particularum ad diſtantiam DB poſitarum; ſi vero ubique æqualiter denſæ eſſent, numerus ille per DH repræſentandus foret: adeoque tota multitudo particularum, quæ à ſphæra DBO profluunt, & quarum denſitas decreſcit prout recedunt à centro in ratione diſtantiæ auctæ duplicata, eſt ad earum multitudinem, ſi ubique ipſarum denſitas ea eſſet, quæ eſt ad extimam diſtantiam AB quinque pedum, ut rectæ omnes DC, *mn*, EL, AG ad rectas DH, *m* R, EQ, AG; hoc eſt, ut area mixtilinea ADCG ad aream rectanguli GADH.

Eo igitur res reducta eſt, ut inquiramus proportionem, quam habet area GADC ad aream rectanguli AH. Cum autem eſt Curva GL *n* C talis naturæ, ut rectæ AG, EL, *mn*, DC ordinatim ad Aſymptoton AB applicatæ ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum à centro; erit curva hæc generis hyperbolici, & ſpatium interminabile CFBTS componitur ex elementis, quæ ſunt ſecundanorum reciproca; adeoque erit illud ſpatium, etiamſi interminabile, perfecte quadrabile & æquale duplo rectanguli CB; per ea quæ demonſtravit *Walliſius* in *Arithmetica Infinitorum*. Adeoque erit area intermi-

nabilis;

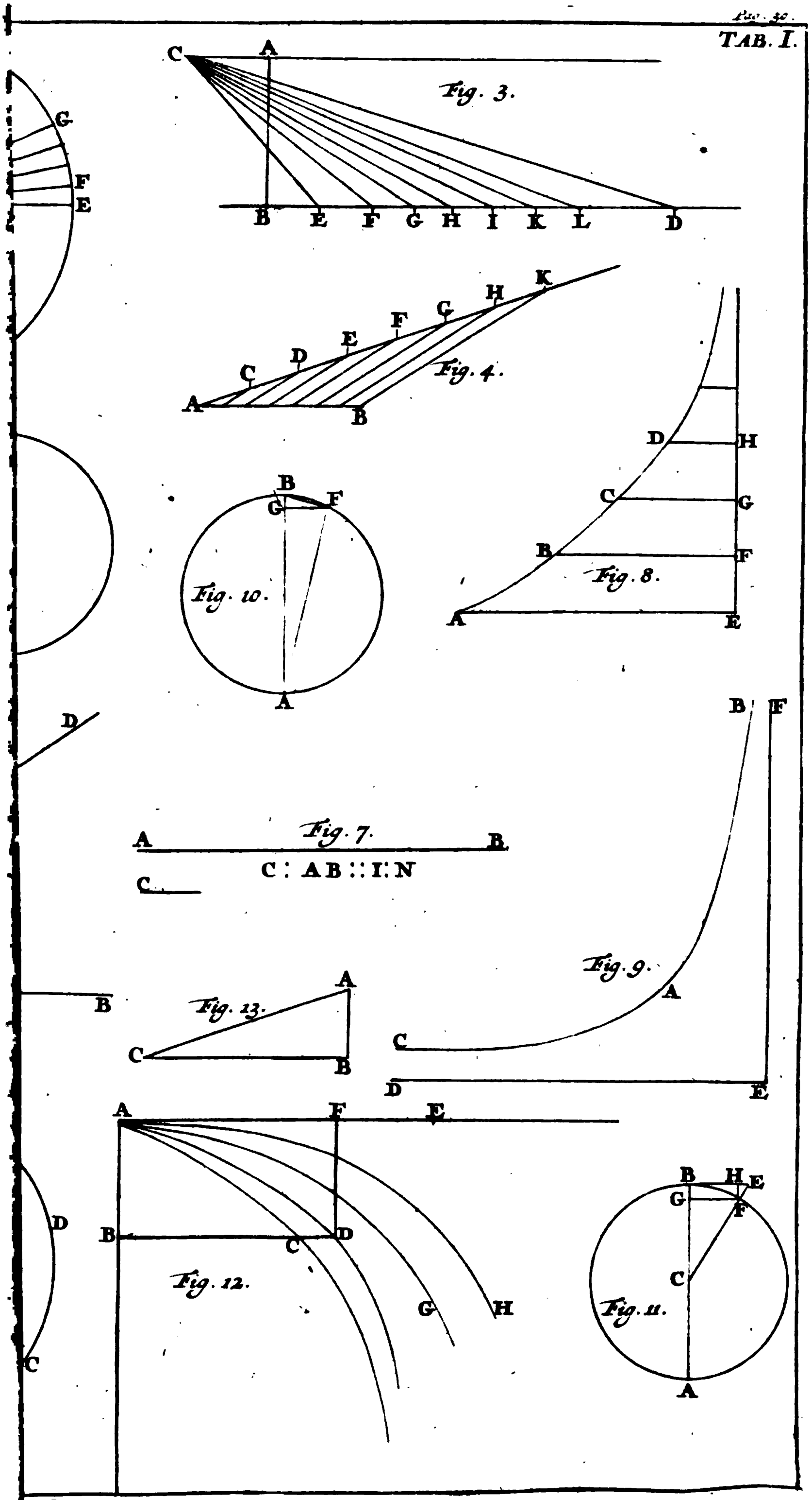
nabilis, seu indefinite protensa, CDTS ipsi CB rectangulo æqualis; & eodem modo area indefinitè protensa GATS æqualis erit rectangulo GB; erit itaque excessus, quo area CDTS superat aream GATS, æqualis excessui quo parallelogrammum CB superat parallelogrammum GB. Investigemus igitur horum rectangulorum differentiam. Cum ex hyp. sit AD 60 digitorum & BD trium, erit AB 63 digitorum; sitque AG unitas: cumque sit, ut DB^2 ad AB^2 ita AG ad CD, hoc est, ut 9 ad 3969, erit CD partium 441 qualium AG est 1; adeoque CD $\times$ DB, seu rectangulum CB, erit ad rectangulum BG, ut 1323 ad 63; & proinde rectangulorum differentia, hoc est area GADC, erit partium 1260, qualium scil. rectangulum AH est 60. Adeoque numerus particularum ex Assa fœtida prodeuntium, quarum densitates decrescunt in duplicata ratione distantiæ auctæ, & intra sphæram cujus diameter est 5 pedum contentarum, est ad earundem numerum, (si ubique earum densitas est æqualis ei quæ fit ad distantiam quinque pedum) ut 1260 ad 60; hoc est, ut 21 ad 1; si igitur numerus supra inventus 57839616 per 21 multiplicetur, productus dabit numerum particularum ex Assa fœtida prodeuntium, scilicet 1 214 631 936.

Præterea si fractio $\frac{8}{10\,000\,000\,000\,000\,000}$, quæ magnitudinem particularum in priore casu exprimebat, per 21 dividatur, quotiens $\frac{8}{210\,000\,000\,000\,000\,000}$ seu $\frac{38}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ exhibet veram magnitudinem uniuscujusque particulæ, in hoc posteriore casu.

Hæc omnia ex eo sequuntur, quod homo potest Assæ fœtidæ odorem ad distantiam quinque pedum sentire: at sunt alia animalia, quorum sensus in odorando humanis sensibus sunt multo acutiores, qualia in primis sunt canes venatici, qui ferarum effluvia in terra relicta, longo post decessum ferarum tempore, percipiunt; & aves quædam, quæ pulveris pyrii odorem ad magnam distantiam sentiant. Oportet certe ut istiusmodi effluviorum subtilitas longe major sit ea, quam ex superiore calculo elicimus; at ob experimentorum defectum non potest ea facile ad numeros revocari.

Ut materiæ subtilitatem ulterius ostendant Philosophi, in exemplum adducunt animalcula illa, quæ in aliorum animalium semine, & in aliis liquoribus natantia conspiciuntur. Hæc quidem in quibusdam fluidis adeo minuscula sunt, ut per microscopia objectum multum augentia visa ut puncta appareant. Imo solertissimus ille naturæ indagator *Leewenhoekius* plura horum animalculorum in lactibus unius Aselli deprehendit, quam sunt homines in tota terreni globi superficie degentes. Sed lubet horum animalculorum magnitudinem veram investigare: Ad quod præstandum sequentia ex Opticis suppono; Primo, Imaginem cujusvis objecti sub eodem angulo ex vertice emersionis lentis apparere, quo visibile ex vertice incidentiæ; hoc in Cl. *Gregorii* Elementis Dioptricis Prop. 18. demonstratum est. *2do.* Per experientiam comprobatum est ea objecta, quæ tanquam puncta videntur, hoc est, quorum partes à se invicem visu distingui nequeunt, sub angulo uno minuto primo non majori apparere. *3tio.* Satis experiendo constat pleraque istiusmodi animalculorum tantillæ esse magnitudinis, ut per lentem visa, cujus distantia focalis est pars digiti decima, tanquam puncta appareant; hoc est, eorum partes nequeunt discerni; adeoque sub angulo uno minuto primo non majori ex vertice istius lentis apparebunt. Eo igitur deventum est, ut investigemus magnitudinem objecti, quod sub angulo dato ad datam distantiam apparet; hoc est, si in præsenti casu, sit C vertex lentis, AB longitudo animalculi, BC ejus distantia à lente, æqualis scil. $\frac{1}{10}$ digiti, & angulus BCA sub quo ad illam distantiam videtur sit unius scrupuli; ex datis BC & angulo BCA invenienda est AB longitudo objecti. Jam in triangulo rectangulo ABC, ex datis (præter angulum ad B rectum) angulo BCA unius minuti primi, & latere BC æquali parti decimæ, per Trigonometriam innotescet latus AB æquale quam proxime $\frac{3}{100\,000}$ unius digiti. Si igitur animalcula illa essent figuræ cubicæ, ejusdem scil. longitudinis,

Tab. I. fig. 13.


TAB. I.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 10.
Fig. 8.
Fig. 7.
C : AB :: I : N
Fig. 9.
Fig. 13.
Fig. 12.
Fig. 11.

nis, crassitiei & latitudinis; ipsorum magnitudo per cubum fractionis $\frac{3}{100\,000}$ exprimenda esset; scil. per numerum $\frac{27}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$; æquale scil. esset unumquodque viginti septem partibus mille-billionesimis digiti cubici.

Hinc, quod quidam Philosophi de Angelis somniarunt verum erit de nostris animalculis, nempe posse multa eorum millia super parvæ aciculæ cuspidem saltitare.

Hinc etiam colligitur quantum est intervallum, quantilla intercedit proportio inter minima hæc natantia animalia & illa maxima, immanes nempe Balænas, quæ in oceano montium instar apparent, quoties ex aquis sua capita emergunt. Sunt enim in quibusdam liquoribus animalcula tantillæ magnitudinis, ut si calculus ineatur, invenietur ingentem terræ molem non satis amplam futuram, ut sit tertia proportionalis minutissimis his animalibus natantibus, & vastis Oceani Cetis: adeo ut ipsa terra, utcunque magna videatur, minorem tamen deprehenditur habere rationem ad pisces hos maximos, quam hi ad illos minimos, qui in animalium semine natantes per microscopia conspiciuntur.

Cum animalculum quodvis sit corpus organicum, perpendamus paulisper, quam delicatulæ & subtiles esse debent partes ad ipsum constituendum, & ad vitalem actionem conservandam, necessariæ. Haud mehercule facile concipitur, quo pacto in tam angusto spatiolo comprehendi possint, cor quod ipsius vitæ fons est, musculi ad motum necessarii, glandulæ ad liquores secernendos, ventriculus & intestina ad alimenta digerenda, & alia membra innumera sine quibus animal esse non potest. Sed cum singula memorata membra sunt etiam corpora organica, alias etiam habebunt partes ad suas actiones necessarias. Constabunt enim ex fibris, membranulis, tunicis, venis, arteriis, nervis & hisce similibus canaliculis numero fere infinitis, quorum exilitas imaginationis vires superare videtur. At his infinite propemodum minores esse debent partes fluidi, quod per canaliculos hosce decurrit, nempe sanguis, lympha & spiritus animales, quorum in grandioribus animalibus incredibilis est subtilitas.

Libet crassiores sanguinis partes in his animalculis contemplari, globulos nempe qui in sanguine natant, ipsorumque magnitudinem calculo eruere.

Ad quod præstandum sequentem adhibebimus hypothesin; nempe quod diversorum animalium similes partes solidæ, hoc est, similes particulæ corporeæ, seu partes trina dimensione constantes, sunt ut ipsorum animalium magnitudines: Unde sequitur diversorum animalium similes dimensiones lineares esse in subtriplicata ratione magnitudinum animalium; hoc est, ut harum magnitudinum radices cubicæ: *v. g* Cor humanum est ad cor animalculi cujusvis, per microscopium visi, ut ipsum corpus humanum ad corpus animalculi; & proinde, si utriusque corda sint corpora similia, erit diameter unius ad alterius diametrum, ut radix cubica magnitudinis unius ad radicem cubicam alterius magnitudinis. Sic etiam vasa sanguifera minima in homine sunt ad vasa similia minima in animalculo; ut magnitudo hominis ad animalculi magnitudinem; & diameter vasis minimi in corpore humano erit ad diametrum vasis minimi in corpore animalculi, ut radix cubica magnitudinis humanæ ad radicem cubicam magnitudinis animalculi.

Ponamus jam hominis mediocris magnitudinem esse trium pedum cubicorum, seu digitorum 5184: ut igitur magnitudo hominis mediocris seu digiti cubici 5184 ad magnitudinem animalculi superius traditam, æqualem nempe digiti cubici partibus, $\frac{27}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$ ita vasa minima in corpore humano ad similia vasa minima in animalculo, & ut radix cubica magnitudinis humanæ, seu ut radix cubica numeri 5184 ad radicem cubicam magnitudinis animalculi, seu ad radicem cubicam numeri $\frac{27}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$, hoc est, quam proxime ut 17 ad $\frac{3}{100\,000}$, ita diameter vasis minimi in in corpore humano ad diametrum vasis minimi in animalculo. Verum Cl. *Leeuwenhoekius* istiusmodi vasa in corpore humano detexit ope microscopii, ut posita diametro unius arenulæ $\frac{1}{30}$ digiti, hæc contineret 2640 diametros talium vasculorum, quæ in humano corpore conspexit; adeoque erit diameter unius hujusmodi vasculorum æqualis $\frac{1}{2640} \times \frac{1}{30}$ digiti, hoc est, æqualis digiti parti $\frac{1}{79\,200}$. Et quamvis certum sit, hæc vasa non fuisse minima eorum quæ sunt in corpore humano, nam & alia hisce multo minora ibi esse oportere facile est ostendere; ponamus tamen ipsa fuisse minima. Fiat igitur ut 17 ad $\frac{3}{100\,000}$ ita $\frac{1}{79\,200}$ ad alium numerum, numerus ille exprimet in partibus digiti diametrum vasis minimi in animalculo; qui, operando per regulam Trium, invenitur $\frac{3}{134\,646\,000\,000}$. Hæc fractio ad decimalem reducta erit quam proxime $\frac{22}{1\,000\,000\,000\,000}$; vel (ut numeros rotundos adhibeamus) $\frac{2}{100\,000\,000\,000}$. Cum autem necesse sit, ut diameter globuli vel particulæ fluidi, quod in vase aliquo continetur, ipsa vasis diametro non sit major; erit diameter globuli sanguinei, qui per vasa hæc minima decurrit, non major digiti partibus $\frac{2}{100\,000\,000\,000}$; adeoque ipsorum globulorum soliditas seu magnitudo minor erit cubo istius diametri, hoc est, minor erit partibus digiti cubici $\frac{8}{1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ hoc est, erit globulorum magnitudo minor ea digiti cubici parte, quæ exprimitur per fractionem, cujus numerator est numerus octonarius, denominator vero est numerus decemquintillionarius, seu qui scribitur per unitatem cum triginta tribus cyphris post se.

Cum fractio, qua globulorum magnitudo exprimitur, tam numerosis constet cyphris, ut vera ipsorum quantitas cum minutissimis arenulis, talibus scil. ut ipsarum diametri digiti partem centesimam non excedant, & denique minimas has arenulas cum aliis maximis terræ corporibus, ingentibus *e. g.* Montibus; ut videamus qualem ad se invicem obtineant rationem, atque sic multo melius particularum exilitas intelligetur. Sed cur hac utar voce? Cum potius dicendum est, comparatione sic facta, illorum subtilitatem prorsus incomprehensibilem fore. Nam exinde colligitur, ne quidem decies mille ducentos quinquaginta & sex altissimos totius telluris montes posse continere tot arenulas, quot potest una arenula continere globulos animalculorum sanguineos. Non mirum erit, Academici, si ad hæc attonitis hæreatis animis, & re tam prodigiosâ perculsi ipsam materiæ infinitam divisibilitatem, etsi validissimis suffultam demonstrationibus, in dubium vocetis. Utcunque vero res hæc prima facie prorsus incredibilis videatur, ipsam nihilominus ex claris & facillimis principiis deducemus.

Ut facilius calculus ineatur, vocemus decimam pedis partem unum digitum, & ponamus centum arenulas juxta se positas spatium istius longitudinis digitalis occupare; vel, quod idem est, supponantur mille arenulæ contiguæ per longitudinem pedis extendi: erunt igitur in uno digito cubico arenulæ 1 000 000, & in pede cubico erunt arenulæ 1 000 000 000. Sit milliare unum seu mille passuum æquale 5000 pedibus, erunt pedes cubici in uno milliari cubico 125 000 000 000; adeoque arenularum numerus, quæ in uno milliari cubico contineri possunt, erit 125 000 000 000 000 000 000.

Jam ut montium dimensiones habeamus, sumamus altissimum, ut vulgo creditur, totius telluris montem, eum nempe qui in Insula *Teneriffa* est, & *El Pico de Terrario* dicitur; cujus altitudo perpendicularis vulgo æstimatur trium milliarium *Italicorum*. Supponamus montem hunc esse figuræ conicæ, nem, atque hujus circuitum ad basim esse triginta & quinque milliarium, erit area basis 97, 5 circiter milliarium: nam ut 314 ad 100, hoc est, ut circuli circumferentia ad diametrum, ita 35 ad 11, 14 diametrum seu montis crassitiem ad basim; cujus pars quarta 2, 785 ducta in peripheriam 35 dat aream basis, æqualem scil. 97, 5 milliaribus quadratis; cum igitur mons ex hyp. sit figuræ conicæ, si basis in tertiam altitudinis partem multiplicetur, productus in milliaribus cubicis exhibebit ipsius montis contentum solidum; atque tertia pars altitudinis ex hypothesi æqualis est uni milliari, qui multiplicans numerum 97, 5, productus seu montis soliditas erit æqualis milliaribus cubicis 97, 5; qui numerus si rursus multiplicetur per 125 000 000 000 000 000 000, productus seu numerus 12 187 500 000 000 000 000 000 exhibebit numerum arenularum ex quibus mons Insulæ *Teneriffæ* componi possit.

Hisce investigatis, videamus quot particulæ seu sanguinei globuli in una arenula contineri possunt. Ex supra monstratis uniuscujusque globuli magnitudo minor est digiti cubici partibus $\frac{8}{1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}$; & magnitudo unius arenulæ æqualis est digiti cubici parti $\frac{1}{1\ 000\ 000}$; adeoque si posterior hic numerus per priorem dividatur, quotiens $\frac{1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{8\ 000\ 000}$ seu $\frac{1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}{8}$, hoc est, 125 000 000 000 000 000 000 000, minor erit numero globulorum sanguinis, qui in magnitudine unius arenulæ contineri possunt; sed numerus hic 125 000 000 000 000 000 000 000 divisus per 12 187 500 000 000 000 000 000 numerum arenularum, quæ in monte Insulæ *Teneriffæ* contineri possunt, quotiens major erit quam numerus 10 256; adeoque una arenula plus-

plusquam decem-millies ducenties quinquagesies & sexies plures globulos sanguineos in se continere potest, quam altissimus totius telluris mons arenulas: vel, quod idem est, decem mille ducenti quinquaginta & sex montes, quorum unusquisque æqualis est altissimo totius telluris monti, non tot possunt in se continere arenulas, quot una arenula possit in se continere particulas sanguineas animalculorum, quæ per microscopia in quibusdam fluidis natantia cernuntur. Quod erat ostendendum. Cum igitur globuli hi tantillæ sint magnitudinis, quid sentiendum erit de particulis fluidum componentibus, in quo istiusmodi globuli vehuntur; & de spirituum animalium subtilitate? Hæc proculdubio tanta est, ut omnem calculum & imaginandi vim fugiat.

Supra modum mirabilis est hæc naturæ subtilitas; at sunt aliæ materiæ particulæ memoratis multo subtiliores, ad quas si prædicti globuli referantur, non montium sed ingentium terrarum instar apparebunt. Lucis intelligo particulas, quæ à corpore lucido ineffabili celeritate undiquaque projiciuntur, quarum subtilitatem animus humanus nunquam forte nisi post adeptam in cœlis perfectionem assequetur: immensam tamen ipsam esse vel exinde colligitur, quod lumen tenuissimæ lucernæ in tempore omnino insensibili, & absque ullo sensibili ipsius lucernæ decremento, ad distantiam duorum milliarium ab oculo sentitur; unde necesse est, ut in omni assignabili parte sphæræ activitatis istius lucernæ, cujus diameter quatuor millibus passuum major est, & in omni assignabili temporis particula, sint quædam istius lucernæ particulæ, quæ oculum ingrediuntur vel ingredi possunt; quæ quidem in diversis temporis partibus diversæ erunt. Atque per ineffabilem illum lucis subtilitatem fit, ut Sol etiamsi continuo ab ipsius creationis exordio lucem celerrime in omnem mundi partem emittat, non tamen sensibile quidquam per omne illud tempus de sua magnitudine amisit, etiamsi quotidie per aliquam, inæstimabilem licet, quantitatem decrescat; unde etiamsi post sex mille annos ejus diminutio nondum notabilis evaserit, post finitam tamen annorum seriem, quamvis valde protractam, totus dissipabitur. Ex quo se-

ſequitur Mundum hunc nec in æternum exiſtere poſſe, nec potuiſſe ab æterno exſtitiſſe.

Ex demonſtrata infinita materiæ Diviſibilitate, ſequentia Theoremata ejuſdem Raritatem & tenuem compoſitionem ſpectantia facile eliciuntur.

LEMMA.

Datâ quavis materiæ quantitate, ex eâ, vel ex quavis ejus parte, formari poteſt ſphæra concava, cujus ſemidiameter ſit datæ rectæ æqualis.

Sit materiæ particula a^3, & data recta ſit b. Ratio peripheriæ circuli ad Radium ſit p ad r. Dicatur ſemidiameter concavitatis x, & craſſities pelliculæ concavitatem ſphæræ ambientis erit $b-x$, & cylindrus ſphæræ circumſcriptus cujus radius eſt b erit $\frac{p \times b^3}{8r}$, unde ſphæra cylindro inſcripta erit $\frac{2 \times p b^3}{24 r}$. Eâdem ratione ſphæra cujus radius eſt x erit $\frac{2 \times p x^3}{24 r}$; quarum differentia $\frac{2p}{42r} \times \overline{b^3 - x^3}$ ponenda eſt ſphæricæ lamellæ æqualis, ſeu materiæ particulæ datæ; hoc eſt, erit $\frac{2p}{24r} \overline{b^3 - x^3} = a^3$ ſeu $b^3 - x^3 = \frac{24 r a^3}{2p}$. Unde $x^3 = b^3 - \frac{24 r a^3}{2p}$ & $x = \sqrt[3]{b^3 \frac{24 r a^3}{2p}}$, adeoque craſſities lamellæ ſphæricæ ſeu $b-x$ erit $= b - \sqrt[3]{b^3 \frac{24 r a^3}{2p}}$.

Eâdem ratione fieri poſſunt ex data materiæ quantitate Cubi *concavi*, Cylindri *concavi*, *vel corpora etiam alterius cujuſvis figuræ concavæ, quorum latera ſunt datæ rectæ æqualia.*

Theorema Primum.

Datâ quavis materiæ quantitate quantumvis exiguâ, & dato *spatio quovis finito utcunque amplo; quod v. g. sit cubus qui sphæram Saturni circumscriberet: Possibile est ut materia istius Arenulæ per totum illud spatium diffundatur, atque ipsum ita adimpleat, ut nullus sit in eo porus cujus diameter datam superet lineam.*

TAB. 2. *fig.* 2. Sit datum spatium Cubus cujus latus sit recta AB, diametro scil. orbitæ Saturni æqualis; deturque materiæ particula cujus quantitas sit b^3; & data recta (quâ pororum diametri non majores esse debent) sit D. Dividi concipiatur recta AB in partes æquales rectæ D, quarum numerus finitus erit, cum nec recta AB ponitur infinitè magna, nec recta D infinitè parva: sit numerus ille n, hoc est, sit n D = AB, adeoque erit n^3 D^3 æqualis cubo rectæ AB. Concipiatur item spatium datum dividi in cubos quorum singulorum latera sunt æqualia rectæ D, eritque cuborum numerus n^3; & hi cubi per spatia EFGH in figura repræsententur. Dividi porro supponatur particula b^3 in partes quarum numerus sit n^3; & in unoquoque spatio cubico ponatur una harum particularum, & hac ratione materia b^3 per omne illud spatium diffundetur. Potest præterea unaquæque ipsius b^3 particula, in sua quasi cellâ locata, in sphæram concavam formari, cujus diameter sit æqualis datæ rectæ D: unde fiet, ut sphæra quælibet proximam quamque tangat, & data materiæ particula utcunque exigua b^3, spatium datum ita adimpleat, ut nullus sit in eo porus cujus diameter datam rectam D superat. Q. E. D.

Cor. Hinc dari potest corpus, cujus materia, si in spatium absolutè plenum redigatur, spatium illud fieri potest prioris magnitudinis pars quælibet data.

Theorema Secundum.

Possunt esse duo corpora mole æqualia, quorum materiæ quantitates sint utcunque inæquales, & datam quamvis ad se invicem obtineant rationem; pororum tamen summæ, seu spatia vacua inter corpora, ad rationem æqualitatis ferè accedant.

 Vel

Vel in stilo Cartesiano: *Spatium omne, quod à materiâ subtili intra unius corporis poros occupatur, posset esse fere æquale spatio quod à simili materiâ intra alterum corpus tenetur; licet materia propria unius corporis decies millies vel centies millies superet materiam propriam alterius corporis, & corpora sint mole æqualia.*

Ex. gr. Sit digitus cubicus *Auri*, & digitus cubicus *Aëris* vulgaris non condensati. Certum est quantitatem materiæ in *Auro* vicies millies circiter superare materiam *Aëris*, attamen fieri potest, ut spatia in *Auro* vel absolutè vacua, vel materiâ subtili repletâ, sint ferè æqualia spatiis in *Aëre*, vel vacuis, vel materiâ tantum subtili repletis.

Sint A & B corpora duo, magnitudine æqualia: utrumque *v. gr.* sit cubus uniûs digiti. Et corpus A decies millies sit gravius corpore B, unde & corpus A quantitate materiæ decies millies superabit corpus B. Ponamus jam materiæ quantitatem in A redigi in spatium absolutè plenum, quod sit digiti cubici pars centies millesima; (liquet enim ex Coroll. præcedentis Theorematis id fieri posse.) Unde cum materia in A decies millies superat materiam in B, materia illa in B, si in spatium absolutè plenum compingatur, occupabit tantum digiti cubici partem $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$, seu decies millies centies millesimam: adeoque partes reliquæ 999999999 vel erunt absolutè vacuæ, vel materiâ aliqua subtili, qualis supponitur Cartesiana, tantum repletæ. Porro, cum materiæ quantitas in A impleat tantum digiti partem centies millesimam, erunt in corpore A partes 99 999 centies millesimæ, vel vacuæ, vel materia subtili repletæ; hoc est, reducendo fractionem ad denominatorem prioris fractionis, erunt in A partes vacuæ 999 990 000 millies decies centies millesimæ. Adeoque vacuitates in A erunt ad vacuitates in B, ut numerus 999 990 000 ad numerum 999 999 999, qui numeri sunt ad se invicem ferè in ratione æqualitatis; nam eorum differentia, parvam admodum ad ipsos numeros obtinet rationem. Tab. 2. fig. 1.

nem. Adeoque ſpatia vacua, vel materiâ ſubtili tantum repleta, quæ ſunt in duobus corporibus A & B, eandem cum ipſis numeris, ad ſe invicem rationem obtinentes, ſunt etiam ferè in ratione æqualitatis. Q. E. D.

Corpora autem omnia eſſe rariſſima, hoc eſt, pro mole ſua parvam admodum continere materiæ quantitatem, ex Diaphanorum proprietatibus certiſſimè conſtat: nam *radii lucis* intra vitrum vel aquam, non ſecus ac in aëre per rectas lineas diffunduntur, quæcunque luci expoſita ſit corporis Diaphani facies; Adeoque à minimâ quâvis aſſignabili Diaphani parte, ad aliam quamvis ejuſdem partem, ſemper extenditur in his corporibus porus rectilineus, per quem tranſiverit lux; atque hoc fieri non poteſt, niſi materia Diaphani ad ejus molem parvam admodum obtineat rationem; nec fortaſſe materiæ quantitas in Vitro, ad ejus magnitudinem majorem habet rationem, quam magnitudo unius arenulæ ad totam Terreni orbis molem: hoc autem non eſſe impoſſibile, ſuperius oſtenſum eſt. Unde cum aurum non ſit octuplo denſius vitro, ejus quoque materia, ad propriam molem, exiguam admodum obtinebit rationem.

Hinc ratio reddi poteſt, cur effluvia magnetica eadem ferè facilitate denſum aurum & tenuem aërem pervadunt.

Ex his etiam propoſitionibus, & ex maximâ lucis celeritate, ratio reddi poteſt, cur *Lucis* radii ex pluribus objectis prodeuntes & per tenue foramen tranſmiſſi, ſe mutuo non impediunt, ſed per eandem rectam in motu ſuo perſeverant: Quod per motum ſeu impulſum fluidi plenum efficientis vix explicari poteſt; *Corpus enim omne à pluribus potentiis, ſecundum diverſas directiones, ſimul impulſum, unam tantum & determinatam directionem accipit ex omnibus compoſitam.*

LECTIO VI.

De Motu, Loco, & Tempore,

CUM hactenus de corporum Soliditate, Extensione Divisibilitate, Subtilitate, satis à nobis dictum sit; ad Motum jam, nobilissimam, qua gaudet corpus, affectionem, dilucidandum accedimus: quo mediante se prodit natura, eâ rerum varietate agentem, quæ videri non sine stupore debet; quo sublato, omnis periret mundi ornatus, & spectabilis pulchritudo; atque horrendæ tenebræ & infinitus torpor res omnes occuparent. Ab hoc pendent dierum & noctium vicissitudines, frigoris & caloris, nivis, pluviæ & serenitatis, sese mutuo excipientium tanta varietas, atque anni tempestates omnes. Per motum crescunt plantæ, nutriuntur arbores, & vivunt animalia, cum ipsa vita non nisi in motu, hoc est, sanguinis circulatione consistit. Sed quid singulis enumerandis morer? Cum res omnes ex motu nascuntur.

Scientia igitur de Motu, ad rite Philosophandum adeo est necessaria, ut ne vel minimum naturæ opus absque eo investigari possit. Hinc celebre & verissimum illud Philosophi effatum, Αναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς κινήσεως ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν. *Ignorato Motu Naturam ignorari necesse est.*

De motus natura, causis, & communicatione, multum inter se disceptarunt Physici seu potius Metaphysici; & mirum est quantas lites, de re satis clara, moverunt; & quæ Idearum confusio, quæ tenebræ inde subortæ sunt, adeo ut inter disputandi ineptias, naturalis & simplex, quam de eo habuerunt notitia, ipsis elabi videatur. Vix enim è plebe quemquam, aut rudem artificem inveniemus, qui non plus novit de verâ naturâ, atque causa motus quam omnes hi disputantes Philosophi; quorum quidem aliqui eo pervenerunt insaniæ, ut motum omnem tanquam rem impossibilem à corporibus sustulerint, & argutias quasdam proposuerint, quibus illius impossibilitatem adstruere sibi visi sunt.

Liceat hic validiora quædam illorum argumenta proferre; & primum ſit illud *Diodori Croni:* Nempe, ſi corpus moveatur, vel movetur in loco quo eſt, vel in loco quo non eſt, quorum utrumvis eſt impoſſibile; ſi enim movetur in loco quo eſt, ab illo loco nunquam exiret, adeoque nullus daretur motus: ſimiliter non poteſt moveri in loco quo non eſt, quia nihil agit in loco quo non eſt, ergo non omnino movebitur corpus. Reſpondeo, nec corpus moveri in loco quo eſt, nec in loco quo non eſt, ſed moveri è loco in locum.

Secundum argumentum eſt illud *Zenonis*, quod *Achillis* nomine inſignivit, quo Zeno conatur probare, ſi daretur motus, Achillem etſi velociſſimum Teſtudinem animalium tardiſſimam nunquam aſſecuturum: eſt autem ejuſmodi. Ponatur Achillem à teſtudine diſtare per quodvis ſpatium finitum, *v. g.* mille paſſuum, atque eum centies velocius teſtudine moveri ſupponamus: ergo dum Achilles unum percurrit milliare, teſtudo milliaris partem unam centeſimam conficiet, adeoque Achilles teſtudinem nondum eſt aſſecutus; & rurſus dum Achilles partem illam milliaris centeſimam conficit, teſtudo interim per milliaris partem decem-milleſimam reptabit, adeoque nec adhuc teſtudinem erit aſſecutus Achilles. Eodem modo dum Achilles partem illam milliaris decem-milleſimam decurrit, teſtudo per milliaris partem millioneſimam promovebitur, adeoque nec adhuc teſtudinem attingere poteſt: atque ſic progredi licebit in infinitum, nec unquam poteſt teſtudinem captare, ſed ſemper erit aliqua inter Achillem & teſtudinem diſtantia.

Famoſum eſt hoc Zenonis argumentum; ad quod ſolvendum ſcripſerunt quidam integros tractatus: at nos facillime illius nodum diſſolvemus, dicendo milliare una cum milliaris parte centeſima, una cum milliaris parte decem-milleſima, una cum milliaris parte millioneſima, & ſic in infinitum, quantitati finitæ æquipollere: hoc enim ab Arithmeticis demonſtratum eſt, quod ſumma ſeriei cujuſvis quantitatum in quavis proportione Geometrica in infinitum decreſcentium, æquaqualis sit quantitati finitæ; sed milliaris pars $\frac{1}{100}$, una cum parte $\frac{1}{10\ 000}$, una cum parte $\frac{1}{1\ 000\ 000}$, una cum parte $\frac{1}{100\ 000\ 000}$ centum-millionesima, & sic in infinitum, est series quantitatum in proportione Geometrica in infinitum decrescentium, adeoque illius summa, cum sit æqualis quantitati finitæ, à mobili cum data velocitate moto, finito in tempore percurri potest. Ponamus enim Achillem spatio unius horæ milliare peragrasse; ergo & partem milliaris centesimam in parte horæ centesima conficiet, & partem milliaris decem-millesimam, in horæ parte decem-millesima percurret; eodem modo pars milliaris millionesima in parte horæ millionesima peragrabitur, & sic de cæteris. Si igitur hora, una cum horæ parte centesima, una cum horæ parte decem-millesima, una cum horæ parte millionesima, + $\frac{1}{100\ 000\ 000}$, &c. in infinitum; si, inquam, summa hujus seriei in infinitum continuatæ infinito temporis spatio æquipolleret, certum est Achillem testudinem nunquam esse assecuturum in tempore finito: verum cum, ut hactenus dictum est, horæ pars $\frac{1}{100} + \frac{1}{10\ 000} + \frac{1}{1\ 000\ 000}$, &c. sit series quantitatum in proportione Geometrica in infinitum decrescentium, erit illius summa quantitati finitæ æqualis, scil. uni parti horæ nonagesimæ nonæ, ut facillime demonstrari potest: & intra illud temporis spatium omnes, utcunque numero infinitæ, temporis particulæ elabentur. Dicimus igitur Achillem testudinem assecuturum post elapsas horam unam & infinitas illas numero particulas quæ in prædictâ serie continentur; hoc est, post horam unam & horæ partem nonagesimam nonam ad testudinem pertinget; atque sic tollitur vis illius argumenti, quod tanquam insolubile toties jactaverunt illius patroni.

Hoc

Hoc etiam proferri solet contra motum argumentum. Corpus A moveatur à B ad C (positis B & C duobus punctis contiguis) in instanti D: cum movetur A supponitur esse in B, adeoque in eo instanti non potest ad C pervenire, quia scil. ponitur esse in B; & in eodem instanti non potest esse in utroque, quia nihil potest esse simul in duobus locis, hoc est, in eodem instanti; adeoque in instanti quo est in B non potest ad C pervenire: eodem modo in quolibet alio instanti non potest ad C pervenire, quia adhuc ponitur in B, adeoque secundum hujus argumenti authores nunquam ad C pertinget.

Huic argumento facile responderi potest, dicendo A sub initio instantis D, esse in B puncto, at in fine in puncto C; oportet enim ut tempus omne, in quo peragitur motus finitus, habeat initium & finem.

Sed præterea in allato argumento, non pauca assumpta ponuntur, quæ falsa atque impossibilia sunt, *v. g.* cum duo supponuntur puncta contigua. Si per punctum intelligatur pars indivisibilis seu minima quantitas, talia quidem puncta non dari prius demonstravimus; adeoque si huic hypothesi innitatur argumentum, impossibile erit, ut ullam inferat humano intellectui vim, ad motum convellendum. Si vero per puncta intelligantur ipsa puncta Mathematica, qualia scil. sunt linearum termini, sectiones, & contactus, hæc equidem ut possibilia agnosco: impossibile tamen erit ut res quævis in iis moveatur; quicquid enim movetur per spatium movetur, at punctum Mathematicum alii puncto contiguum non potest spatium componere, sed punctum: nam sicut in Arithmetica mille cyphræ, seu nihil millies sumptum, nihilo æquipollet; sic in Geometria mille puncta, vel etiam infinita simul puncta, quantitatem non component, sed puncto seu non quanto æquipollebunt. Unde cum duo puncta contigua tantum puncto æquantur, lubens agnosco non posse motum per ea fieri: At nihil inde sequitur absurdi, motus enim per spatium non tollitur, sed motus per punctum; & absurdum quidem esset si istiusmodi concederetur motus.

Quod

Quod de punctis diximus, idem potest Instantibus accommodari, ostendo ut magnitudines omnes, sic etiam tempus esse in infinitum divisibile, adeoque nullam esse temporis particulam quæ proprie instans dici potest, seu punctum temporis; sicut nulla est pars lineæ quæ cum puncto Geometrico coincidit: & ut infinita puncta non lineam componunt, sed punctum, sic etiam infinita instantia, seu temporis puncta, nulli tempori æquantur. Potest quidem spatium temporis inter diversa instantia dato tempori æquari, at ipsa instantia nulli tempori æqualia erunt: tempus enim non ex instantibus, sed ex partibus quæ sunt tempora componitur; nec motus in instanti sed in tempore peragitur.

Sed hisce nugis valere jussis, ad institutum revertor.

Cum motus de quo acturi sumus sit motus localis, res postulat ut quædam de loco & tempore prius disseramus. Locus distingui solet in internum & externum. Internus locus est spatium quod à corpore locato repletur; externus autem is solus est qui ab Aristotele definitur, & dicitur superficies concava corporis ambientis, & locatum continentis.

Clarius fortasse distinguetur locus, sicut & spatium, in absolutum & relativum. Locus absolutus seu primarius est ea spatii immobilis, permanentis & undique expansi pars, quæ à corpore locato occupatur: locus relativus seu secundarius est apparens ille & sensibilis, qui à sensibus nostris ex situ ad alia corpora definitur. Cum enim spatium ipsum sit ens similare & uniforme, cujus partes videri nequeunt, & per sensus à se invicem distingui, ideo convenit ut corporum loca ad alia corpora referantur, & per distantias & positiones ad alia ista corpora determinentur, *v. g.* Ponamus aliquem in angulo quovis domus alicujus sedere; illius locus per distantiam, respectum, & positionem quam habet ad alios angulos, parietes, & circumstantia corpora, quæ tanquam immobilia spectantur, definietur; & quamdiu quisquam eundem situm & distantiam ab hisce corporibus conservat, tamdiu in eodem manere loco videbitur. Sic etiam si quisquam in nave sedeat, sive quiescit navis sive movetur, quamdiu eandem servat distantiam ab omnibus navis partibus quæ tanquam quiescentes spectantur, & eadem manet ad eas omnes positio, idem etiam manebit illius locus relativus.

Quod de loco diximus potest etiam spatio similiter applicari, scil. illud quoque in absolutum & relativum distingui: absolutum dicimus illud, quod sua natura, absque relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile. Relativum autem est quod ad corpora quædam refertur, per quæ determinatur, & mensuratur; cujus nempe partes ad corpora illa eandem semper servant positionem & situm, & quarum distantia ab iis immutata, eadem semper perseverat.

Spatium relativum idem semper magnitudine & figura est cum spatio absoluto, non tamen necesse est ut idem semper numero maneat cum eodem: nam in prædicto navis exemplo, si navis absolute quiescit, in eo quidem casu spatium relativum cum absoluto coincidit, non magnitudine & figura tantum, sed etiam & numero: at si ponamus navem moveri, spatium absolutum quod intra cavitatem navis continetur, erit in diversis locis diversum; at cum ipsa cavitas & figura navis eadem maneat, erit spatii in eâ contenti eadem semper & invariata magnitudo, eadem illius figura, & ejus partes similiter sitæ, ad easdem navis partes eandem semper habent positionem & distantiam, & proinde idem spatium relativum dici debet.

Sic etiam in hypothesi Terræ motæ, spatium quod intra parietes ædificii continetur, etsi, absolutum scil. spectando, semper mutatur, cum tamen eadem manet ædificii cavitas, eadem figura, & omnes spatii contenti partes similes, ad easdem ædificii partes eundem semper conservant situm; imo cum ad spatium aëris nostri relativum, seu etiam ad omnes terræ partes, eandem semper obtinent positionem, spatium illud idem relativum dici potest.

Eodem modo & tempus distingui potest in absolutum & relativum. Tempus absolutum æquabiliter fluit, hoc est, nunquam tardius, nunquam velocius procedit, sed absque omni relatione ad corporis cujuscunque motum, æquo semper

per labitur tenore. Tempus relativum seu apparens est sensibilis durationis cujusvis per motum mensura; cum enim ipsius temporis fluxus æquabilis sensus non afficit, advocandus est in subsidium motus æquabilis, ut mensura aliqua sensibilis quæ illius quantitatem determinet, cujus partes temporis partibus semper respondeant, & proportionales sint: Motus autem ille uniformis, qui ad mensuram temporis adhibendus est, debet esse maxime notabilis, cunctis obvius, & in omnium sensus incurrens, qualis vulgo censetur apparens ille Solis & Lunæ, & reliquorum siderum revolutiones; per quas tempus partimur in horas, dies, menses, & annos. Et sicut ea tempora æqualia judicamus, quæ præterlabuntur dum mobile aliquod æquabili velocitate latum æqualia spatia percurrit, sic æqualia etiam dicenda sunt tempora, quæ fluunt dum Sol, vel Luna, revolutiones suas ad sensum æquales peragunt.

Verum cum, ut hactenus dictum est, temporis fluxus accelerari aut retardari nequit, corpora autem omnia nunc incitatius nunc segnius moveri possunt, nec fortasse datur in rerum natura motus perfecte æquabilis; necesse est ut tempus absolutum sit aliquid à motu vere & realiter distinctum, nec illius natura magis à motu corporum quam ab eorundem quiete dependet. Ponamus enim Coelum & sidera ab ipso Mundi exordio immobilia perstitisse, at non ideo sisti potuit temporis cursus, sed illius quiescentis status duratio æqualis esset tempori quod jam movendo elapsum est. Præterea cum constat ex sacra Historia tempore *Josuæ*, Solem in eodem Coeli visibilis puncto, per aliquod tempus immotum mansisse; non tamen ideo tempus absolutum perstitit, & cum sole rursus progredi coepit, sed eodem quo prius celeri præterlabebatur cursu, quamvis omnia horologia sciaterica eandem diei horam, per omne illud stationis tempus indicabant: & sic quidem substitit tempus apparens ad Solis nempe motum relatum, cum absolutum interim uniformiter progrediebatur.

Sic etiam cum & hodie Solis motus apparens uniformis non est, nec ejus revolutio diurna æquabilis erit, ut omnes

 agno-

agnoscunt Astronomi; sed aliquando celeriore, aliquando lentiore procedit gradu, ac proinde dies naturalis, νυχθήμεροι, seu spatium temporis una revolutione diurna elapsum, nunc minus nunc majus evadet; adeoque tempus apparens non eodem quo tempus absolutum progreditur tenore: unde ut ab illo distinguatur necesse est.

Cum tempus absolutum sit Quantum uniformiter extensum & sua natura simplicissimum, potest per magnitudines simplicissimas rite repræsentari, seu imaginationi nostræ proponi: quales imprimis videntur esse rectæ lineæ & circulares, quibuscum & tempori quædam intercedunt analogiæ: Nam tam temporis, quam rectarum & circularium linearum, partes omnes sunt sibi ubique similes & uniformes; & sicut linea per motum seu fluxum puncti generatur, cujus quantitas ab unica pendet longitudine per motum determinata; sic etiam tempus quodammodo censeri potest instantis continuo labentis vestigium, cujus quantitas ab unica profluit velut in longum exporrecta successione, quam spatii percursi longitudo demonstrat; & proinde optime per fluxum puncti seu rectam lineam repræsentari potest, quod in sequentibus sæpius fiet.

Observandum autem nos per Temporis vocem intelligere spatium illud temporis quo motus transigitur; adeoque cum de rebus Physicis & motu agendum est, rite cum *Aristotele* definiri potest, *Mensura motus secundum prius & posterius*; non quidem absolutam temporis naturam spectando, sed connexionem illam quam motus cum eo habet, ut scil. nullum spatium à mobili in instanti percurri possit, sed successive & juxta fluxum temporis omnis motus peragatur, qui igitur cum temporis quantitate comparari potest & ab ejus fluxu mensurari.

LECTIO VII.

DEFINITIONES.

I. *MOTUS est continua & successiva loci mutatio.*

II. *Celeritas est affectio motus, quâ mobile datum spatium in dato tempore percurrit.*

III. *Quies autem est corporis cujusvis in eodem loco permanentia.*

Hinc sequitur quietem, motum & celeritatem, secundum duplicem loci distinctionem, duplices esse, absolutos scil. & relativos.

IV. *Motus absolutus est mutatio loci absoluti, & illius celeritas secundum spatium absolutum mensuratur.*

V. *Quies absoluta est permanentia corporis in eodem loco absoluto.*

VI. *Motus relativus est mutatio loci relativi, cujus celeritas secundum spatium relativum mensuratur.*

VII. *Quies vero relativa est permanentia corporis in eodem loco relativo.*

Ex hisce sequitur, Primo, posse aliquem relative quiescere, qui tamen secundum spatium absolutum vere & absolute movetur; *v. g.* Si aliquis in nave sedeat, cum eundem retinet locum relativum, eundem servat situm & distantiam ad reliquas navis partes, quæ tanquam quiescentes spectantur, ille relative quiescit; cum tamen interea eodem provehitur motu, eadem celeritate, & secundum eandem plagam, qua ipsa navis à ventis defertur; in quo casu, omnes navis partes eundem inter se situm servantes spectatori intra navem posito tanquam quiescentes apparebunt: è contra, dum ipsa navis movetur, spectatori in navi locato, littora aliaque corpora extra navem circumjacentia moveri videbuntur, ea celeritate, at versus contrariam plagam, qua ad ea revera accedit navis, vel ab iisdem recedit. Hujus apparentiæ ratio ex principiis Opticis facile ostenditur: Ea enim corpora ut quiescentia videmus, quæ ad ipsum oculum easdem semper servant positiones & distantias; quæ autem moveri videmus corpora, ea distantias suas & positiones oculi respectu mutare deprehendimus; vel ut paulo altius rem deducamus.

Cum Optica nos doceat omne corpus quod videtur, imaginem suam, ope radiorum à visibili prodeuntium, in ipso fundo oculi seu in retina depictam habere; sequitur, ut ea objecta moveri videantur, quorum imagines in retina moventur; hoc est, quæ diversas retinæ partes successive pertranseunt, dum quis oculum suum immotum supponit: at ea objecta tanquam quiescentia cernuntur, quorum imagines eandem semper occupant retinæ partem, cum scil. imaginum motus in oculi fundo non sentitur. Atque hinc est, quod in nave sedentes ipsius navis motum non percipiant; omnes quippe navis partes inter se relative quiescentes eandem positionem & distantiam quoad oculum servantes, imagines suas in iisdem retinæ partibus semper depictas habebunt; earum igitur motus non videbitur: at cum ad littora oculos vertat spectator, dum ipsa navis movetur, necesse est ut objectum quodlibet externum situm suum oculi respectu mutet, & proinde ejus imago alias atque alias retinæ partes successive occupabit; hoc est, objectum externum moveri videbitur. Ob eandem rationem, si Terra circa Solem vel suum axem moveatur, illius motus ab ipsius terræ incolis neutiquam percipietur, cum scil. ædificia & omnia in terra objecta visibilia iisdem semper terræ partibus insidentia, eandem semper inter se & oculum positionem servabunt; sin astra aliaque omnia corpora terræ non adhærentia adspiciantur, ea ob eandem causam, qua prius littora, moveri videbuntur; hoc est, si terra circa suum axem rotetur ab occidente in orientem, Sol & reliqua sidera ab oriente in occidentem moveri conspicientur.

Sed Terræ motu paulisper dimisso, ad exemplum Navis redeamus; si navis secundum quamcunque directionem feratur *v. g.* versus orientem, & aliquis in prora sedens lapidem versus occidentem eadem velocitate projiciat, qua ipsa navis ad orientem progreditur; lapis in hoc casu spectatori intra navem moveri videbitur versus occidentem, & ejus velolocitas relativa æqualis erit ipsius navis celeritati absolutæ; revera tamen lapis quiescet in spatio absoluto, abstrahendo à terræ motu & eo omni qui ex gravitate oriri potest. Et si ponamus aliquem extra navem in aëre pendulum, ille lapidem quiescentem spectabit; cum vero gravis sit lapis, videbit illum perpendiculariter tantum deorsum motum, nec magis versus ortum quam occasum tendentem: vis enim à projiciente in lapidem impressa nihil aliud agit, quam destruit æqualem vim motûs, quæ à navi versus contrariam plagam ipsi communicabatur. Moto enim quolibet corpore vel spatio, etiam omnia corpora vel corporum particulæ, intra illud relative quiescentia, eâdem celeritate & secundum eandem plagam moventur.

At objiciat aliquis, lapidem è manu projicientis emissum in ipsam puppim impingere, eique ictum imprimere, adeoque cum lapis in ipsam puppim irruit, non potest non moveri: Respondeo, verum quidem esse eos, qui intra navem versantur, lapidem in puppim irruentem eamque percutientem conspicere; at si ponatur aliquis extra navem in aëre pendulus; ille non lapidem versus puppim, sed puppim in lapidem impingentem videbit; & ictus magnitudo, quæ in utrovis corpore recipitur, eadem omnino erit ac si navis quiesceret, & lapis revera versus puppim impelleretur, eâdem celeritate, qua puppis ad lapidem accedebat. Si enim duo sint corpora A & B utcunque æqualia vel inæqualia; eadem erit percussionis vis, sive B cum data celeritate in corpus A quiescens impingat; vel si quiescat B, & A eâdem celeritate in ipsum irruit; vel si utrumque corpus versus eandem plagam moveretur, & subsequens A celerius motum in ipsum B impingeret; eadem erit quantitas ictus, ac si B omnino quiesceret & A solum latum esset, differentia celeritatum qua scil. ipsius celeritas celeritatem corporis B superabat; vel denique, si tam A quam B versus contrarias partes ferantur, ictus magnitudo eadem fiet, ac si unum quiesceret, & alterum motum esset cum ea celeritate, quæ sit summæ priorum velocitatum æqualis. Verbo dicam, eâdem semper manente velocitate relativa corporum, quâ ad se invicem accedunt, TAB. 2. fig. 4.

ea-

eadem quoque erit percussionis quantitas, quomodocunque veræ velocitates partitæ sint, ut in sequentibus demonstrabitur. Sed rursus ad navem redeamus.

Si vis, qua lapis à projiciente emittitur, minor sit eâ quæ ex navis motu in hoc casu recipitur, lapis ipse revera in eandem, qua ipsa navis, plagam motu scil. absoluto deferetur; hoc est, à spectatore, quem extra navem in aëre consistentem posuimus, versus orientem moveri videbitur, ea celeritate, qua celeritas navis celeritatem motus ab impellentis dextra impressi superabat; at in ipsa navi sedentibus lapis versus occasum moveri apparebit, eâdem prorsus celeritate, quam à projicientis manu accepit, qua etiam in puppim impingere videbitur.

Sed si quis in puppi sedens lapidem versus proram projiciat, verus & absolutus illius motus erit versus proram seu orientem; & à spectatore nostro extra navem posito ea celeritate ferri conspicietur; quæ æqualis sit summæ duarum celeritatum, illius scil. quam à projiciente accepit, & illius quæ per motum navis ipsi communicabatur.

Hæc omnia hypothesi Terræ motæ possunt applicari. Si enim terra solummodo circa axem suum revolvatur ab occidente versus orientem, & lapis vel globus è tormento projiciatur ad occidentem, ea celeritate qua terra circa axem vertitur; impetus, quem globus ex tormento recipit, contrarium impetum, qui ex terra illi imprimebatur, destruet; adeoque in spatio absoluto quiesceret globus, secluso motu ex gravitate orto. Nihilominus qui in terræ superficie degunt & una cum ea revolvuntur, lapidem vel globum versus occasum celeriter ferri conspicient; & si murus aliquis ejus motui apparenti objiciatur, globum vi eâdem murum ferientem videbunt, ac si murus revera quiesceret, & globus contra illum ea celeritate impingeret, quam in eo casu ab explosione reciperet: nam eadem, ut dictum est, erit ictus quantitas, sive globus cum determinata celeritate in murum quiescentem projiciatur, sive murus in globum quiescentem eâdem celeritate irruat.

Si minor sit vis, quæ in globum per bombardæ explosionem

nem imprimitur, eâ quæ per diurnum motum terræ illi communicatur, globus revera versus orientem feretur; at quia ejus velocitas minor est ea, qua nos versus orientem revolvimur, globus à nobis ad occidentem tendere conspicietur; & obstaculum quodcunque ejus motui apparenti oppositum ea vi ferire videbitur, ac si revera obstaculum in eodem spatio absoluto permansisset, & globus in ipsum ea vi, quam à bombarda accepit, impegisset. Si deinceps globus versus orientem explodatur, motus ejus absolutus erit in orientem, & ejus velocitas in tantum superabit velocitatem, qua ipsa tellus fertur, quanta est ea quæ globo per bombardam imprimitur, adeoque eâ solâ velocitatis differentiâ in obstaculum quodcunque irruit, & illud percutiet.

Verum universaliter, corporum in dato spatio inclusorum idem erunt motus inter se, idem congressus, eadem percussionis vis, sive spatium illud quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

Motu, quiete, celeritate, tam absolutis quam relativis, prolixe satis explicatis, ad alios terminos definiendos accedo.

VIII. *Spatium percursum est via illa quæ à corpore motu ipsius peragratur.*

IX. *Illius longitudo est recta illa quæ à centro corporis moti describitur.*

X. *Directio motus est recta quâ tendit mobile.*

XI. *Motus æquabilis fit, quando mobile eadem semper celeritate omnes longitudinis seu spatii percursi partes describit.*

XII *Motus acceleratus est cujus velocitas continuo crescit.*

XIII. *Motus retardatus est cujus velocitas continuo minuitur.*

XIV. *Motus æquabiliter acceleratus est, cui temporibus semper æqualibus æqualia accedunt velocitatis incrementa.*

XV. *Motus æquabiliter retardatus est, cujus velocitas temporibus æqualibus ad quietem usque æqualiter decrescit.*

XVI. *Momentum (quod & quantitas motus, sæpe etiam simpliciter Motus dici solet) est potentia seu vis illa corporibus motis insita, quâ è locis suis continuo tendunt.*

XVII. *Impedimentum vero est quod motui obstat vel resistit, atque illum destruit vel saltem minuit.*

XVIII. *Vis motrix est potentia agentis ad motum efficiendum.*

XIX. *Vis impressa est actio in corpus exercita, ad ejus statum vel motus vel quietis mutandum.*

Si corpus A quiescat & movendum sit cum data celeritate, vis illa quæ ipsi imprimitur, quaque accepta cum data velocitate moveri incipit, dicitur Vis impressa; in quo casu à Vi motrici non nisi in concipiendi modo differt: Eadem enim vis quatenus ab agente procedit, dicitur Vis motrix, & quatenus à patiente recipitur, dicitur Vis impressa. Sic etiam, si corpus B moveatur, quædam determinata requiritur vis ad illius motum minuendum, & quædam etiam determinata vis necessario habenda est ad illius motum omnino sistendum; quæ cum in corpus B exercetur, Vis impressa dicitur.

Non ignoro quosdam Philosophos quantitatem motus ab illius celeritate non distinguere; ea quippe corpora æquales motus habere dicunt, quæ æquali celeritate moventur, sive ipsa corpora æqualia sive inæqualia existant, sive unum sit exiguum admodum, alterum vero utcunque magnum; modo eâdem velocitate utrumque corpus latum sit, in utroque semper eandem motus quantitatem permanere volunt. At non ratio solum, verum & experientia docet motum non modo augeri in ratione velocitatis, sed & etiam in ratione molis seu magnitudinis, positis corporibus homogeneis seu ejusdem speciei; *v. g.* Sint duo corpora A & B, quorum A majus corpus, & B minus; & momentum seu quantitas motus ipsius A non tantum majus erit momento ipsius B, si A velocius feratur ipso B; verum si utrumque æquali celeritate feratur, erit vis seu energia, qua corpus majus A fertur, major ea quam habet corpus B ad suum locum mutandum; quia scil. vis contraria obstaculi vel impedimenti major requiritur ad sistendum motum majoris corporis A, quam ea quæ necessaria est ad motum corporis minoris B tollendum: quippe, si sit corpus A centum librarum, pondus vero

Tab. 2. fig. 4.

vero ipsius B unius libræ, & si æqualis sit in utroque corpore celeritas, vis quam corpus A exercet, quaque obstaculum quodvis removere conabitur (& proinde vis impedimenti retinentis & motum illius destruentis) multo major erit vi motûs corporis B, qua scil. impedimentum removere nititur; & illius impedimenti vis, quæ necessario requiritur ad motum ipsius B destruendum, minor erit vi impedimenti quæ sufficiens erit ad motum mobilis A auferendum. Verum in sequentibus Theoremata dabimus, quibus motûs quantitas æstimari & ejus mensura determinari potest.

XX. *Vires motrices æquales sunt, quæ similiter agentes æquales motuum quantitates in dato tempore producunt.*

XXI. *Vires contrariæ sunt quarum lineæ directionis sunt contrariæ.*

XXII. *Gravitas est vis ferens deorsum, qua corpora rectà ad terram tendunt.*

XXIII. *Vis centripeta est vis illa, qua corpus ad punctum aliquod tanquâm centrum continuo urgetur; atque hinc sequitur gravitatem esse vim quandam centripetam*

XXIV. *Per vim centrifugam autem intelligimus vim, qua corpus aliquod continuo urgetur, ut à centro recedat.*

Vires autem hæ semper æstimantur per vires contrarias, quæ corpora in eodem statu retinere possunt; sic si corpus aliquod filo alligatum circa centrum immobile revolvatur, vis, qua à centro recedere conatur, est Vis centrifuga; actio autem fili renitentis & corpus versus centrum continuo retrahentis, qua fit ut corpus in eodem semper circulo retineatur, erit tanquam Vis centripeta vi centrifugæ æqualis, adeoque harum virium una per alteram rite æstimari potest. Sic etiam vis gravitatis alicujus corporis innotescit per vim ipsi contrariam & æqualem, qua ipsius descensus impediri potest. Potest autem vis illa vel esse alterius corporis pondus (per mechanicum aliquod instrumentum *e. g.* libram) contrarie agentis; vel vis centrifuga quæ orietur, si corpus illud cum certa quadam & determinata velocitate in circulo circa centrum Terræ revolvatur; vel denique potest esse alterius corporis firmitudo & resistentia supra quod pondus premens incumbit.

XXV. *Quantitas acceleratrix cujusvis Vis est mensura velocitatis quam in dato tempore vis illa generat.*

In eâdem à Terra distantia corpora omnia utcunque inæqualium ponderum æquivelociter descendunt, & proinde æquales sunt ipsorum vires acceleratrices; in distantiis autem inæqualibus inæqualiter, in majori scil. minus, in minore magis, accelerantur.

LECTIO VIII.

FINITIS definitionibus, ad res minus claras vel terminos minus usitatos explicandos inservientibus, ad Axiomata physica accedimus. Cum autem philosophiæ naturalis objectum sint corpora corporumque in se invicem actiones, quæ non tam facile & distincte concipiuntur, quam simplices illæ magnitudinum species de quibus tractat Geometria; nollem ut quisquam in materia physica, tam rigida demonstrandi methodo insistat, ut principia demonstrationum, hoc est, axiomata adeo clara & per se evidentia postulet, ac illa sunt quæ in Geometriæ elementis traduntur: talia quidem dari rei natura non permittit. Verum sufficiat si ea adhibeantur, quæ rationi & experientiæ congrua esse deprehendimus, quorum veritas primo quasi intuitu elucet, quæ sibi ipsis fidem apud non obstinatos conciliant, & quibus assensum suum nemo denegabit, nisi se omnino Scepticum profiteatur.

Verum etiam in demonstrationibus, laxiore aliquando argumentationis genere utendum est, & propositiones adhibendæ sunt non absolute veræ, sed ad veritatem quam proxime accedentes, *e.g.* Cum demonstratur omnes ejusdem Penduli Vibrationes in arcubus circuli minoribus factas, æquidiuturnas fore. Supponitur arcum circuli parvum ipsiusque chordam esse declivitatis & longitudinis ejusdem, quod tamen, si rigidam veritatem spectemus, admittendum non est: at in physica, hæc hypothesis tantillum à vero abludit; ut differentia merito sit negligenda, & discrepantia vibrationum quæ

ex

ex illa differentia oritur omnino insensibilis evadit, uti experientia testatur. Sic etiam insignis Philosophus & Geometra *D. Gregorius*, in *Elementis Catoptricis & Dioptricis*, laxiorem Geometriam adhibet, lineas & angulos tanquam æquales assumendo, qui revera inæquales ad æqualitatem quam proxime accedunt. Atque sic pulcherrima solvit problemata physica quæ alias intricatissima futura sunt. Sed etiam ipsi *Newtono* aliquando arridet hæc methodus; ut videre est *in Prop. 3. lib. 2. Philosophiæ Naturalis Princip. Math.*

Si qui vero sint qui contra istiusmodi principia & demonstrationes pertinacem obfirmant animum & propositionibus satis manifestis se expugnari non patiuntur, hos ut supinâ suâ ignorantiâ gaudeant relinquimus, nec dignos esse qui ad veram Physicam admittantur censemus.

AXIOMATA.

I. *Non entis aut nihili nullæ sunt proprietates aut affectiones.*

II. *Nullum Corpus potest naturaliter in nihilum abire.*

III. *Omnis mutatio corpori naturali inducta ab agente externo procedit; corpus enim omne est iners materiæ moles, & nullam sibi ipsi mutationem inducere valet.*

IV. *Effectus sunt causis suis adæquatis proportionales.*

V. *Causæ rerum naturalium eæ sunt, quæ simplicissimæ sunt, & Phænomenis explicandis sufficiunt: nam Natura methodo simplicissimâ & maxime expeditâ semper progreditur; hisce enim operandi modis se melius prodit Sapientia Divina.*

VI. *Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt causæ; ut descensus lapidis & ligni ab eâdem causâ procedit; eadem quoque est causa lucis & caloris in Sole & in igne culinari; reflexionis lucis in Terra & Planetis.*

VII. *Quæ duæ res ita inter se connexæ sunt, ut sese perpetuo comitentur, & quarum unâ mutatâ vel sublatâ, altera quoque similiter mutetur vel tollatur, vel harum una alterius causa est, vel utraque ab eadem causa communi provenit.*

Sic si sit Acus magnetica circa axem versatilis, cui Magnes admoveatur & circa eandem revolvatur; acus etiam continuo eodem tenore movebitur, & si sistatur magnetis motus, subsistet quoque ipsius acûs circulatio, & rursus cum ipso magnete revolvi incipiet: unde nemo dubitat quin acûs vertigo ab ipsius magnetis motu dependeat. Sic etiam cum fluxus & refluxus maris in eodem loco semper fiat, scil. cum Luna ad eundem circulum horarium pervenerit, & ejus motum continuo comitetur; periodus nempe æstuum periodo motuum lunarium ita præcise respondet, ut nulla à tot seculis notata sit aberratio: retardatur enim minutis 48. in singulos dies; & in syzygiis Lunæ cum Sole semper fit æstus maximus, in Quadraturis minimus; unde agnoscendum est maris fluxum à motu Lunæ & ipsius situ respectu Solis pendere.

VIII. *Moto corpore quovis secundum quamcunque plagam, omnes ejusdem particulæ, quæ in ipso relative quiescunt, eadem velocitate simul secundum eandem plagam progrediuntur; hoc est, moto loco relativo movebitur quoque locatum.*

IX. *Æquales materiæ quantitates eâdem velocitate latæ æqualia habebunt momenta seu motuum quantitates.*

Nam momentum cujusque corporis est summa momentorum omnium particularum corpus illud componentium; & proinde ubi æquales sunt particularum magnitudines & numeri, æqualia erunt momenta.

X. *Vires æquales & contrariæ in idem corpus agentes mutuum effectum tollunt.*

XI. *Ab inæqualibus autem & contrariis viribus producitur motus æquipollens excessui præpollentis.*

XII. *Motus à viribus conspirantibus, hoc est, secundum eandem directionem agentibus, productus æquipollet earundem summæ.*

XIII. *Æquipollens si vel augeatur vel contrarium minuatur fit præpollens.*

Qui mechanice Philosophari volunt duo sequentia adhibent Effata.

XIV. *Omnis Materia est ejusdem ubique naturæ, & eadem habet essentialia attributa, sive in Cœlis sit, sive in Terris, sive appareat sub forma corporis fluidi, sive duri aut alterius cujusvis;*

jusvis; hoc est, materia cujusvis corporis, e. g. *ligni, à materia alterius cujusvis non essentialiter differt.*

XV. *Diversæ autem corporum formæ non sunt nisi diversæ modificationes ejusdem materiæ; & à variâ particularum corpora componentium magnitudine, figura, textura, positione & cæteris modis pendent.*

XVI. *Sic etiam qualitates seu actiones vel potentiæ quorundam corporum in alia corpora oriuntur solum ex prioribus affectionibus & motu conjunctim.*

Ponunt autem Philosophi Materiam esse omnium formarum & qualitatum commune substratum, quæ ad omnes se indifferenter habet, cum sit omnium capax, & eadem semper manet sub quibuscunque appareat formis, unde & â Peripateticis materia prima nuncupatur.

Quamvis vero formæ & qualitates ipsi materiæ sunt prorsus accidentales, ad corpus tamen, quod ex forma & materia simul junctis coalescit, necessario & essentialiter pertinent; *v. g.* quamvis materia ligni prorsus sit indifferens ad hanc vel illam formam seu particularum figuram & texturam, quibus infinitis modis variatis eadem semper manet; non tamen potest lignum subsistere sine determinata illa particularum modificatione, quæ formam lignei corporis constituit, qua sublata perit lignum, & eadem materia in alterius generis corpus transit. Quod autem in particularum modificatione forma corporis lignei consistit, patet ubi lignum igni immittitur, & materia formâ illâ privatur: nam per vim ignis dissolvitur particularum nexus & textura, & harum pars quædam in fumum & vapores transit, altera in cineres reducitur.

Multa à Philosophis proferuntur exempla, ut ostendant varias particularum ejusdem materiæ magnitudines, figuras & texturas, varias producere corporum formas, & ex variis etiam ipsarum motu & positione, varias oriri qualitates; quorum aliqua hic adducemus.

Primo, cum per calorem solis aquæ particulæ rarefiant, ex mari ad supremum fere aëra sub forma vaporum evehuntur; at recens hæc forma non aliunde provenit quam ex par-

tium

tium mutato situ: per rarefactionem autem fit, ut aqueæ particulæ plura & patentiora forte contineant in se spatiola, vel omnino vacua, vel purissimo tantum æthere repleta: unde harum materia majus occupans spatium, quam æqualis materiæ aëriæ quantitas, aëre redditur minus intensive gravis, & proinde sursum trudetur, eodem modo quo suber sub aqua demersum: nec unquam consistunt vapores donec ad aërem ejusdem gravitatis perveniunt, ubi relative quiescunt, & nubes mille figuras induentes componunt.

Mox ubi per ventorum cursum aër minus gravis redditur, vapores eandem retinentes gravitatem necessario subsident, & in casu suo per aëris resistentiam condensati, & in minus spatium coacti formam priorem amittunt, & in terram cadentes pluviæ speciem recipiunt.

Multo maxima hujus pars per fluvios ad mare deducitur, iterum in vapores abitura; pars vero aliqua terræ se immiscet, & ibi deposita arborum herbarumque radices & semina ingreditur, è quibus in alias plane & novas corporum species assurgit. Et eadem quidem pluvialis aqua diversa corpora componit, prout diversa ingreditur rerum semina; quædam scil. transit in plantagines, quædam in gramina, aliqua in flores, aliqua in quercus, ornos, fagos, & alias quamplurimas arborum & plantarum species.

Nec in eâdem planta omnino similaris manet eadem pluvia, cum plantæ omnes ex innumeris heterogeneis constent partibus; sic in lino *e. g.* alia est forma radicis, alia caulis, alia tenuium fibrarum, alia florum, alia seminis, alia capsularum semen continentium.

Varia quoque est in eodem lino vasorum structura, (non aliter enim ac in corpore animato, quælibet planta sua habet vasa humorum circulationi inservientia) sed & diversis omnino gaudent hæ partes proprietatibus: caulis *e. g* est corpus lignosum & post exsiccationem valde friabile, dum cortex seu membranula caulem operiens, ex oblongis tenuissimis & plicabilibus constat fibris varie inter se connexis.

Hanc membranam à caule sua separant linifices, & postquam mille tractaverunt modis, fibras ejus in oblonga contorquent

torquent fila; mutataque particularum positione & situ, aliam sane & longe diversam subeunt fibrillæ formam ab ea, quam in viridi habebant planta.

Mox in se convoluta fila, iisdem manentibus particulis ipsorum minimis, glomorum species præbent. Fila hæc varie inter se connectunt & texunt linteones, & arte suâ telas ex illis componunt, quæ vestimenta hominibus præbent. Hæc denique in linteola redacta aquæ immittuntur, & malleis ligneis in mollem quasi pulpam rediguntur, quæ tandem, exsiccato humore aqueo in formam Papyri transmutatur, quæ si igni immittatur partim in tenuissimum pulverem, partim in fumum evanescit.

At hæ omnes tam multifariæ sub quibus eadem materia apparet formæ, non nisi ex particularum mutata figura, magnitudine & textura proveniunt, & ab his solummodo pendent.

Sic si metalla liquantur, ignis vi partium cohærentia dissolvitur, & particulæ metallicæ à se invicem separatæ rapidissimo cientur motu, quo fit ut formam corporis fluidi induant.

Hinc etiam (ut videtur) oritur illa salium & metallorum in menstruis dissolutio; per fermentationem enim separantur partes à se invicem, & in minima resolutæ ipsius fluidi agitantur motu, unde tanquam corpora fluida apparebunt. Ex hisce corporum, ipsorumque partium figuris & reliquis modificationibus plurimi oriuntur effectus, plurimæ qualitates singulis corporum generibus propriæ, quas perire necesse est si partium constitutio mutetur. Sic ex eadem materia *v.g.* ferro formantur claves, cultri, limæ, serræ, & alia innumera instrumenta ad varios usus accommodata, quorum qualitates & effectus ex solis pendent eorundem figuris: unde enim clavi potentia sua ad ostium reserandum, nisi ab ipsius figura, magnitudine, & partium congruitate cum partibus seræ cui immittitur? Unde cuneis & cultris potentia ad corpora findenda? Nonne hanc ex sola ipsarum figura provenire demonstratum est à Mechanicæ scriptoribus? Unde fiunt motus in Automatis tam regula-

L res,

res, nisi ex rotis inter se dispositis, sibi invicem adaptatis & commissis; unde denique fit, ut per machinas artificiales tanti effectus producantur? Certè ratio non aliunde quam ab ipsarum fabrica petenda est.

Nec minus partium suarum constitutioni & modificationi debent corpora naturalia, quam artificialia: omnes enim ipsorum operationes non nisi ex motu, situ, ordine, figura, & positione corpusculorum proveniunt, quibus in quovis corpore mutatis, mutantur etiam eo ipso istius corporis qualitates.

Si corporis superficies sit scabra & aspera, Lucem in ipsam incidentem undequaque reflectit, propterea quod partes superficiales lucem excipientes & remittentes non omnes in una atque eadem superficie regulari, sed infinitis fere iisque diversis locantur planis: unde lucem in varia hæc plana incidentem undique etiam reflecti necesse est. Hinc glacies, quæ cum integra & polita sit nullius fere est coloris, in partes tamen contusa, seu asperam & angulosam habens superficiem, alba apparet, scil. cum lumen copiose & in omnes partes reflectit. Eadem quoque est ratio albescentis aquæ cum in spumam vertitur.

Ea autem est plerorumque corporum visibilium structura, ut eorum superficies partem radiorum in se incidentem suffocare, partem remittere possint. Si superficies ita sint comparatæ, ut omnia radiorum genera æqualiter reflectant vel æqualiter suffocant, erit illorum color vel albus, vel niger, vel subfuscus, inter album & nigrum medius: nam color albus non aliter differt à nigro, quam quod alba corpora plurimos reflectant omne genus radios, nigra autem paucissimos. Hoc patet ex umbra corporis opaci, quæ sole lucente in parietem album projicitur; pars enim in qua umbra versatur, cum multo pauciores quam reliquæ omnes excipiat radios, multo pauciores quoque reflectit, adeoque reliquarum respectu nigra apparet. At si partes illæ reliquæ non plures reciperent radios, quam ea ubi umbra projicitur, tunc ubique idem foret color, nempe albus.

Si talis sit superficiei textura, ut aliquod radiorum genus rum copiosius, & reliqua omnia parcius, reflectat, superficiei color ad eum accedet qui ex radiis magis copiose reflexis oritur; hoc exinde demonstrari potest, quod ejusdem objecti varius erit color, prout varia excipit radiorum genera, reliquis interceptis, ut primus invenit sagacissimus *Newtonus*. Sic si per trigonum Vitreum radii rubri (sic enim vocitare licet colorem rubrum producentes) in objectum cæruleum projiciantur, objectum suum mutabit colorem, & rubrum induet; sin flavos tantum excipiat radios, tunc ejus color in flavedinem vertetur; si cærulei incidant radii, cæruleus apparebit, & color ille cæteris omnibus coloribus vividior erit, eo quod horum radiorum multo plures reflectit, & pauciores suffocat quam reliquorum.

Si superficies corporis sit exacte polita, hoc est, nulla asperitate & scabritie impedita, & radios satis confertos reflectat; hæc radios ab objecto quovis prodeuntes, & in ipsam incidentes ita reflectet, ut objecti illius imaginem conspiciendam præbeat: & ob eam causam corpora istiusmodi superficies habentia *Specula* vocantur. Si speculum sit planum, imago erit objecto æqualis, & pone speculum invenietur, ad distantiam æqualem ei quam habet radians ante ipsum; si superficies sit concava sphærica, & objectum radians magis distet ab ipso quam $\frac{1}{4}$ diametri sphæræ, imago in aëre pendula inter radians & speculum apparebit, & ipso quidem objecto minor erit; si radians in centro locetur, ibi quoque erit ejus imago ipsi æqualis; si ultra centrum versus speculum progreditur radians, ita scil. ut major sit ipsius distantia ab eo quam $\frac{1}{4}$ diametri, imago à speculo ultra centrum transcurret, & radiante major erit: cum autem radians ad distantiam æqualem $\frac{1}{4}$ diametri pervenerit, tum imaginis distantia infinita evadit; si autem tantillo propius ad speculum accedat, imago erit pone speculum ipso radiante major. Omnia hæc tam diversa Phænomena ex sola mutata distantia proveniunt, cæteris omnibus in eodem statu manentibus.

Videamus jam varios & illos prorsus contrarios effectus, qui ex solo mutato situ seu positione oriuntur, aliis rebus

 omni-

omnibus in eodem ſtatu exiſtentibus, præter ea quæ ex mutatione ſitus dependent.

Omnes jam agnoſcunt Philoſophi Solem in centro hujus Syſtematis quieſcere, Terram autem, reliquorum planetarum inſtar, circa ipſum ſpatio annuo deferri; ita autem Terra circa Solem movetur, ut axis ejus non ad orbitæ ſuæ planum normalis, ſed ad ipſum inclinatus angulo 66½ *gr.* ſibi ſemper parallelus maneat. Et propter hunc paralleliſmum & inclinationem, neceſſe eſt, ut Terra aliquando unum ipſius polum Soli obvertat, aliquando alterum, & proinde Terræ partes omnes varios ſubibunt ad Solem ſitus. Ex hac ſitus mutatione dependent omnes illæ tempeſtatum viciſſitudines, quæ ſingulis annis obveniunt, ſcil. æſtas, hyems, ver & autumnus: ſi enim axis Terræ ad planum ſuæ orbitæ normalis eſſet, tunc nullæ forent temporum mutationes, nullæ dierum & noctium differentiæ, ſed quælibet Terræ pars radiorum Solarium æquales vires eodem ſemper exciperet modo.

Cum autem ſingulæ Terræ partes Solis reſpectu ſitum ſuum continuo mutent, & ejuſdem radios nunc magis obliquos, nunc minus, nunc breviore, nunc diuturniore tempore excipiant, diverſæ & prorſus contrariæ exinde oriuntur phaſes. Autumno ſcil. exareſcunt ſegetes, & fructus matureſcunt, paulatim tamen viridem & amoenam faciem deponunt campi, & decidunt arboribus folia. Mox ingruente hyeme frigent & horrent omnia, nix tegit alta montes, cujus onere depreſſæ laborant ſylvæ; imo quod mirum eſt, ipſæ maris aquæ ſtabiles & firmæ redduntur, quodque prius fuit navibus tantum penetrabile, nunc exercitus & caſtra gerit.

Terrâ autem orbem ſuum continuo percurrente, quælibet ejus pars Solis reſpectu ſitum mutat, & quæ prius averſa, nunc Solem reſpicere incipit; quod dum fit, diffugiunt nives, redeunt gramina campis, & ſua arboribus folia, nec ſtabulis jam gaudet equus, nec arator igne, ſed nova prorſus & læta apparet rerum facies, & annus per æſtatem ad autumnum revertitur.

Cum

Cum jam tot diversi, tot contrarii eveniunt effectus ex sola situs mutatione, & tam varia ex hac consequantur Phænomena, cæteris omnibus causis iisdem manentibus, certe ex positione, distantia, magnitudine, figura & structura partium corpora componentium, ex effluviorum motu & subtilitate, ex corporum congruitate & eorum ad alia corpora respectu; ex hisce inquam omnibus varie & infinitis fere modis junctis & simul combinatis, infinitæ propemodum diversæ provenire possunt corporum formæ, affectiones & in se invicem operationes, nec quicquam in Natura conspiciendum est, quod ex hisce non pendet. Si enim hæc mutentur, mutabuntur simul corporum formæ, qualitates & operationes. *e. g.* Constat attractiones & directiones Magneticas ex partium structura oriri; nam si ictu satis valido magnes percutiatur, quo partium internarum positio mutetur, mutabitur etiam eo ipso Magnetis Polus. Et si igni immittatur Magnes, quo interna partium structura mutetur vel prorsus destruatur, tunc amittit omnem priorem virtutem, & ab aliis vix differt lapidibus.

Etiamsi autem generaliter ostensum sit operationes magneticas ab interna partium constitutione quodammodo provenire, modus tamen operandi, ex mechanicis & intellectu facillimis principiis deductus, non adhuc inventus est. Quodque nonnulli de effluviis, materia subtili, particulis poris magnetis adaptatis, &c. generaliter prædicant, minime nos ad claram & distinctam harum operationum explicationem deducit: sed omnibus hisce non obstantibus virtutes Magneticæ inter occultas qualitates reponendæ sunt.

Ex dictis sequitur, qualitates corporum quæ à formis non pendent, quæque eâdem manente materiæ quantitate intendi & remitti nequeunt, sed omnibus insunt corporum generibus in quibus experimenta instituere liceat, esse qualitates omnium corporum universales. Cum enim ex forma seu modificationibus corporum non proveniant, oportet ut ab ipsa dependeant materia: sed cum omnis materiæ eadem sit natura, & pars ipsius quævis ab alia non nisi per modos differat, erunt qualitates ex hisce modis non productæ in omnia materia eædem.

LECTIO IX.

Theoremata de Motus Quantitate & Spatiis à mobilibus percursis.

THEOR. I.

IN comparandis corporum motibus, si mobilium quantitates materiæ æquales sint, erunt momenta seu motuum quantitates, ut velocitates.

TAB. 2. fig. 5. Sint A & B duo mobilia æquales habentia materiæ quantitates, & moveatur A celeritate C, B vero celeritate *c*; dico momentum seu quantitatem motûs in mobili A, esse ad momentum seu quantitatem motûs in mobili B, ut celeritas C ad celeritatem *c*: Si enim vis aliqua imprimenda sit corpori A, ad illud movendum cum data velocitate C, dupla habenda est vis ad movendum corpus B cum dupla velocitate, & tripla adhibenda est vis ad illud movendum cum tripla velocitate, & dimidia tantum vis necessaria est ad movendum B cum dimidia velocitate, & sic de cæteris multiplicibus vel submultiplicibus; *i. e.* cum (per Axioma quartum) effectus sint causis suis adæquatis proportionales, si vis, quæ adhibetur ad corpus B movendum, sit dupla istius quæ applicatur ad A movendum, erit quoque illius momentum hujus momenti duplum; si tripla habenda est vis, erit quoque motus corporis B motûs ipsius A triplus; si dimidia tantum vis corpori B imprimatur, erit ejus momentum dimidium momenti ipsius A: hoc est, cum velocitas corporis A sit universaliter ad velocitatem ipsius B, ut vis impressa corpori A ad vim ipsi B impressam; & ut vis impressa mobili A ad vim impressam corpori B, ita momentum seu quantitas motûs in A ad momentum seu quantitatem motûs in B; erit velocitas mobilis A ad velocitatem mobilis B ut motus ipsius A ad motum mobilis B. Q. E. D.

Cor. Si momenta sint ut velocitates, erunt quantitates materiæ in corporibus motis æquales.

THEOR. II.

In comparatis motibus, si celeritates sint æquales, erunt corporum momenta seu motuum quantitates, ut quantitates materiæ

riæ in iisdem; vel si mobilia sint homogenea, ut ipsorum magnitudines.

Sint duo mobilia A & B, quorum utrumque feratur eadem celeritate C; dico momentum corporis A esse ad momentum corporis B, ut quantitas materiæ ipsius A ad quantitatem materiæ ipsius B. Si enim materiæ quantitas in A dupla sit istius quæ est in B, dividi potest A in duas partes, quarum utralibet tantum habebit materiæ, ac proinde (per Axioma 9) tantum motus, quantum habet B; cum scil. eadem velocitate utrumque corpus feratur: adeoque erit momentum corporis A momenti corporis B duplum. Si materiæ quantitas in A tripla sit ejus quæ est in B, dividi potest A in tres partes, quarum unaquæque habebit motus quantitatem, æqualem ei quæ est in B; & universaliter, quamcunque proportionem habet materia in A ad materiam in B, eandem habebit rationem momentum ipsius A, ad momentum ipsius B, si modo eadem velocitate utrumque corpus latum fuerit. TAB. 2. *fig.* 4.

Si corpora homogenea sint, erunt quantitates materiæ ut ipsorum magnitudines seu moles, ac proinde ipsorum motus erunt etiam in eadem magnitudinum ratione.

Cor. Si momenta sint ut quantitates materiæ, erunt celeritates corporum æquales.

THEOR. III.

In comparatis motibus quorumcunque corporum, momentorum ratio componitur ex rationibus quantitatum materiæ & celeritatum.

Sint duo mobilia quæcunque A & B, & moveatur A celeritate C, B vero celeritate *c*; dico momentum ipsius A esse ad momentum ipsius B, in ratione composita ex ratione quantitatis materiæ in A ad quantitatem materiæ in B, & ratione celeritatis corporis A ad celeritatem corporis B. Ponatur corpus tertium G, quod materiam habeat æqualem ei quæ est in A, sed moveatur celeritate corporis B. Constat ex Elementis rationem momenti corporis A ad momentum corporis B, compositam esse ex ratione momenti corporis A, ad momentum corporis G, & ratione momenti corporis G ad momen- TAB. 2. *fig.* 6.

momentum corporis B: sed (per Theor. 1.) momentum corporis A est ad momentum corporis G, ut celeritas C est ad celeritatem *c*; & cum G & B eadem celeritate feruntur, momentum corporis G erit ad momentum corporis B, ut materiæ quantitas in G vel A ad quantitatem materiæ in B. Ideoque erit quoque momentum corporis A ad momentum corporis B, in ratione composita celeritatis C ad celeritatem *c*, & quantitatis materiæ in A vel G ad quantitatem materiæ in B. Q. E. D.

Cor. 1. Si corpora sint homogenea, momentorum ratio erit composita ex ratione magnitudinum & celeritatum.

Tab. 2. *fig.* 7. *Cor.* 2. Si fiat ut A ad B, hoc est, ut materiæ quantitas in A ad quantitatem materiæ in B, ita recta D ad rectam E, & compleantur rectangula sub D & C, & sub E & *c*, erit momentum mobilis A ad momentum mobilis B, ut rectangulum DC ad rectangulum E*c*.

Nam quia est ut A ad B ita D ad E, erit ratio composita ex rationibus A ad B & C ad *c*, æqualis rationi compositæ ex rationibus D ad E & C ad *c*; sed (per 23. El. 6.) ratio composita ex rationibus D ad E & C ad *c*, æqualis est rationi rectanguli DC ad rectangulum E*c*: & (per Theor. hoc tertium) ratio momenti mobilis A ad momentum mobilis B æqualis est rationi compositæ ex rationibus A ad B seu D ad E & C ad *c*; quare erit ut rectangulum DC ad rectangulum E*c*, ita momentum mobilis A ad momentum mobilis B. Cujusvis igitur corporis momentum considerari potest tanquam rectangulum factum ex ductu molis, vel quantitatis materiæ in eodem contentæ, in ejusdem celeritatem.

Cor. 3. Quare quæcunque demonstrata sunt de horum rectangulorum proportione, eadem quoque vera erunt de corporum momentis hisce rectangulis proportionalibus; *v. g.* Si sit ut D ad E, vel ut A ad B, ita *c* ad C, erunt in eo casu mobilium momenta æqualia; rectangula enim parallelogramma latera reciproce proportionalia habentia sunt æqualia (per 14. El. 6.) & è contra, si rectangula sint æqualia, erunt latera reciproce proportionalia; hoc est, si quantitates materiæ, seu in corporibus ejusdem generis, eorundem

dem magnitudines, ſint celeritatibus reciproce proportionales, erunt momenta æqualia; & converſim, ſi momenta ſint æqualia, erit ut materiæ quantitas in uno ad quantitatem materiæ in altero, ita reciproce hujus celeritas ad illius celeritatem; hinc etiam demonſtratur ſequens

THEOR. IV.

In comparatis motibus, celeritatum ratio componitur ex ratione directa momentorum, & reciproca quantitatum materiæ.

Sint duo mobilia A & B, & feratur A celeritate C, B vero celeritate *c*. Dico eſſe C ad *c*, hoc eſt, celeritatem unius A ad celeritatem alterius B, in ratione directa momenti corporis A ad momentum corporis B, & ratione reciproca materiæ in A ad materiam in B. Fiat ut A ad B, ita recta EI ad rectam KG; & fiat IL æqualis C, GH vero æqualis *c*; & compleantur rectangula EL, KH. Per ſuperius dicta, rectangula EL, KH repræſentabunt momenta mobilium A & B reſpective; ad GH applicetur rectangulum HN æquale rectangulo EL. Cum igitur HN æquale ſit EL, erit (per 16. El. 6.) IL ad GH, ut GN ad EI; ſed ratio GN ad EI æqualis eſt rationi GN ad GK, & GK ad EI; hoc eſt, æqualis rationibus rectanguli HN vel EL ad KH rectangulum, & GK ad EI: quare erit celeritas C vel IL ad celeritatem *c* vel GH, in ratione compoſita ex ratione momenti EL ad momentum KH, & materiæ GK ad materiam EI; hoc eſt, velocitas cujuſque corporis ſemper eſt ut illius momentum applicatum ad ejuſdem materiam. Q. E. D. TAB. 2. *fig.* 8. TAB. 2. *fig.* 9.

Simili prorſus ratiocinio colligitur, corporis cujuſque materiam eſſe ſemper ut momentum ad ejuſdem velocitatem applicatum.

Atque hæc de corporum momentis. De proportione ſpatiorum à mobilibus emenſorum ſequentia etiam vulgo demonſtrantur Theoremata.

THEOR. V.

In comparatis motibus, ſi mobilium celeritates ſint æquales, erunt ſpatia ab illis percurſa directe ut tempora quibus peraguntur motus.

Percurrat mobile longitudinem AB, tempore T, motu æqua- TAB. 2. *fig.* 10.

M

quabili & uniformi; item idem vel aliud mobile eadem velocitate latum percurrat longitudinem CD, tempore *t*; dico lineam AB esse ad lineam CD, ut Tempus T ad tempus *t*. Etenim si tempus T sit duplum ipsius *t*, potest illud dividi in duas partes, quarum unaquæque æqualis erit *t*, adeoque singula spatia, æqualibus hisce temporis partibus, eadem celeritate percursa, æqualia erunt spatio percurso in tempore *t*; & duo spatia simul sumpta spatii tempore *t* percursi dupla erunt: eodem modo, si T sit triplum ipsius *t*, dividi potest in tres partes æquales, & spatia singulis hisce temporibus percursa æqualia erunt spatio tempore *t* percurso; ac proinde tria spatia simul sumpta spatii tempore *t* percursi tripla erunt. Idem de aliis multiplicibus & submultiplicibus ostendi potest; quare universaliter, quamcunque proportionem habet T ad *t*, eandem habebit spatium percursum AB ad spatium percursum CD. Q. E. D.

Cor. Si tempora sint ut spatia percursa, celeritates sunt æquales.

THEOR. VI.

In comparatis motibus, si motuum tempora æqualia sint, spatia percursa erunt ut celeritates.

TAB. 2. *fig.* 11. Percurrat mobile aliquod in dato tempore longitudinem AB, celeritate C; & in eodem vel æquali tempore, percurrat idem vel aliud mobile longitudinem DE, celeritate *c*; dico lineam AB esse ad lineam DE, ut celeritas C est ad celeritatem *c*. Si enim celeritas C sit dupla ipsius *c*, erit spatium AB percursum celeritate C duplum spatii DE percursi celeritate *c*; si celeritas C sit tripla ipsius *c*, erit quoque AB longitudo ipsius DE longitudinis tripla; si C sit dimidia ipsius *c*, erit AB ipsius DE dimidia: & universaliter, cum æqualia tempora in percurrendis lineis insumantur, quamcumque proportionem habet celeritas C ad celeritatem *c*, eandem habebit longitudo percursa AB ad longitudinem percursam DE. Q. E. D.

Cor. Si celeritates sint ut spatia percursa, tempora erunt æqualia.

Poterant duo prima Theoremata, item quintum & hoc sex-

ſextum, univerſaliter per æquimultiplicia, *Euclidis* methodo, demonſtrari; verum cum per ſe adeo clara ſint ut inter Axiomata reponi poſſint, vix tanto demonſtrationis apparatu indigent.

THEOR. VII.

Longitudines percurſæ ſunt in ratione compoſita ex rationibus temporum & celeritatum.

Sit linea AB peragrata celeritate C, tempore T; & linea DE celeritate *c*, tempore *t*; dico rationem AB ad DE compoſitam eſſe ex ratione celeritatis C ad celeritatem *c*, & ratione temporis T ad tempus *t*. Ponatur linea FG percurri tempore T, celeritate *c*; conſtat AB eſſe ad DE, in ratione compoſita ex rationibus AB ad FG, & FG ad DE. Sed quia AB & FG eodem tempore percurruntur; erit AB ad FG, ut celeritas C ad celeritatem *c*; cum vero mobilia eadem celeritate deſcribunt lineas FG & DE; erit (per Theor. 6.) FG ad DE, ut T tempus ad *t* tempus; quare cum ratio AB ad DE componitur ex rationibus AB ad FG, & FG ad DE, erit etiam compoſita ex rationibus quæ ſunt hiſce rationibus æquales, nempe ex ratione celeritatis C ad celeritatem *c*, & temporis T ad tempus *t*. TAB. 2. *fig.* 12.

Cor. 1. Si fiat HK æqualis C, HI æqualis T, item MN æqualis *c*, & MO æqualis *t*, & compleantur rectangula parallelogramma HL, MP; erit AB ad DE, ut rectangulum HL ad MP rectangulum; nam (per 23. El. 6.) eſt rectangulum HL ad rectangulum MP, in ratione compoſita ex rationibus HK ad MN, & HI ad MO; ſed (per præcedens Theorema) ſpatium percurſum AB eſt ad ſpatium percurſum DE, in ratione ex iiſdem rationibus compoſita; unde ſpatia hæc percurſa conſiderari poſſunt, tanquam rectangula facta ex temporibus in celeritates ductis. TAB. 2. *fig.* 13.

Cor. 2. Si igitur ſpatia percurſa ſint æqualia, erit quoque rectangulum ſub celeritate & tempore quibus unum ſpatium tranſigitur, æquale rectangulo ſub celeritate & tempore, quibus alterum peragratur ſpatium, & proinde erit ut celeritas ad celeritatem, ita reciproce tempus ad tempus (per 14. El.

El. 6.) hoc eſt, ſi ſpatia percurſa ſint æqualia, tempora erunt reciproce ut celeritates.

THEOR. VIII.

In comparatis motibus, temporum ratio componitur ex directâ ratione longitudinum, & reciproca celeritatum.

Theorema hoc demonſtrari poteſt eodem modo ex præcedenti, quo quartum ſequitur ex tertio; perſpicuitatis autem gratia ſic breviter oſtenditur. Percurratur tempore T longitudo AB, celeritate C; item tempore *t* longitudo DE percurratur, celeritate *c*; dico tempus T eſſe ad tempus *t* in ratione compoſita ex directa ratione longitudinis AB ad longitudinem DE, & reciproca celeritatis C ad celeritatem *c*. Sit K tempus quo percurri poteſt longitudo AB cum celeritate *c*, erit ratio temporis T ad tempus *t* compoſita ex ratione T ad K, & K ad *t*; ſed (per Corol. præcedentis Theor.) eſt ut T ad K ita *c* ad C (cum idem ſpatium utroque tempore percurritur) & ut K ad *t*, ita (per Cor. Theor. 5.) longitudo AB ad longitudinem DE; quare erit T ad *t* in ratione compoſita celeritatis *c* ad celeritatem C, & longitudinis AB ad longitudinem DE; hoc eſt, tempora ſunt in ratione compoſita ex reciproca celeritatum & directa longitudinum. Q. E. D.

Tab. 2. fig. 14.

Eodem modo oſtenditur, celeritates eſſe in ratione directâ longitudinum, & reciprocâ temporum.

Cor. 1. Atque hinc ſequitur, tempus eſſe ut ſpatium percurſum applicatum ad celeritatem.

Cor. 2. Celeritas quoque eſt ut ſpatium percurſum applicatum ad tempus.

Theorema tertium & ſeptimum demonſtrari poſſunt ex univerſali hoc theoremate, nempe:

Si effectus aliqui ex pluribus ſimul cauſis pendeant, ita ſcil. ut augeantur vel diminuantur in eadem ratione, qua augetur aut diminuitur cauſarum aliqua; erunt effectus illi in ratione cauſarum omnium compoſita; hoc eſt, ſi cauſæ A, B, C ſimul agentes producant effectum E, qui cæteris iiſdem manentibus ſemper eſt ut cauſarum quævis; & aliæ cauſæ *a*, *b*, *c*, prioribus reſpective ſimiles & ſimimiliter agentes, producant effectum *e*; erit ut E ad *e* ita A×B×C ad *a*×*b*×*c*. Quod eâdem fere methodo, quam in præcedentibus demonstrationibus adhibuimus, facile ostendi potest.

Ad eundem modum, si idem effectus ex pluribus rebus simul pendeat, quarum aliquæ eundem adjuvant vel augent in ea ratione qua ipsæ augentur; aliquæ vero impediunt vel minuunt in eadem ratione qua augentur; erit effectus semper directe ut causæ adjuvantes, & reciproce ut agentes impedientes vel minuentes.

Theorema septimum stylo *Neuwtoniano* sic demonstratur.

Data celeritate, spatium percursum est ut tempus; & dato tempore, spatium percursum est ut celeritas; quare neutro eorum dato, est ut celeritas & tempus conjunctim.

Sic etiam Theorema octavum ostenditur,

Data celeritate, tempus est directe ut spatium percursum; & dato spatio, tempus est reciproce ut celeritas; quare neutro dato, tempus erit directe ut spatium & reciproce ut celeritas.

Similiter Theorema tertium & quartum exponi possunt, atque hanc methodum nos etiam brevitati studentes interdum usurpabimus.

LECTIO X.

IN Demonstrationibus præcedenti Lectione adhibitis methodum exposuimus, qua res Physicæ ad Geometriam primo, deinde ad Arithmeticam reducendæ sunt; cum enim ibi demonstratur corporum motus esse ut rectangula sub ipsorum celeritate & materia, ex datis cujusvis corporis materia & celeritate, dabitur ejusdem momentum; æquale scil. *facto* ex celeritate corporis in ejusdem quantitatem materiæ; *v. g.* sit corpus A octo partium, B vero partium sex, celeritas ipsius A ut 5, & corporis B celeritas ut 3; erit motus corporis A quadraginta partium, & motus corporis B partium tantum octodecim.

Ita ex datis corporis cujusvis momento & materia, innotescet quoque illius celeritas; nempe si dividatur momentum per ipsius materiam, quotiens exhibebit ejusdem veloci-citatem; ſit enim motus in corpore A partium 40, & ejus materia octo partium; ſit etiam motus in corpore B partium octodecim, & illius materia partium 6; dividendo quadraginta per octo, quotiens quinque exhibebit, velocitatem ſc. mobilis A; & dividendo octodecim per 6, quotiens tria dabit, velocitatem mobilis B.

Cum per exempla res magis eluceſcunt, & numeri ſemper ad praxin ſunt advocandi, ut tyrones ſe melius illis adſueſcant; licebit nobis ſcientiam de motu per numeros quandoque illuſtrare, & Arithmeticam tam ſpecioſam quam numeroſam adhibere; ex ſpecioſa enim Arithmetica eruuntur canones quidem generales, qui poſtea ad numeros particulares ſunt applicandi.

Sic denotet A materiam in quovis dato corpore A, C vero ejuſdem celeritatem, atque ipſius momentum vocetur M; vel potius hæ literæ denotent numeros quantitatibus illis proportionales; erit $C \times A = M$ & $C = \frac{M}{A}$ & $A = \frac{M}{C}$.

Similiter cum ſpatium percurſum ſit ſemper rectangulo ſub celeritate & tempore proportionale; ſi ſpatium dicatur S, tempus T & celeritas C, erit $S = C \times T$; & $C = \frac{S}{T}$; & $T = \frac{S}{C}$; & proinde cum ſit $M = A \times C$, erit quoque $M = \frac{A \times S}{T}$; vel ſi T detur, erit $M = A \times S$; hoc eſt, cujuſque corporis momentum eſt ut ipſius materia ducta in ſpatium ab ipſo in dato tempore percurſum. Alia quamplurima hiſce ſimilia, quæ nonnulli pro motus legibus venditant, ex hactenus demonſtratis deduci poſſunt; at cum ea omnia tyro quivis facile per ſe eruere poteſt, non opus eſt ut hic proferantur.

Ex ſupra demonſtratis conſtat, momentum corporis cujuſcunque oriri ex motu partium ſingularium; nam ſingulis corporis particulis ineſt impetus ſeu vis movendi, & ex harum virium ſumma componitur impetus ſeu quantitas motus totius corporis.

Hinc etiam colligitur, quod quo major corporibus inſit materiæ quantitas, eo major adhibenda ſit vis ad ea corpora ra cum datâ velocitate movenda, & eorum proinde momenta eadem ratione majora erunt; si igitur sint duo corpora eadem velocitate lata, erunt quantitates materiæ in ipsis semper ut eorundem momenta; adeoque si corpora mole æqualia & æquivelocia inæqualia habuerint momenta, necesse est, ut in illis inæquales quoque sint materiæ quantitates; & quod minus habet momenti, plures habebit poros seu spatia, vel omnino vacua, vel materia aliqua repleta, quæ non participat de motu totius corporis cujus poros implere supponitur. Sic, *e. g.* si fiant duo globi suberis & plumbi, ejusdem magnitudinis, & uterque eadem velocitate moveatur; cum experientia notum sit momentum unius multo majus esse momento alterius, necesse est ut multo plures sint pori in uno quam in altero, quos vel omnino vacuos esse concedendum est, vel dicendum eos materia aliqua subtilissima repletos esse, quæ ita libere potest ejusdem poros permeare, ut de motu corporis cujus poros occupat non participet.

Ut autem materia illa libere possit aliorum corporum poros permeare, nec de ipsorum motu participare, oportet ut omnia corpora omnes suos poros secundum rectas lineas directioni motus parallelas extensas habeant; ut scil. nullæ fiant reflectiones materiæ subtilis contra pororum latera: alioquin una cum ipso corpore movebitur materia etiamsi subtilissima, quæ ipsius poros replere supponitur. Non potest igitur materia subtilis de corporis motu non participare, nisi corpus motum ita disponatur, ut poros suos directioni motus parallelos habeat. Cum autem infinitis aliis modis ipsius situs variari potest; hoc est, possunt pororum longitudines in infinitis angulis ad lineam directionis inclinari, & proinde illis omnibus positis, moto corpore, una movebitur materia subtilis in ipsius poris locata: non igitur potest materia subtilis ita corporum poros libere permeare quin de ipsorum motu participet; ac proinde moto corpore, movebitur quoque materia intra ipsum contenta quantumvis subtilis sit. Si igitur suber moveatur, secum quoque deferet materiam in ejus poris contentam; adeoque cum minus habet momen-

ti

ti quam globus plumbeus ejusdem magnitudinis eadem velocitate latus, minor erit in subere materiæ copia, & proinde plures pori seu spatia absolute vacua.

Ex demonstratis etiam deducitur sequens Theorema.

THEOR. IX.

Pondera corporum omnium sensibilium juxta Terræ superficiem, sunt quantitatibus materiæ in iisdem proportionalia.

Nam, ut multiplici pendulorum experientia constat, corpora omnia vi gravitatis perpendiculariter cadentia (abstrahendo aëris resistentiam) æqualia spatia in iisdem temporibus percurrunt. Nam in vacuo seu medio non resistenti, non plus temporis impendent in descendendo minutissima quævis plumula, quam ponderosum plumbum; adeoque omnium corporum in dato tempore cadentium velocitates sunt æquales; erunt igitur eorum momenta quantitatibus materiæ in iisdem proportionalia; verum vires motum generantes sunt semper motibus seu momentis generatis proportionales, & proinde in hoc casu erunt ut quantitates materiæ in corporibus motis; sunt autem vires quæ motus illos generant ipsæ corporum gravitationes, hoc est, pondera. Omnium igitur corporum pondera sunt quantitatibus materiæ, quæ in corporibus sunt, proportionalia. Q. E. D.

Cor. 1. Corporis igitur cujusvis pondus, ex aucta solummodo vel diminuta materiæ quantitate, augetur vel diminuitur.

Cor. 2. Quare eadem manente materiæ quantitate in corpore quovis dato, idem quoque manebit ejusdem pondus, & quomodocunque variatur ejusdem figura vel textura particularum corpus illud componentium, pondus tamen ipsius non mutabitur: adeoque nullius corporis pondus ab ejus forma seu textura pendet.

Cum (per Axioma 14.) Natura cujuscunque materiæ sit eadem, nec unum corpus ab alio differat, nisi modaliter, per partium figuram, situm & alias istiusmodi formas; erunt corporum affectiones, quæ ab illorum formis non pendent, in omnibus corporibus eædem; adeoque cum (uti dictum est) corporum pondera ab illorum formis non oriantur, sed

à

à materiæ quantitate pendeant, in æqualibus materiæ quantitatibus, in eadem à terræ distantia, æquales erunt versus terram gravitationes; si vero duorum corporum pondera sint inæqualia, inæquales quoque erunt in iis materiæ quantitates.

Ponamus jam duos globos, plumbi scil. & suberis, æqualium magnitudinum; si in utroque eadem esset materiæ quantitas, (per jam ostensa) utrumque corpus æqualiter ponderaret; nam materia subtilissima poros suberis occupans æque ponderaret ac materia plumbi ipsi æqualis; cum vero magnum sit in duobus hisce globis ponderum discrimen, magnum quoque erit in iisdem materiæ discrimen; & si plumbum subere sit triplo gravius, triplo quoque major erit in plumbo contenta materia, quam in subere; adeoque plures erunt in plumbo pori seu plura spatia absolute vacua. Vacuum igitur non tantum possibile est, sed & actu datur; quod erat probandum. At hic sequitur materiæ quantitatem in quovis corpore rite per ipsius gravitatem æstimari posse.

Cum momentum augeri possit, tam ex aucta materiæ quantitate, eadem manente velocitate, quam ex aucta velocitate, eadem manente materia, Veteres (quos vis pulveris pyrii ad corpora celeriter movenda latebat) machinis ad hostium muros diruendos ita comparatis utebantur, ut ingens materiæ moles, etsi non magna velocitate, vehementi tamen impetu muros concuteret; at hodie per explosionem pulveris pyrii ex tormentis bellicis magna velocitate parvi globuli impelluntur. Quamvis autem veterum machinæ bellicæ hodiernis multum cedant, ipsarum tamen vis ad muros evertendos incredibilis fere fuit: arietes enim ex ingentibus trabibus sibi invicem commissis compositi erant; quorum pondus vel hinc æstimari potest, quod sc. ipsorum aliqui sex hominum millibus (ut alii sc. aliis succederent) ad ipsos dirigendos & motum iis imprimendum indigebant; ea pars, qua murum percutiebant, gravi ferro consolidata fuit, & ex funibus ita dependebant (Arietes compositos intelligo) ut ipsorum longitudines horizonti essent parallelæ;

unde magna virorum manu retrorsum acti, statim sua gravitate & hominum viribus simul agentibus antrorsum pulsi prominenti ferro muros quatiebant; & teste *Josepho*, nullæ fuerunt turres tam validæ, aut mœnia tam lata, quæ assiduas ipsorum plagas potuerunt sustinere.

In machinis, quæ per circumgyrationes rotarum pondera elevant, aliquando per additionem plumbi rotæ graviores redduntur; ut scil. major materiæ copia majorem impetum seu motus quantitatem suscipiat; per quam resistentiæ, tam ex aëre quam ex materiæ frictione ortæ, melius resistatur, & diutius conservetur motus, qui proinde semel inceptus facile continuabitur.

Ab eodem quoque pendet principio, quod lanifices in nendo, fusis suis versoriis graves turbines imponunt, ut gyrationes diutius perseverent. Cum scil. motus pars per resistentiam aëris amissa, ad motum ex materiæ additione auctum, minorem habeat rationem, quam est ea quam haberet ad motum non auctum.

Ex prædictis etiam solvitur sequens problema.

PROBL. I.

Invenire velocitatem, qua datum corpus movendum est, ita ut habeat momentum æquale momento cuivis dato.

TAB. 2. *fig.* 8. Sit datum corpus A, cujus momentum æquale debet esse momento corporis B moti celeritate c; fiat ut A ad B ita celeritas c ad aliam C; hæc erit velocitas quæsita, qua scil. si moveatur A, ejus momentum æquale erit momento corporis B, uti liquet ex Corol. tertio Theorematis tertii. Corporum enim momenta sunt æqualia, si celeritates sint ipsis corporibus reciproce proportionales; sed ex hypothesi, est celeritas corporis B ad celeritatem corporis A, ut corpus A ad corpus B; unde erit momentum corporis A æquale momento corporis B. Q. E. I.

Atque hinc sequitur corpus quodcunque parvum posse habere momentum æquale momento corporis utcunque magni, quod cum data velocitate movetur. Ex hoc principio pendent vires omnes machinarum, quæ ad corpora trahenda da vel elevanda fabricantur; nempe si machinæ ita disponantur, ut potentiæ velocitas ad ponderis sit ut pondus ad potentiam: eo inquam casu potentia pondus sustinebit. Liceat hoc in quinque simplicioribus Instrumentis Mechanicis ostendere. Et primo in *Vecte*, quem hic consideramus tanquam lineam inflexilem, sive rectam, sive curvam, sive ex pluribus rectis compositam, circa punctum immobile versatilem, gravitatis quidem expertem, ponderibus tamen sustinendis vel levandis accommodatam.

Punctum immobile quo sustinetur & circa quod rotatur Vectis ejus Fulcrum vocatur.

THEOR. X.

Sit AB *Vectis circa Fulcrum* C *tantum rotabilis; erit spatium quod ab unoquoque ipsius puncto describitur, ut ejus distantia à fulcro.*

Nam moveatur vectis è situ ACB ad situm *a* C *b*, punctum A describet peripheriam A *a*, B vero percurret peripheriam B*b*; sed propter sectores AC*a*, BC*b* similes, est A*a* ad B*b* ut AC ad BC, hoc est, spatia à punctis A & B descripta, sunt ut ipsorum à fulcro distantiæ. Si punctis A & B applicentur potentiæ vectis brachia perpendiculariter trahentes; spatia quæ ab ipsis describuntur secundum vel contra propensiones suas, non sunt peripheriæ A*a*, B*b*, sed perpendiculares *a*F, *b*E in vectis brachia demissæ: nam potentia in A per spatium *a*F tantum & non amplius progressa est secundum directionem vel propensionem propriam, sicut ob eandem causam, via à potentia B percursa secundum propriam directionem æstimanda est per *b*E. Sed ob æquiangula triangula *a*CF, *b*CE est *a*F ad *b*E ut *a*C vel AC ad *b*C vel BC, hoc est, viæ à potentiis secundum proprias directiones percursæ erunt ut ipsarum à fulcro distantiæ. TAB. 2. fig. 15.

Quod si directio potentiæ non sit recta ad vectis brachium AC perpendicularis, ducenda est à fulcro in lineam directionis, perpendicularis CG, & spatium à potentia secundum ipsius propensionem descriptum, erit perpendiculari illi proportionale; nihil enim refert utrum filum FGA, per quod TAB. 2. fig. 16.

quod potentia agit, affixum ſit puncto G vel A, vel etiam puncto D; eadem quippe manente directionis linea, eadem erit ipſius vis ad circumrotandum planum ADCB ac ſi puncto G affigeretur filum, & via ab ipſa, in dato tempore, ſecundum propriam directionem, deſcripta, proportionalis eſt rectæ CG. Quare patet in omni caſu, viam à potentia quavis ſecundum directionem propriam deſcriptam proportionalem eſſe diſtantiæ lineæ directionis à fulcro.

THEOR. XI.

In vecte vis motrix ſeu potentia quæ ad pondus eam habet rationem, quam diſtantia lineæ directionis ponderis à fulcro, habet ad diſtantiam directionis potentiæ à fulcro, pondus ſuſtinebit; ac proinde tantillum aucta pondus elevabit.

Tab. 1. fig. 17. Conſtat ex præcedente, ſpatia quæ à potentia & pondere ſecundum vel contra propenſiones proprias deſcribuntur, proportionalia eſſe diſtantiis lineæ directionum à fulcro; ſed velocitates ſunt hiſce ſpatiis proportionales, ac proinde diſtantiis quoque proportionales erunt: Si igitur ſit potentia P ad pondus Q ut CQ diſtantia directionis ponderis à fulcro ad CA diſtantiam directionis potentiæ à fulcro, potentia erit ad pondus, ut velocitas ponderis ad velocitatem potentiæ; erit igitur per Cor. 3. Theor. 3. momentum potentiæ æquale momento ponderis; ac proinde potentia ponderi æquipollebit; quod ſi tantillum augeatur potentia pondus elevabit. Q. E. D.

Hinc patet ratio, cur in Statera, *Romana* vulgo dicta, unico appendiculo vel ſacomate diverſorum corporum pondera examinantur. Eſt enim machina hæc Vectis inæqualium brachiorum, porrecto nempe ab axe motûs, (qui & axis æquilibrii eſſe debet) brachiorum altero in certam longitudinem, puta unius pollicis aut minorem; in altero brachio quantumvis porrecto, diſtinguunt partes ipſi CA longitudine æquales quot opus videbitur, numeris 1. 2. 3. 4. 5. &c. deſignatas. Appenſo itaque pondere explorando ex A, pondus datum ſeu notum P ex brachio contrario dependens à centro motus removendo & admovendo, explorant in qua diſtantia fiat æquilibrium; atque invento *v. g.* pondus P in di-

Tab. 1. fig. 18.

distantia 8 ponderi Q in A æquiponderare, hinc colligunt (propter pondera distantiis reciproce proportionalia,) pondus Q ponderis P noti octuplum esse.

Defin. Axem in Peritrochio vocant, Instrumentum Mechanicum, ponderibus levandis aptum; in quo cylindrus (quem Axem vocant) fulcris per extrema sustinetur, circumpositum habens tympanum (quod Peritrochium vocant) in cujus ambitu scytalæ infiguntur, quibus applicata vis Peritrochium una cum axe vertit; circa quem convoluti funes onus elevant. TAB. 3. fig. 1.

THEOR. XII.

In Axe cum Peritrochio (& machinis cognatis quarum eadem est ratio) Vis motrix quæ ad pondus sustinendum eam rationem habet, quam perimeter axis cui applicatur pondus ad perimetrum orbis extimi cui applicatur vis, ponderi æquipollebit; quæ itaque tantillum aucta pondus elevabit.

Ex fabrica machinæ patet, in una ipsius conversione tantundem elevari pondus appensum P, quantum funis tractorii illud est quod axem semel circumplicat; quod itaque illius ambitui æquale supponitur; unaque tantundem procedere potentiam scytalæ extremitati applicatam, quantus est extimi orbis ambitus à potentia eadem machinæ revolutione descriptus; (hoc est, spatium à potentia eodem tempore percursum æquale esse orbis extimi ambitui) adeoque velocitates potentiæ & ponderis, quæ sunt ut spatia simul percursa, erunt ut perimeter orbis extimi & perimeter axis. Quare si sit pondus ad potentiam, ut perimeter orbis extimi ad perimetrum axis, erit velocitas potentiæ ad velocitatem ponderis reciproce, ut potentia ad pondus. Itaque per Corol. 3. Theor. 3. momentum potentiæ æquale erit momento ponderis; ac proinde potentia ponderi æquipollebit & ipsum per axem in Peritrochio sustinere valebit; quod si tantillum augeatur potentia vel minuatur pondus, potentia pondus elevabit. Q. E. D.

Cor. Quo major est ambitus orbis extimi, hoc est, quo longiores sunt scytalæ, vel quo minor est axis, eo potentior erit vis ad pondus elevandum.

Defin. Ex orbiculis uno vel pluribus apte dispositis, circa axes suos volubilibus, quibus circumpositus funis ductorius pondus attrahit, compositam machinam Trochleam appellant.

THEOR. XIII.

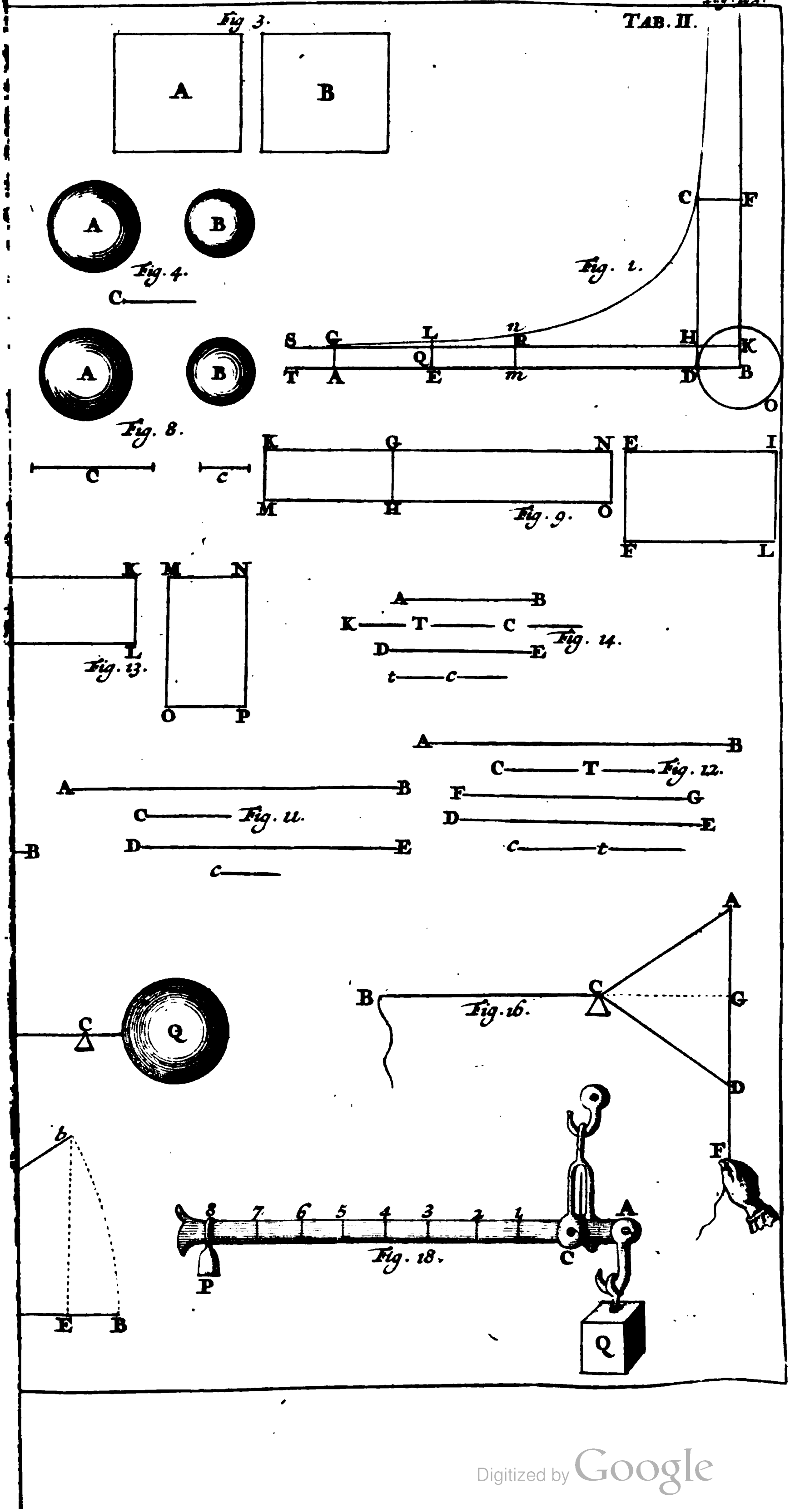
In Trochlea mobili, ex orbiculorum positione calculo æstimatur quanta vis apposito ponderi æquipolleat; nempe vis ea, quæ sit ad pondus, sicut 1 ad numerum funiculorum quibus pondus suspenditur; idem pondus sustinere valebit: Quæ proinde tantillum aucta pondus elevabit.

Tab. 3. fig. 2. Sit funis cujus alterum extremum unco B affixum, & in hujus duplicatura dependeat trochlea mobilis, cujus loculamento appendatur pondus Q; clarum est ut attollatur pondus Q per unum pedem, utrumque funem loculamentum cum appenso pondere sustinentem, (deorsum ab unco supputando) debere uno pede breviorem fieri; hoc est, ut attollatur pondus per unum pedem, potentiam debere per duos pedes moveri; quare in hac machina, potentiæ via ponderis viæ dupla erit; ac proinde celeritas potentiæ dupla quoque erit celeritatis ponderis: adeoque si potentia sit ad pondus ut 1 ad 2, ipsius momentum momento ponderis æquipollebit, & pondus sustinebit.

Tab. 3. fig. 3. Si ita disponantur orbiculi, ut pondus Q à tribus funibus dependeat; ut pondus ascendat per unum pedem, oportebit omnes tres funiculos (ita loqui liceat, quamvis non nisi unus continuus & nullibi interruptus funis sit) uno pede breviores reddi, quod fieri aliter non potest, quam si potentia P tres pedes progrediatur: quare cum in hac machina, potentiæ via sit ponderis viæ tripla; erit ejus celeritas quoque tripla celeritatis ponderis; adeoque si potentia sit ad pondus ut 1 ad 3, ipsius momentum momento ponderis æquipollebit.

Tab. 3. fig. 4. Simili prorsus ratione ex quartâ figurâ patet potentiam in P, quæ sit subquadrupla ponderis Q, eidem æquipollere. In omnibus casibus potentia quæ ponderi prius æquipollebat, si vel ipsa tantillum augeatur, vel pondus minuatur, potest ipsum elevare. Q. E. D.

De-



TAB. II.

Fig. 1. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 14. Fig. 16. Fig. 18.

Defin. Cylindrum rectum Helice similiter sulcatum Cochleam appellant, & quidem Interiorem, si sulcata superficies convexa sit, Exteriorem si concava. Debet autem Cochlea Interior ita Exteriori conformis esse, ut pars parti apte respondeat (hujus eminentiis illius cavitatibus congruentibus) quo fiet ut Interior per Exteriorem permanentem tota labatur, vel etiam super Interiorem permanentem propellatur Exterior. Potissimum adhiberi solent Cochleæ obicibus propellendis, frangendis, aut comprimendis, aliisque motibus trusione factis; soletque forinsecus adhiberi manubrium, aut scytala cui vis applicatur. TAB. 3. fig. 5.

THEOR. XIV.

In Cochlea, si sit ut ambitus quem vis sive potentia applicata peragrat in una cochleæ conversione, ad Intervallum duarum continue proximarum spiralium conversionum (secundum cochleæ longitudinem æstimatum) sic pondus vel resistentia ad potentiam; æquipollebunt potentia & resistentia, & potentia tantillum aucta impedimentum movebit.

Intelligatur Cochlea Interior CA per Exteriorem fixam ope scytalæ CB, versando protrudi, simulque pondus P (vel quod ponderis instar est) elevare. Manifestum est ex Machinæ inspectione, in una cochleæ revolutione pondus tantum elevari, quantum est intervallum duarum spiralium proximarum; & potentiam tantum promoveri quantus est ambitus ab ista in una revolutione descriptus; hoc est ponderis via erit ad viam potentiæ eodem tempore factam, ut intervallum spiralium ad ambitum à potentia una revolutione descriptum; adeoque celeritas ponderis erit ad potentiæ celeritatem, in eadem ratione: ac proinde si sit ut potentia ad pondus ita prædictum intervallum duarum proximarum spiralium ad viam à potentia descriptam, potentia ponderi vel resistentiæ æquipollebit: quæ itaque tantillum aucta resistentiam superabit. Q. E. D.

Defin. Cuneum plerumque adhibent, ex ferro seu duriore aliqua materia, forma prismatis non admodum alti, cujus oppositæ bases sunt triangula isoscela; utriusvis hujus trianguli altitudinem appellant altitudinem cunei, ejusque trianguli

guli basin vocant cunei crassitiem, rectamque quæ triangulorum vertices conjungit, cunei aciem; quodque eorum bases conjungit parallelogrammum, cunei dorsum dicunt.

THEOR. XV.

Potentia cunei dorso directe applicata, quæ sit ad resistentiam à cuneo superandam ut cunei crassities ad ejusdem altitudinem, resistentiæ æquipollebit; & proinde aucta eandem superabit.

Tab. 5. fig. 6. Resistentia cuneo superanda sit *v. g.* ligni tenacitas seu firmitudo, aut alius quivis obex cuneo dirimendus. Patet dum cuneus adigitur in situm usque quem nunc obtinet, via potentiæ seu longitudo secundum suam propensionem percursa est BA; tantum enim & non amplius progressa est: eodemque modo DC est via impedimenti, atque dum detruditur cuneus per totam altitudinem suam, dividitur obex per totam cunei crassitiem; & in toto processu proportionaliter, ut patet ex natura trianguli: unde si sit ut cunei crassities ad ipsius altitudinem ita potentia ad resistentiam, hujus momentum illius momento æquale erit; adeoque potentia aucta resistentiam superabit.

SCHOLIUM.

Hinc per Instrumenta mechanica non augetur vis potentiæ, quod quidem fieri non potest; sed ponderis vel elevandi vel trahendi velocitas ita per instrumenti applicationem minuitur, ut ponderis momentum vi potentiæ non majus evadat. Sic *e. g.* si vis quædam agens possit elevare datum pondus unius libræ cum data velocitate, per nullum instrumentum fieri potest ut eadem vis elevet pondus duarum librarum cum eadem velocitate: potest tamen ope instrumenti cum velocitatis dimidio pondus duarum librarum elevare; imo potest eadem potentia pondus mille vel decies mille librarum elevare, cum velocitatis parte millesima vel decem millesima; sed non ideo augetur potentiæ vis, sed motus quem producit in elevando pondus illud magnum, omnino æqualis est motui qui producitur cum elevatur pondus unius libræ.

Ex dictis etiam patet ratio, cur in canalibus communicantibus diversæ amplitudinis conservatur liquorum æquilibrium.

brium. Sit enim canalis amplus ABCD, cum alio angustiore MNKH communicans in C; in utroque canali infusa aqua ad eandem altitudinem assurget, & descendendi conatus, seu vis quam habet aqua in canali FH ad elabendum per orificium C, æqualis est vi aquæ in canali AC ad descendendum per idem orificium. Nam si ponatur aquam descendisse in canali AC per altitudinem AI, necesse est, ut aqua in canali FH ascendat ad altitudinem HN, talem sc. ut cylindrus aquæ MFGN æqualis sit cylindro AILD, sc. cylindro aquæ, quæ in canali AC descendit; sed æqualium cylindrorum reciprocantur bases & altitudines (per 15. Prop. El. duodecimi) hoc est, erit FM ad AI ut orificium AD ad orificium MN vel FG: sed est FM ad AI ut velocitas ascensus aquæ in canali FN ad velocitatem descensus aquæ in canali AC; & est orificium AD ad orificium MN, ut aqua in AC ad aquam in canali FH (nam cylindri æque alti sunt inter se ut bases) quare erit velocitas aquæ ascendentis in canali FH ad velocitatem aquæ descendentis in canali AC, ut aqua in canali AC ad aquam in FH; hoc est, aquarum velocitates sunt ipsis reciproce proportionales, & proinde erunt aquarum momenta æqualia; sed sunt contraria, quare nullus sequetur motus. TAB. 3. *fig.* 7.

Hinc obiter patet ratio, cur aqua vel fluidum quodvis ex latiore in angustiorem alveum defluens majori celeritate moveatur.

Hinc si in corpore animali, Arteriarum ramuli vel Arteriæ capillares habeant summam orificiorum seu potius sectionum transversarum, majorem sectione transversa Arteriæ magnæ seu Aortæ, à qua omnes oriuntur; erit sanguinis velocitas in extremitatibus corporis minor quam in Aorta; si vero æqualis sit hæc summa sectioni transversæ Aortæ, erit velocitas sanguinis in iisdem æqualis velocitati sanguinis in Aorta; si minor sit summa, tunc major erit velocitas sanguinis per extremas arterias transcurrentis quam in Aorta.

Lectio XI.

De Legibus Naturæ.

HActenus Theoremata de motus quantitate, ſpatiis à mobilibus percurſis, & quæ exinde conſequuntur corollaria demonſtrata dedimus; ad leges Naturæ jam deventum eſt, illas ſc. leges, quas omnia corpora naturali ac conſtanter obſervare neceſſe eſt. Has igitur eodem ordine, & iiſdem verbis, prout ab illuſtri *Newtono* proponuntur tradcmus, quarum prima hæc eſt.

LEX I.

Corpus omne perſeverat in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus à viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Cum corpora naturalia conſtent ex materiæ maſſa, quæ ſibi ipſi nullam ſtatus ſui mutationem inducere queat; ſi prius quieſcebant corpora, oportet ut in ea quiete ſemper permaneant, niſi adſit vis nova ad motum in iis producendum; ſi vero in motu ſint, eadem energia ſeu vis motum ſemper conſervabit; & proinde corpora motum ſuum ſemper retinebunt & ſecundum eandem rectam eodem tenore ſemper progredientur, cum nec ſibi ipſis quietem, nec retardationem, nec directionis ſuæ mutationem ad deflectendum verſus dextram aut ſiniſtram acquirere valeant. Philoſophos novimus, qui facile agnoſcunt nullum corpus poſſe ſeipſum movere, hoc eſt, per ſe ex quiete ad motum tranſire; iidem non æque lubenter concedunt corpora ſemel mota non poſſe per ſe ad quietem tendere, eo quod videant projectorum motus paulatim langueſcere, & ipſa mobilia ultimò ad quietem pervenire.

Verum ut nullus modus, vel accidens, ſponte ſua ſeu per ſe deſtruitur, & ſicut omnes effectus à cauſis tranſeuntibus producti ſemper permanent, niſi adſit nova aliqua & extranea cauſa quæ ipſos tollat; ſic etiam motus ſemel inceptus ſemper continuabitur, niſi vis aliqua externa adſit, quæ ipſi obſtet; nec magis poteſt corpus ſemel motum, motum ſeu energiam ſuam ad movendum deponere, & per ſe ad quietem

tem redire, quam potest figuram semel sibi inductam exuere, & aliam recentem absque causa extrinseca acquirere.

Inest præterea corporibus vis quædam, seu potius inertia, qua mutationi resistunt; unde est quod difficulter admodum è statu suo, qualiscunque is sit, deturbentur: vis vero illa eadem est in corporibus motis ac quiescentibus, nec minus resistunt corpora actioni, qua à motu ad quietem reducuntur, quam ei, qua à quiete ad motum transeunt; hoc est, non minor requiritur vis ad corporis alicujus motum sistendum, quam prius necessaria fuit ad eundem motum eidem corpori imprimendum: unde cum vis inertiæ æqualibus mutationibus æqualiter semper resistit, illa non minus efficax erit, ut corpus in motu semel incepto perseveret, quam ut corpus quiescens semper in eodem quietis statu permaneat.

Quidam sunt Philosophi, qui corpus ex sua natura tam ad motum quam ad quietem indifferens esse supponunt; at per indifferentiam illam non (ut opinor) intelligunt talem in corporibus dispositionem, per quam quieti aut motui nihil omnino resistunt; quippe hoc posito, sequeretur corpus quodvis maximum summa celeritate motum à minima quavis vi posse sisti; aut si quiesceret magnum illud corpus, ab alio quovis minimo propelli, absque ullo velocitatis corporis impellentis decremento; hoc est, corpus exiguum quodvis in aliud maximum impingens, posset illud secum abripere sine ulla ipsius retardatione; & utrumque corpus post impulsum junctim ferrentur ea celeritate, quam prius corpus illud exiguum habebat: quod absurdum esse omnes novimus. Non igitur indifferentia illa sita est in non renitentia ad motum ex statu quietis, aut ad quietem ex statu motus, sed in eo solum, quod corpus ex sua natura non magis ad motum quam ad quietem propendet, nec magis resistit transire à statu quietis ad motum, quam à motu rursus ad eandem quietem redire; potest præterea corpus quodvis quiescens à quavis vi moveri; potest æqualis vis secundum contrariam directionem agens motum illum destruere; atque in hoc indifferentiam illam sitam esse volunt.

Cum, secundum expositam naturæ legem, corpus omne semel motum in eodem motu semper perseveret, quærunt Philosophi cur projecta omnia motum suum (quem violentum vocant) sensim amittunt? Cur non in infinitum pergunt? Si motus ex sua natura non languesceret, potuisset lapis ex manu projicientis sub initio mundi emissus spatium fere immensum, & tantum non infinitum, pertransisse. Sic quidem potuit, si in vacuo seu spatiis liberis motus absque gravitate fieret. Verum cum omnia projecta vel per aërem vel super aliorum corporum superficies scabras ferantur, exinde provenit eorum retardatio; cum enim necesse sit, ut mobilia aërem obstantem è loco suo pellant & dimoveant, vel ut superficiei super quam moventur scabritiem vincant, oportet ut vim & motum illum omnem amittant, qui hisce obstaculis continuo impenditur; & proinde projectorum motus semper diminuetur. Si vero nulla esset medii resistentia, nulla superficiei, super quam decurrunt mobilia, asperitas, nulla gravitas, quæ corpora terram versus continuo pelleret, absque omni retardatione idem semper continuaretur motus. Sic in Coelis, ubi medium tenuissimum est, Planetæ diutissime suos conservare possunt motus; & super glaciem, aut alias superficies politas seu minime scabras, corpora ponderosiora serius ad quietem reducuntur.

Desinant jam Philosophi continuati motus exquirere causam, alia quippe agnoscenda est nulla, præter primam illam, quæ non modo motum sed res omnes in *Esse* suo conservat, Deum scil. Opt. Max. Nec alia ratione perseverat motus, quam qua continuatur corporis alicujus figura, color, aut aliæ quævis istiusmodi affectionum, quæ semper eædem permanerent, nisi vis aliqua externa eas turbaverit.

Multo quidem rectius & magis secundum bonæ methodi leges egissent, si rationes retardati & amissi motus investigassent: verum quosdam in hac re adeo cæcutire deprehendimus, ut illud ipsum ponant causam continuati motus, ex quo revera ejus retardatio provenit.

Desinant etiam Philosophi de communicatione motus tantas

tas lites movere; ex ſupra poſitis enim facile intelligitur, cur lapis ex projicientis manu tanto cum impetu emittitur: quippe quùm lapis in manu continetur, neceſſe eſt ut de motu ipſius manus participet (per Axiom. 8.) adeoque eadem celeritate & verſus eandem plagam, qua ipſa manus, feretur: ſed corpus omne naturale ſemel motum in eodem perſeverat motu (per legem ſupra poſitam) donec ab agente externo impediatur; unde cum projiciens manum ſuam retrahit, lapis non retractus recta progredietur. Eodem prorſus modo, ſi navis aut cymba ventis vel remis celeriter agatur, qui in ipſa ſedent eundem celerem motum ipſis communicatum habent; at ſi ſubito ſiſtatur navis, res omnes in navi poſitæ motum ſuum continuare conantur, & quæ ipſi navi firmiter non adhærent, poſt illius quietem relictis locis ſuis etiamnum progrediuntur; atque hinc periculum eſt ne homines in navi relative quieſcentes, poſt tam ſubitam & quaſi violentam ſtatus ſui mutationem, prorſum præcipitentur, cum ſcil. motus, quem prius ab ipſa navi accepêre, nondum deſtructus ſit.

Si lapis in funda celeriter circumagatur, ea celeritate circulum deſcribit quam habet ea fundæ pars in qua ponitur; cum vero corpus omne ſecundum rectam lineam progredi affectet, lapis in ſingulis orbitæ ſuæ punctis, ſecundum lineam orbitam in puncto in quo eſt tangentem egrederetur, niſi à filo detentus eſſet; adeoque ſi filum demittatur, rumpatur, vel alio quovis modo lapidem cohibere deſinat, lapis non ulterius in circulo ſed ſecundum rectam lineam movebitur, ſecluſo motu ex ipſius gravitate orto.

Conatus ille, quem lapis circumgyratus habet in quovis ſuæ orbitæ puncto ſecundum tangentem egrediendi, filum per quod in orbita detinetur tendit, & vis illa qua filum tenditur ex vi centrifuga oritur, per quam ſcil. à peripheria recedere conatur. Tenſionem hanc quiſque in funda facile experiri poteſt; & per experientiam invenimus, quo celerius circumgyratur lapis, vel etiam quo majus materiæ pondus in funda ponitur, eo majorem fieri fili tenſionem.

Ob hanc rationem volunt quidam Philoſophi centrifugam hanc vim à ſola gravitate proficiſci; huic tamen ſententiæ nec ratio nec experientia favet: nam in funda non ſolum tenditur funis cum lapis partem ſuæ orbitæ infimam percurrit, ſed etiam dum ſuperiorem partem deſcribit; quod à gravitate oriri non poteſt, cum gravitas lapidem, in ſuperiore ſuæ orbitæ parte, tantum urgere poteſt verſus centrum, quæ directe contraria eſt vi centrifugæ quæ illum à centro recedere cogit. Præterea cum lapis in plano horizontali in circulo revolvitur, filum quoque tenditur; ſed gravitas tenſionem illam in illo plano nullo modo producere poteſt, cum lapis nec ſurſum nec deorſum feratur; cujus proinde motus à gravitate hac nec augebitur nec minuetur; non igitur â gravitate oritur vis centrifuga, ſed à ſolo conatu quem habent corpora omnia ſecundum rectam lineam progrediendi.

Si Terram circa ſuum axem rotari ſupponamus, nos omnes qui in ejus ſuperficie degimus una cum ipſa revolveremur; adeoque ſi ſubito ſiſteretur ejus motus, res omnes ipſi firmiter non adhærentes vehementi motu excuſſæ ab illa recederent; ſic etiam ſi circa Solem motu annuo deferatur, & ſubito illa revolutio ſiſteretur, res omnes excuſſæ, Planetarum inſtar, circa ſolem gyrarentur, ob eandem cauſam qua prius ipſa Tellus circa ſolem movebatur.

Cum Tellus circa axem vertatur, & res omnes in ipſa circulos deſcribant æquatori parallelos, quærunt Philoſophi unde ſit, ut corpora omnia ab ejus ſuperficie non excutiantur, cum per naturæ legem corpora omnia motum ſecundum rectam lineam affectant? Sic quidem excuterentur, niſi alia adeſſet vis, per quam ad terram detinentur, quæ eſt ipſa Gravitatio vi centrifugâ multo potentior.

Si vas aquæ plenum in plano quovis horizontali ponatur, & ſubito vi ſatis magna impellatur, aqua in vaſe ſub initio verſus partes motui vaſis contrarias tendere videbitur; non quod revera talis motus aquæ impreſſus eſt, ſed cum illa in eodem quieſcendi ſtatu permanere conatur, vas motum ſuum aquæ intra ipſum contentæ communicare ſtatim non poteſt, & proinde aqua à vaſe derelicta, & revera quieſcens, locum

ſuum

suum relativum mutare videbitur. Tandem postquam vasis motus aquæ impressus est, & illa una cum vase uniformiter & eadem celeritate progredi cœperit, si subito sistatur vas, aqua tamen in eodem motu perseverare conabitur, & super vasis latera assurgens pars illius ulterius progredietur.

Si navis tempestate & turbulento mari jactetur, in ipsa sedentes homines & relative quiescentes doloribus, ægritudine, nausea & vomitu afficientur, præsertim si mari minus assueti fuerint; cum scil. liquores in ipsorum ventriculis, intestinis, vasis sanguiferis, & cæteris ductibus contenti, navis jactationibus non statim obediunt, unde in corpore humano fluidorum motus turbabitur, & morbi orientur.

LEX II.

Mutatio motus est semper proportionalis vi motrici impressæ, & fit semper secundum rectam lineam, qua vis illa imprimitur.

Sequitur ex axiomate 4: si enim vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit; & hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur (quippe ab illa tantum oritur) fiet semper secundum eandem plagam (per legem primam;) nec potest corpus secundum aliam quamvis plagam deflectere, nisi adsit nova vis priori obstans; adeoque si corpus antea movebatur, motus ex vi impressa productus motui priori vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

Si vis aliqua in dato corpore motum producat, (per legem primam) corpus illud in motu suo semper perseverabit: si vero postea vis eadem vel æqualis secundum eandem directionem rursus in idem corpus agat, motus exinde productus priori æqualis erit, & proinde summa motuum prioris dupla erit: si denuo vis eadem tertio in idem corpus similiter agat, motus hinc ortus erit etiam primo æqualis, & proinde summa motuum erit motûs primo impressi tripla; & similiter si vis eadem rursus in idem corpus ageret, omnium

mnium motuum ſumma erit primo impreſſi quadrupla, & ſic continuo.

Hinc ſi vis hæc nova æqualibus temporum intervallis continuo æqualiter ageret, motus exinde ortus eſſet ut ſumma temporum quibus generatur; adeoque cum, ob datum corpus, motus ſit ut velocitas, erunt velocitates ſic genitæ ut tempora ab initio motus, & motus erit æqualiter acceleratus; hinc ſequentia Theoremata facile demonſtrantur.

THEOR. XVI.

Si corpora in omnibus à Terra diſtantiis æqualiter gravitarent, eſſet motus corporum, ſua gravitate in eadem recta cadentium, motus æquabiliter acceleratus.

Supponatur tempus in quo grave cadit diviſum eſſe in particulas æquales & valde exiguas, & gravitas prima temporis particula agens corpus verſus centrum pellat: ſi jam poſt primum illud tempus omnis gravitatis actio ceſſaret, & corpus deſineret eſſe grave, nihilominus motus ex primo impulſu acceptus ſemper continuaretur, & corpus ad terram æqualiter accederet (per legem primam:) verum cum corpus continuo ſit grave, & gravitas indeſinenter agat, etiam in ſecunda temporis particula eadem gravitatio alium impulſum priori æqualem ipſi communicabit, & corporis velocitas poſt duos hos impulſus prioris dupla erit; & ſi vis gravitatis omnino tolleretur, corpus tamen cum eadem celeritate in eadem recta moveri perſeverabit; cum vero & tertiâ temporis particulâ corpus eadem gravitate urgeatur, alium quoque motum priorum utrivis æqualem poſt tertium illud tempus acquiret; ſic etiam in quarta temporis particula gravitatio quartum impetum ſingulis priorum æqualem ipſi gravi ſuperaddit; & ſic de cæteris. Impetus igitur ſeu motus corporis dati à gravitate acquiſiti ſunt ut particulæ temporis ab initio elapſæ, adeoque cum actio gravitationis ſit continua, ſi particulæ illæ infinite exiguæ ſumantur, erit corporis cadentis motus ex gravitate acquiſitus, ut tempus ab initio caſus elapſum; cumque corpus datum ſit, erit motus ut ipſius velocitas, ergo velocitas erit ſemper ut tempus

pus in quo acquiritur. Gravi igitur cadenti æqualibus intervallis æqualia accedunt velocitatis incrementa, & proinde ejus motus erit uniformiter acceleratus. Q. E. D.

Similiter ex iisdem principiis demonstrari potest, corporum in eâdem rectâ sursum tendentium motum esse æquabiliter retardatum; cum scil. vis gravitatis, contra motum inceptum continuo & æqualiter agens, æqualibus temporibus æqualiter ipsius motum minuat, usque dum velocitas omnis sursum omnino sublata sit.

Cor. Recta AB exponat tempus quo corpus cadit, & BC cum AB faciens angulum rectum exponat velocitatem in fine istius casus acquisitam; jungatur AC, & per punctum quodvis D ducatur DE ad BC parallela; erit hæc ut velocitas in fine temporis AD acquisita. Nam (ob triangula ABC ADE æquiangula) est AB ad AD sicut BC ad DE; sed BC repræsentat velocitatem in tempore AB, quare (cum velocitates sunt ut tempora) DE repræsentabit velocitatem acquisitam in fine temporis AD: similiter FG repræsentabit velocitatem in puncto temporis F; & in omnibus temporis punctis velocitates erunt ut rectæ intra triangulum per ipsum ductæ & basi BC parallelæ. Tab. 3. *fig.* 8.

THEOR. XVII.

Si grave ex quiete, motu uniformiter accelerato descendat; spatium, quod ab ipso in dato ab initio motûs tempore percurritur, dimidium erit istius quod in illo tempore uniformiter percurri potest, cum ea velocitate quæ in fine istius temporis à gravi cadente acquiritur.

Sit AB tempus in quo cadit grave, sitque BC velocitas ultimò acquisita, compleatur triangulum ABC & rectangulum ABCD; porro distinguatur tempus AB in innumeras particulas *ei*, *im*, *mp*, &c. Ducantur *ef*, *ik*, *mn*, *pq*, &c. basi parallelæ: (Per Cor. præced.) *ef* erit ut velocitas gravis in temporis particulâ infinite exiguâ *ei*; & *ik* erit ejus velocitas in particula temporis *im*; item *mn* erit ipsius velocitas ad punctum temporis *mp*; & sic *qp* erit velocitas in temporis particula *po*. Sed (per Cor. Theor. 7.) spatium in quovis tempore & cum quavis celeritate percursum Tab. 4. *fig.* 1.

eſt ut rectangulum ſub eo tempore & celeritate; quare erit ſpatium percurſum tempore *ei* cum velocitate *ef* ut rectangulum *if*; ſic ſpatium percurſum tempore *im* cum celeritate *ik* erit ut rectangulum *nk*; ſic etiam ſpatium percurſum cum celeritate *mn* tempore *mp* erit ut rectangulum *pn*; & ſic de cæteris. Quare erit ſpatium percurſum, in omnibus hiſce temporibus, ut omnia hæc rectangula, ſeu ut rectangulorum omnium ſumma; cum autem temporis particulæ infinite exiguæ ſint, erit omnium rectangulorum ſumma æqualis triangulo ABC. Eſt vero (per ſupra citatum Corol. Theor. 7.) ſpatium à mobili percurſum tempore AB cum uniformi celeritate BC ut rectangulum ABCD; unde erit ſpatium percurſum à gravi in dato tempore cadenti ex quiete, ad ſpatium percurſum in eodem tempore, velocitate uniformi cum æquali ei quæ ultimo acquiritur à gravi cadente, ut triangulum ABC ad rectangulum ABCD: ſed triangulum ABC eſt dimidium rectanguli ABCD, unde erit ſpatium quod à gravi cadente ab initio caſus in dato tempore percurritur, dimidium ejus quod percurri poteſt in eodem tempore cum velocitate ultimò acquiſitâ. Q. E. D.

Cor. 1. Spatium quod percurritur cum velocitate CB in tempore æquali dimidio ipſius AB, æquale erit ſpatio à gravi cadenti tempore AB percurſo.

Tab 3. *fig.* 8. *Cor.* 2. Ex ipſa demonſtratione ſequitur quod ſicut ſpatium percurſum tempore AB repræſentatur per triangulum ABC, ſic ſpatium tempore AF à gravi emenſum per triangulum AFG repræſentari poſſe; item ſpatium peractum tempore AD per triangulum ADE exponetur.

Cor. 3. Spatia percurſa ab initio caſus computando, ſunt in duplicata ratione temporum; nam ſpatium percurſum tempore AB eſt ad ſpatium percurſum in tempore AF ut triangulum ABC ad triang. AFG; ſed (ob ſimilia triangula ABC, AFG) triangulum ABC eſt ad triangulum AFG in duplicata ratione lateris AB ad latus AF: adeoque erit ſpatium percurſum tempore AB ad ſpatium percurſum tempore AF in duplicata ratione temporis AB ad tempus AF. Sunt igitur ſpatia percurſa à gravi è quiete cadente, ut quadrata

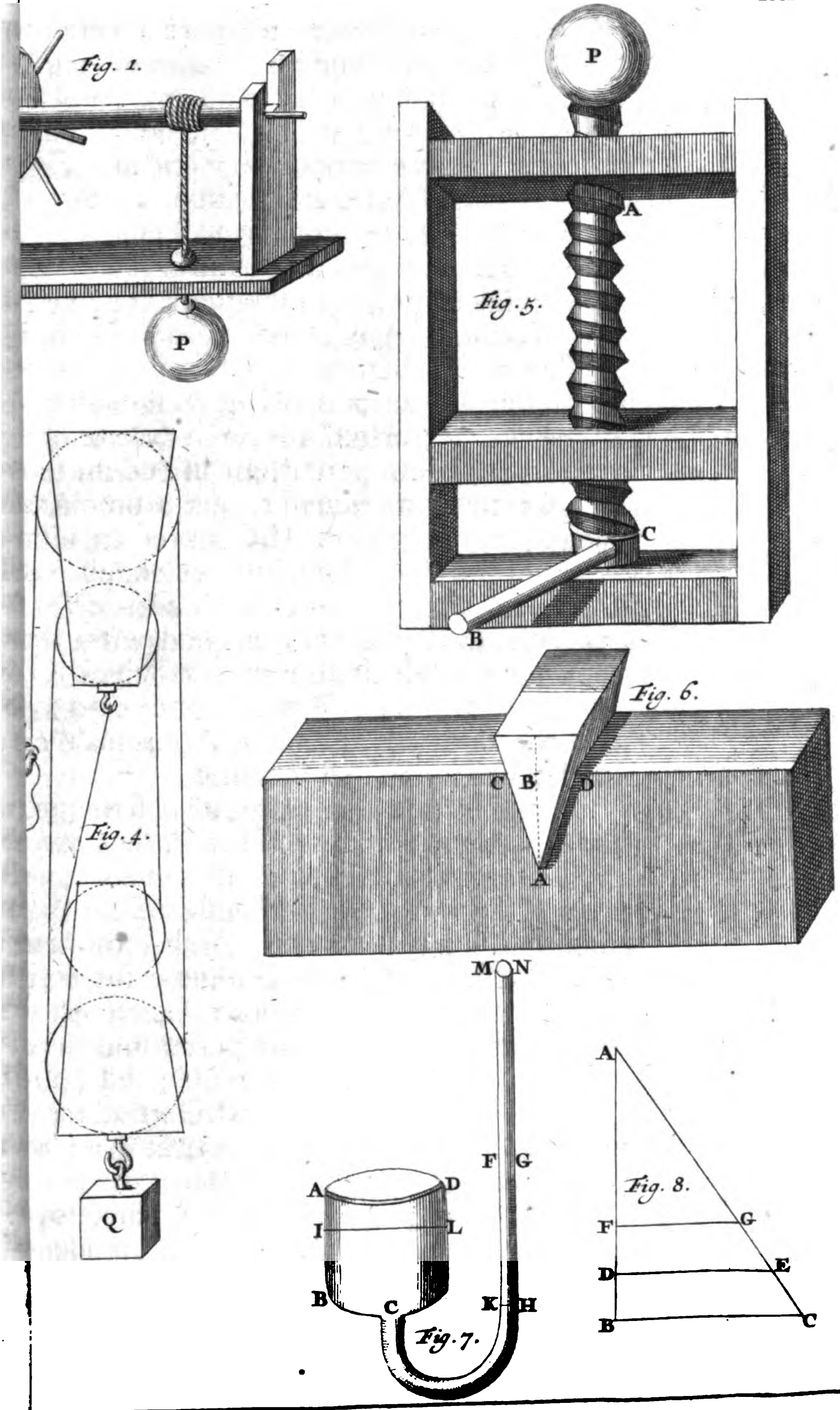


Fig. 1.
P
Fig. 4.
Q
P
A
Fig. 5.
C
B
Fig. 6.
C B D
A
M N
F G
A D
I L
B
C
K H
Fig. 7.
A
Fig. 8.
F G
D E
B C

ta temporum quibus percurruntur.

Cor. 4. Hinc si grave in dato tempore è quiete cadens percurrat spatium quodvis, spatium in duplo tempore percursum erit prioris quadruplum, in triplo tempore spatium peractum erit novies majus quam illud quod primo percurritur, &c. Hoc est, si tempora sumantur ut 1. 2. 3. 4. 5. &c. spatia hisce temporibus descripta ab initio motus computando erunt ut 1. 4. 9. 16. 25.

Cor. 5. Cum spatium percursum in primo tempore sit ut 1, in secundo ut 4, computando ab initio, erit spatium in secundo tempore seorsim descriptum ut 3; eodem modo cum spatium descriptum in fine temporis tertii sit ut 9, & in fine temporis secundi ut 4, erit spatium descriptum in tempore tertio seorsim sumpto ut 5; & sic de cæteris: sumendo igitur temporis partes æquales, erunt spatia à gravi è quiete cadenti in singulis seorsim descripta ut 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. scil. ut numeri impares.

Cor. 6. Hinc etiam cum velocitates cadendo acquisitæ sint ut tempora, erunt spatia percursa etiam ut quadrata velocitatum; & tam velocitates quam tempora erunt in subduplicata ratione spatiorum per quæ grave cadit ab initio motûs.

LECTIO XII.

LEX III.

Actioni semper contraria & æqualis est Reactio; seu corporum duorum actiones in se mutuo æquales sunt, & in partes contrarias diriguntur. Hoc est, per actionem & reactionem æquales motûs mutationes in corporibus in se invicem agentibus producuntur, quæ mutationes versus contrarias partes imprimuntur.

HÆc Lex non aliter melius quam per exempla potest illustrari.

1. Si corpus unum in alterum quiescens impingat, quicquid motus quiescenti imprimitur, tantundem præcise impingenti subtrahitur, *v. g.* Si corpus A cum duodecim motus partibus versus corpus B feratur, & postquam in illud impegerit communicentur ipsi B 5 partes motus, restabunt TAB. 4. *fig.* 2.

ipsi A motus partes tantummodo 7. adeoque mutationes quæ utrique corpori contingunt æquales erunt: idemque omnino erit effectus ac si vis 5 partibus motûs æquipollens impelleret corpus B versus C, & alia huic æqualis in corpus A ageret, & ipsum in contrarias partes versus H urgeret.

2. Si corpus B non quiescat, sed tendat versus C, & corpus A celerius motum in ipsum impingat; tantundem motus deperdet corpus A quantum corpus B lucratum est, & mutationes motus per impulsum in utroque corpore productæ (hoc est incrementum motus unius & decrementum alterius) æquales erunt.

3. Si corpora A & B sibi obviam veniant, & A feratur versus C cum 12 motus partibus, B vero versus H cum tribus motus partibus; qualiscunque motus mutatio corpori B accidat, eadem omnino corpori A continget: *v. g.* Si post occursum feratur B versus C cum partibus motus duabus, mutatio motus quæ ipsi inducta est erit partium quinque; æqualis scilicet summæ duorum motuum, *illius* nempe quo prius versus H ferebatur, quique per impulsum corporis A destructus est, & illius qui de novo recipitur cum quo versus plagam C tendit; & motus in corpore A amissus hisce 5 motus partibus præcise æqualis erit: adeoque (ut in primo exemplo) idem omnino sequitur effectus, qualis fuisset si vis cum 5 motus partibus pelleret B versus C, & alia huic æqualis in corpus A imprimeretur, quæ illud versus partes H ageret,

Verum universaliter ictus magnitudo quæ ab occursu duorum corporum oritur, in utroque corpore semper æqualiter recipitur; unde & mutationes motus quæ ab ictu producuntur in utroque corpore semper æquales erunt.

Sic si malleus ferreus vitrum percutiat, ictus tam in malleo quam in vitro æqualiter recipitur, & vitrum frangitur, ferro integro manente; non quod major est vis percussionis vitro impressa, quam est illa quæ in malleo recipitur, sed quia partes ferri duriores & firmius inter se cohærentes, multo fortius eidem percussionis vi resistunt, quam vitri particulæ fragiles & minus cohærentes. Eodem prorsus modo si corpus

pus aliquod tenui filo muro alligetur, parva vis sufficiens erit ad illud divellendum; si vero prægrandi fune idem corpus muro alligatum esset, vis prior æqualiter applicata parum proficeret ad corpus avellendum.

4. Si equus lapidem funi alligatum trahat, retrahetur etiam equus æqualiter in lapidem; nam funis utrinque distentus eodem se relaxandi conatu æqualiter urgebit lapidem versus equum, & equum versus lapidem; unde attractionis vires, tam in equo quam in lapide, æquales erunt; verum cum tanta sit firmitudo & vis equi solo insistentis, ut tractioni funis resistere possit, ille funi trahenti minime cedet, nec per ejus vim è loco suo dimovebitur; at lapis, cui non tanta inest resistendi vis, versus equum promovebitur.

5. In attractionibus magneticis, non solum magnes trahit ferrum, verum & æqualiter vicissim ab ipso ferro trahitur; quod experientia constat: imponatur enim magnes suberis frusto B, & ferrum A similiter alio suberis frusto imponatur, ut tam magnes quam ferrum aquæ innatent: deinde manu teneatur magnes, & ferrum videbimus ad magnetem accedere, si vero ferrum immobile teneatur, ad illud accedere magnetem deprehendemus; sed si utrumque corpus aquæ libere innatare permittatur, magnes & ferrum sibi mutuo obviam ire conspicientur, & attractionis vis in utrumque æqualiter aget, æquales motus in utroque producendo: dico motus æquales fore; non item celeritates, nisi ferrum & magnes ejusdem sint ponderis; si enim diversi sint ponderis, quod magis ponderat minorem habebit celeritatem. *e. g.* Si magnes sit ferro decuplo ponderosior, ferrum vicissim decuplo majorem velocitatem habebit; ut scil. æquales motuum quantitates in utroque corpore generentur, adeoque non convenient magnes & ferrum in medio puncto E, sed in puncto D, quod ita dividet distantiam BA, ut BD sit ad DA ut pondus A ad pondus B; sic in allato exemplo, si BD sit totius distantiæ pars undecima, punctum D erit ubi magnes & ferrum sibi mutuo occurrent: cum enim BD sit pars undecima distantiæ BA; erit BD ad DA ut 1 ad 10; sed ut 1 ad 10 ita (per superius dicta) erit velocitas corporis B ad TAB. 4. *fig.* 3.

 velo-

velocitatem corporis A; quare cum ſpatia percurſa in dato tempore ſint velocitatibus proportionalia, tempore quo corpus A percurret ſpatium AD, corpus B cum decimâ velocitatis parte latum percurret ſpatium æquale decimæ iſtius ſpatii parti; adeoque in puncto D poſt illud tempus reperietur, in quo igitur puncto magnes & ferrum ſibi mutuo occurrent. Eodem modo duo magnetes ſuberis diverſis particulis impoſiti, ſi eorum poli amici invicem obvertantur, æqualiter ſeſe mutuo attrahent: ſi vero poli inimici ſibi invicem juxta ponantur, poli hi ſeſe mutuo fugient, & quantitates motuum, vi fugæ productæ, in utroque æquales erunt.

Tab. 4. fig. 4. 6. In aliis attractionibus idem oſtenditur. Sint enim duæ cymbæ A & B aquæ innatantes, & homo in illarum una *v. g.* in A poſitus ope funis verſus ſe trahat cymbam alteram B; non ſolum hac tractione B accedet ad A, verum etiam A verſus B æqualiter trahetur; & quantitates motuum, attractione productæ, in utraque cymba æquales erunt: unde ſi cymbæ pondere ſint æquales, cæteris paribus, æquales habebunt velocitates, & in medio puncto E convenient. Sin una illarum altera major ſit, hoc eſt, majorem habeat in ſe materiæ quantitatem ſeu majus pondus, quæ major eſt minus habebit velocitatis; *e. g.* ſi cymba B ſit decuplo major cymba A, velocitas ipſius A decuplo major erit velocitate cymbæ B, & cymbæ convenient in puncto G, quod ita dividit illarum diſtantiam primam AD, ut AG ſit decuplo major quam GD; hoc eſt, erit GD pars undecima totius diſtantiæ AD; ſi vero B ſit navigium millecuplo vel decem-millecuplo majus quam A, ipſius velocitas erit millecuplo vel decem-millecuplo minor velocitate A, adeoque vix ſenſibilis. Si jam B ſit aliud corpus infinite magnum, illius velocitas erit infinite parva, hoc eſt, prorſus nulla reſpectu velocitatis ipſius A. Hinc ſi funis littori alligetur, & homo in cymba per funem trahat ad ſe littus, cymba ad littus accedet, & littus ad cymbam; cum vero littus reliquæ terrenæ moli firmiter adhæret, ejus magnitudo, quæ eadem eſt cum totius terræ magnitudine, reſpectu cymbæ erit valde immenſa & tantum non infinita, adeoque ejus velocitas erit fere infinite

finite exigua & (ut dicam) nulla; ac proinde littus potest tanquam firmus obex considerari qui cedere nescit, & tota velocitas tanquam cymbæ inhærens æstimari potest. Si navigii B pondus sit mille talentorum & feratur versus F cum velocitatis gradibus centum, erit (per Theor. tertium) momentum illius navigii partium centum millium: si jam navigio B alligetur cymba A, cujus pondus sit decem talentorum, quicquid motûs communicatur hac ratione cymbæ A, tantundem decedit navigio B.

7. Si quis in cymba A trahat funem AE, per quem navigio B alligatur, ita ut hac tractione cymba promoveatur cum quingentis velocitatis partibus, erit motus exinde ortus 5 millium partium, & tantundem sui motus amittet navigium B; cui proinde restabunt motus partes nonaginta quinque mille, unde erit velocitas navigii B partium nonaginta & quinque.

8. Si quis in navigio A sedens per contum aut aliud ejusmodi instrumentum pellat aut protrudat navigium B versus partes F, per illam trusionem retro cedet etiam navigium A versus partes contrarias, ita ut in utroque navigio æquales sint motus quantitates, quæ ab hominis propellentis vi oriuntur; unde si navigium B sit decuplo majus navigio A, decuplo minorem habebit velocitatem; si centuplo sit majus, habebit vicissim centesimam partem velocitatis navigii A; adeoque si B sit corpus quodvis immensum, erit velocitas navigii A immensa respectu illius quæ inveniri debet in cymba B; unde si quis in nave sedens per contum terram & littus à se protrudat, recedet hac trusione navis à littore; littus enim tanquam corpus immensum & firmus obex respectu navis considerari potest, cujus proinde velocitas erit minima aut plane nulla respectu illius quæ in navigio reperitur.

Si navigium EDG remis agatur, cum aqua per remorum palmulas AB retro pellitur versus partes C, illa rursus æqualiter in remos reaget, eosque una cum navigio cui affixi sunt versus partes H propellet, ob quam solam causam promovebitur navigium; si enim nulla esset reactio, & aqua nullum imprimeret motum remis versus partes H, cum ipsa in con- TAB. 4. fig. 5.

tra-

trarias partes per remos truditur, subsisteret navigium; quandoquidem nihil esset quod illud versus plagam H propelleret: verum cum aqua reagendo tantum motûs imprimit navigio ED quantum ipsa exinde per remos acceperit, hinc sequitur, quo majores sunt remorum palmulæ, vel numero plures, cæteris paribus, vel etiam quo celerius intra aquam agantur, eo concitatiori impetu progredi navigium.

Hinc cum natatio nihil aliud sit quam brachiorum pedumque remigium, facile intelligitur cur intra aquas promovemur natando; cum scil. per manuum pedumque palmas aqua impellitur retrorsum, illa reagendo in contrariam plagam natantes propellet, ita ut motus in aquâ genitus æqualis sit motui, quo natantes progrediuntur. Idem etiam dicendum est de avium volatu; cum enim aves per alas suas aërem deorsum feriunt, aër reagendo eas sursum elevabit; si versus orientem aërem pellant, reactio aëris ipsas in occidentem tendere cogit. Sic pulvis pyrius intra tormentum bellicum accensus rarefit, & vi suâ æqualiter agit in globum missilem & tormentum unde globus expellitur; aër enim rarefactus in omnem partem se expandere satagens, æqualiter tam tormentum retrorsum quam globum antrorsum urgebit, & inde elater in utroque æquales motûs quantitates producet; & dividendo has motuum quantitates tam per pondus tormenti quam per pondus globi, velocitates exinde ortæ erunt ponderibus reciproce proportionales.

Cum omnia corpora in superficie terræ posita versus terram gravitent, vicissim tellus in corpora singula gravitabit & versus illa attrahetur, & motus hac attractione geniti, cum in terra tum in corporibus gravibus descendentibus, æquales erunt; ita si lapis vi gravitatis suæ deorsum ad terram cadat, terra vicissim ad lapidem assurget: cum vero quantitas materiæ in terra immense superat quantitatem materiæ in lapide, velocitas lapidis vicissim immense superabit velocitatem quâ terra ad lapidem tendit, adeoque (si physice loquamur) velocitas terræ nulla erit, quod calculo sic patebit: ponamus lapidem centum pedum solidorum versus terram descendentem; spatium à lapide tempore unius mi-

nu-

nuti ſecundi decurſum erit quindecim circiter pedum: ſed (juxta illos qui de terræ dimenſione ſcripſerunt) tota globi terraquei moles continet pedes ſolidos 30 000 000 000 000 000 000 000; ponamus jam terram ubique eſſe ejuſdem denſitatis cum vulgaribus lapidibus (quamvis omnino credibile eſt ipſam eſſe multo denſiorem.) Unde erit materiæ quantitas in terra, ad quantitatem materiæ in lapide centum pedum, ut 300 000 000 000 000 000 000 ad 1; proinde dum lapis centum pedum gravitate impulſus deſcendere debet per ſpatium quindecim pedum, terra verſus lapidem trahetur per unius pedis partes $\frac{15}{300\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000}$ quæ tantilla eſt quantitas ut ipſam imaginandi vim effugiat: & proinde in Phyſica negligi poteſt & pro nulla haberi, quamvis Geometrice & ſecundum veritatem loquendo, dicendum eſt terram ad lapidem accedere, & utrumque corpus æqualiter ſe mutuo trahere.

Si luna per gravitatem in ſua orbita detineatur ne à terra recedat; hoc eſt, ſi luna verſus terram gravitet, terra viciſſim & omnes ejus partes verſus lunam gravitabunt, & hinc continuus orietur fluxus atque refluxus maris: ſed hoc obiter, alibi enim motum maris fuſius explicabimus.

Sit navis in aquâ quieſcens, quæ facile à quolibet impulſu externo moveri poteſt, nulla tamen eſt vis intra navem agens, eique ſolum innitens, quæ ipſam promovere poteſt: ſit enim GH navis, & ponatur intra navem machina quævis, Tab. 4.
v. g. corpus elaſticum ABC, quod vehementer conſtrictum *fig.* 6.
reſilire per ſe poteſt; porro compreſſa machina, latus BC approximabitur lateri AB; elater naturali ſua energia ſeu vi ſua reſtitutiva ſe utrinque æqualiter explicare ſatagens, æqualiter impellet tabulatum DA verſus G, & tabulatum EF verſus H; & proinde navis duobus hiſce contrariis & æqualibus motibus impulſa non movebitur: eodem plane modo, ſi quis in prora ſtans ad H per funem trahat ad ſe puppim G, funis utrinque diſtentus relaxandi ſe conatu æqualiter urgebit puppim verſus hominem trahentem, & trahentem verſus puppim; cumque trahens ipſi proræ inſiſtit, prora viciſſim ad puppim

æqualiter trahetur, unde & hi duo motus contrarii & æquales se invicem destruent, & nullus sequetur motus.

Ex hac lege sequentia demonstrantur Theoremata.

THEOR. XVIII.

Si corpus unum alteri vel quiescenti vel secundum eandem directionem tardius moto impingat, summa motuum in utroque corpore versus easdem partes eadem manebit post impactum quæ fuit ante impactum.

Tab. 4. fig. 7 Moveatur Corpus A secundum directionem CD à C versus D, atque in aliud corpus B impingat, quod vel quiescat vel secundum eandem directionem tardius moveatur: dico summam motuum in utroque corpore versus easdem partes, à C scil. versus D, ante & post impulsum eandem manere. Exponat CD motum corporis A, & si corpus B moveatur, recta EF motum ejus exponat versus easdem partes, & proinde summa motuum per summam rectarum CD, EF exponetur: cum jam actio & reactio æquales semper sint & contrariæ, æquales vires versus contrarias partes impressæ, æquales in utroque corpore producent motuum mutationes versus contrarias plagas; si igitur motus per impactum corporis A ipsi B impressus repræsentetur per FG, vis contraria & æqualis in corpus A agens tantundem subducet de ejus motu versus easdem partes facto; adeoque ponendo DK ipsi FG æqualem, erit CK ut motus corporis A & EG ut motus corporis B post occursum; & proinde summa motuum erit ut summa rectarum CK, EG: cum autem FG sit æqualis KD, si utrisque addantur EF & CK, erunt EG & CK æquales ipsis CD, EF: unde eadem manebit summa motuum versus easdem partes & ante & post impulsum. Tab. 4. fig. 8. Si FG sit æqualis CD, punctum K coincidet cum C & CK æqualis erit nihilo; unde post impulsum quiescet corpus A. Tab 4. fig. 9. Si vero FG major sit quam CD, punctum K cadet ultra C, & motus ipsius A erit negativus seu versus contrarias partes factus à C versus K, & summa motuum versus partes G factorum, erit ut EG dempto CK; nam summa duarum quantitatum, quarum una est positiva, altera negativa, est ipsarum differentia. Quoniam autem $FG = KD$, utrique addatur $EF - CK$, & erit $EF + FG - CK$, hoc est $EG -$

CK

CK = KD + EF − CK, hoc eſt EF + CD; unde ſumma motuum verſus eaſdem partes, quæ hic eſt differentia motuum verſus contrarias partes factorum ante & poſt impactum, eadem manet. Q. E. D.

Cor. Eodem modo ſi plura corpora verſus eaſdem partes mota in ſeſe impingant, ſumma motuum verſus eaſdem partes non mutabitur.

THEOR. XIX.

Si duo corpora ad partes contrarias mota ſibi mutuo directe occurrant, ſumma motuum ad eandem partem (quæ eſt differentia motuum ad partes contrarias factorum) ante & poſt occurſum verſus eandem ſemper partem eadem perſeverabit.

Moveatur corpus A à C verſus D, cujus motus exponatur per CD; B vero in contrariam partem ſcil. ab E ad F moveatur, cum motu ut EF; ponatur DH ipſi EF æqualis; eritque CH, quæ eſt differentia motuum ad partes contrarias, ut ſumma motuum factorum ad partem G; dico eandem CH eſſe ut ſumma motuum verſus eandem partem G poſt occurſum. Sit enim motus corporis B poſt impactum verſus partem G, & per rectam EG repræſentetur; vis igitur impulſus in corpus B verſus partem G impreſſa, æquipollebit ſummæ motuum EF, EG, & per rectam FG repræſentabitur; nam per illam vim deſtruitur motus ut EF, verſus partem F, & novus ut EG imprimitur verſus contrariam partem G; cum vero vis impulſus æqualiter in utrumque corpus agit verſus contrarias partes, ſi fiat DK æqualis ipſi FG, hæc repræſentabit vim in corpore A exercitam verſus contrariam ejus motui plagam; adeoque ſi motus ut DK ſubducatur à motu ut CD, reſtabit CK ut verus motus corporis A verſus partem G. Jam cum DK æqualis ſit FG, & DH æqualis FE, erit DK demptâ DH, hoc eſt KH æqualis FG demptâ FE, hoc eſt EG: & proinde cum ſit KH æqualis EG, erit KH ut motus corporis B poſt occurſum; ſed CK eſt ut motus corporis A, adeoque CK, KH, *i. e.* CH erit ſumma motuum in utroque corpore verſus partem G. Q. E. D. Si FG ſit æqualis CD, cadet punctum K in C, & motus A erit æqualis nihilo, hoc eſt, quieſcet corpus A poſt impactum, & CH erit æqualis EG.

TAB. 4. *fig.* 10.

TAB. 4. *fig.* 11.

Tab. 4. fig. 12. EG. Si vero FG major sit quam CD, punctum K cadet ultra C ad alteram partem, & motus corporis A erit à C versus K: est vero (ob FG æqualem ipsi DK & FE æqualem DH) KH æqualis ipsi EG, & proinde si ab utraque dematur CK, erit CH æqualis rectæ EG demptâ CK; sed CH erat ut summa motuum versus partem G factorum ante occursum, & est EG demptâ CK ut summa motuum versus eandem partem factorum, differentia scil. motuum versus contrarias partes post occursum. Quare eadem manebit summa motuum versus eandem partem ante & post impactum.

Duo hæc ultima Theoremata simul & iisdem verbis sic optimè à *Newtono* enuntiantur.

Quantitas motus, quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias partes, non mutatur ab actione corporum inter se.

Lectio XIII.

Definitiones Secundæ.

I. *Centrum Gravitatis cujusque corporis est punctum illud intra corpus positum, per quod si utcunque incedat planum, quæ utrinque sunt corporis gravis Segmenta circa planum illud librata æquiponderabunt.*

Hinc, si corpus ex centro suæ gravitatis suspendatur, situm quemcunque datum retinebit; cum scil. partes corporis circa centrum undique æqualium momentorum consistunt, seu æquales habent ad motum propensiones.

II. *Duorum corporum commune gravitatis centrum vocamus punctum in recta ipsorum centra conjungente ita situm, ut distantiæ corporum ab illo puncto sint in ratione reciproca corporum.*

Tab. 4. fig. 13. Sint duo corpora A, B, quorum gravitatis centra conjungat recta AB, quæ ita sit in C divisa, ut AC sit ad BC, ut corpus B, hoc est, materia in B ad corpus A vel materiam in A; punctum illud C dicitur commune corporum A & B centrum gravitatis; ideo scilicet, quia si corpora illa circa punctum illud in iisdem ab ipso distantiis rotarentur, situm quem-

quemcunque datum retinerent; (ut demonstratum est in Theoremate 11.)

III. *Similiter, si sint tria corpora* A, B, D, *sitque* C *centrum gravitatis duorum* A & B, & *dividatur recta* CD *in* E, *ita ut* CE *sit ad* DE *ut pondus corporis* D *ad pondus duorum* A & B *simul, dicitur punctum illud* E *trium horum corporum commune gravitatis centrum; circa quod etiam corpora illa rotata situm quemcunque datum retinerent.* TAB. 4. fig. 14.

IV. *Eodem modo, si sint quatuor corpora* A, B, D, F, & *sit* E *commune centrum gravitatis trium illorum* A, B, D; *punctum* G, *quod ita dividat rectam* EF *ut* EG *sit ad* GF *ut pondus corporis* F *ad pondus corporum* A, B, D *simul, vocatur horum quatuor commune centrum gravitatis.* TAB. 4. fig. 15.

Atque eodem modo quinque aut plurium corporum commune centrum gravitatis definitur.

V. *Corpus unum dicitur alteri directè impingere, cum recta secundum quam movetur, per impingentis centrum gravitatis & punctum contactus ducta, sit superficiei corporis in quod impingitur perpendicularis; aut etiam si non in puncto, sed in linea seu superficie sese tangant, cum recta illa sit huic sive lineæ sive superficiei perpendicularis.*

VI. *Obliquè autem seu indirectè impingere dicitur, cum prædicta recta superficiei corporis, in quod impingit, non sit perpendicularis.*

VII. *Corpus perfectè durum appello, quod ictui nequaquam cedit; hoc est, quod ne pro minimo tempore figuram suam amittit.*

VIII. *Corpus molle est, quod ictui ita cedit, ut pristinam figuram amittat, & nunquam se ad eandem restituere conatur.*

IX. *Corpus elasticum est, quod ictui aliquantisper cedit, se tamen in pristinam figuram, sua sponte restituit.*

X. *Vis elastica est vis illa, quâ corpus de figura sua detrusum sese in pristinam figuram restituit.*

XI. *Corpus perfectè elasticum est quod se eadem vi in pristinam figuram restituit, quâ ab eâ dimotum est.*

THEOR. XX.

Si duo vel plura corpora motu æquabili, secundum eandem vel *contrarias partes ferantur, commune illorum centrum gravitatis, ante mutuum occursum, vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum.*

TAB. 4. fig. 16. *Casus primus.* Corpora A & B versus partes contrarias cum motibus æqualibus tendant, quorum commune gravitatis centrum sit C. Ob æqualem in utroque corpore motus quantitatem, erit velocitas corporis A ad velocitatem corporis B ut corpus B ad corpus A; hoc est, (ex natura centri gravitatis) ut AC ad BC; unde, cum spatia eodem tempore percursa sint velocitatibus proportionalia, dum mobile A percurrit longitudinem AC, longitudo BC percurretur à mobili B; adeoque concurrent corpora in puncto C, & in eo puncto erit ipsorum gravitatis centrum tempore concursus: sed & ante concursum in eodem erat puncto, adeoque in eodem permansit loco.

Eodem modo, si corpora cum æqualibus motibus à puncto C recederent, ostendetur ipsorum gravitatis centrum quiescere.

Casus secundus. Si corpora in eadem recta versus eandem partem, vel inæqualibus motibus versus contrarias ferantur, illorum commune gravitatis centrum semper in eadem recta invenietur. Cum enim corpora uniformiter directè à sese recedant vel ad sese accedant, ipsorum à se invicem distantia uniformiter augebitur vel minuetur, & proinde corpora à puncto quovis prædictam distantiam in data ratione dividente uniformiter recedent, vel ad ipsum uniformiter accedent. Corporum igitur distantia à communi gravitatis centro uniformiter augebitur vel minuetur; quod fieri non potest, in prædictis casibus, nisi centrum illud vel quiescat (ut in primo casu) vel uniformiter moveatur, ut in præsenti casu.

TAB. 5. fig. 1. *Casus tertius.* Moveantur corpora A & B in rectis AC, BD; sintque spatia à corpore A in æqualibus temporibus percursa AC, CE æqualia, & spatia à corpore B in iisdem temporibus percursa BD, DF quoque æqualia: concurrant rectæ AC, BD in G; & fiat ut AC ad BD ita AG ad GH; & jungatur AH, cui per C & E parallelæ ducantur CI, EK; erit AC ad HI ut AG ad GH, hoc est, ut AC ad BD; quare est HI = BD, & pro-

proinde HB = ID. Similiter est CE ad IK ut AG ad GH vel AC ad BD, hoc est, ut CE ad DF; quare est IK = DF, unde & KF = ID = HB. Sit L commune gravitatis centrum, cum corpora in punctis A & B locantur; ducatur LM ad BD parallela & erunt rectæ AB, AH similiter sectæ; jungatur GM & producatur; hæc secabit parallelas ipsi AH in punctis N & O; in eadem scilicet ratione quâ secta est AH vel AB; ducantur per N & O ad BD parallelæ NP, OQ; hæ secabunt CD, EF in eadem ratione quâ sectæ sunt CI, EK, hoc est in ea ratione quâ secta est AB in L; sed L est commune centrum gravitatis, cum corpora in A & B reperiantur; quare erit P ipsorum centrum, cum in punctis C & D fuerint, & Q illorum est centrum, cum corpora sint in punctis E, F. Præterea est ML ad HB ut AM ad AH, vel ut CN ad CI, seu ut NP ad ID; sed sunt HB & ID æquales; quare & ML, NP æquales erunt; similiter NP & OQ æquales erunt: cum igitur rectæ ML, NP, OQ æquales sint & parallelæ, recta per L ducta & ad MO parallela transibit per puncta P & Q, & proinde centrum gravitatis semper in recta LQ locabitur: præterea (ob parallelas) est AC ad CE ut MN ad NO, hoc est, ut LP ad PQ; (quare ob AC = CE) erit LP = PQ. Semper igitur in eadem recta est corporum commune gravitatis centrum, & in æqualibus temporibus æqualia percurrit spatia. Q. E. D.

Casus quartus. Si corpora non in uno aliquo sed in diversis planis moveantur, ipsorum viæ & via communis centri gravitatis reducendæ sunt ad idem planum, demittendo à punctis viarum singulis perpendicula in planum quodvis, & (similiter ac in præcedenti casu) demonstrabitur viam centri gravitatis sic reductam esse lineam rectam; cumque hoc in plano quovis ad libitum assumpto fit, necesse est ut ipsa via seu semita centri gravitatis corporum sit linea recta. Q. E. D.

Similiter commune centrum horum duorum corporum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta, propterea quod ab ipso dividitur distantia centri communis gravitatis duorum corporum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium corporum & quarti cujusvis vel quiescit, vel

vel progreditur in linea recta, propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum corporis quarti in eadem semper ratione; & sic de aliis quotcunque corporibus. Q. E. D.

THEOR. XXI.

Si duo corpora, utcunque æqualia vel inæqualia, versus eandem partem, celeritatibus utcunque æqualibus vel inæqualibus ferantur, summa motuum in utroque corpore æqualis erit motui, qui oriretur si utrumque corpus cum celeritate communis centri gravitatis latum esset.

Tab. 4. fig. 17. Sint duo corpora A & B, quorum commune gravitatis centrum sit C, & utrumque corpus feratur versus D; dico summam motuum in utroque corpore æqualem fore motui; qui produceretur si utrumque corpus cum celeritate centri gravitatis C versus D latum esset. Describat enim corpus A in dato quovis tempore longitudinem A*a*, corpus B longitudinem B*b*, & via à gravitatis centro C interea percursa sit CG: & (per Theor. 6.) longitudines A*a*, B*b*, CG simul descriptæ repræsentabunt celeritates corporis A, corporis B, & communis centri gravitatis C respective. Per Corol. autem Theor. 3. motus quantitas in quovis corpore est ut rectangulum factum ex materia & celeritate, adeoque erit motus in corpore A ut $A \times Aa$; & in corpore B, ut $B \times Bb$; & summa motuum erit ut summa horum rectangulorum, scil. ut $A \times Aa + B \times Bb$. Est vero (per Definit. centri gravitatis corporum) BC ad AC ut A ad B, & ut A ad B ita etiam (per eandem definitionem) *b*G ad *a*G; quare erit BC ad AC ut *b*G ad *a*G; unde (per 19. Elementi quinti) BC est ad AC, hoc est A ad B, ut $BC - bG$ ad $AC - aG$; hoc est, ut $CG - Bb$ ad $Aa - CG$; adeoque (per 16. El. 6.) $A \times Aa - A \times CG$ æquale erit $B \times CG - B \times Bb$; & proinde $A \times Aa + B \times Bb$ æquale erit $A \times CG + B \times CG$: sed duo rectangula $A \times Aa$ & $B \times Bb$ sunt (uti dictum est) ut summa motuum in utroque corpore; & duo rectangula sub A & CG & sub B & CG erunt ut summa motuum qui orirentur, si utrumque corpus cum celeritate CG centri gravitatis latum esset;

unde

unde erit ſumma motuum in utroque corpore æqualis motui qui produceretur, ſi utrumque corpus cum celeritate communis centri gravitatis latum eſſet. Q. E. D.

Si tria ſint corpora A, B, D, ad eandem partem lata, quorum trium commune gravitatis centrum ſit E; erit ſumma motuum in tribus corporibus æqualis motui orto ex corporibus iiſdem cum velocitate puncti E latis. Sit enim C commune centrum gravitatis duorum quorumvis A & B; erit (per ſuperius demonſtrata) motus in duobus hiſce corporibus æqualis motui, qui oriretur, ſi utrumque corpus in unum coaleſcens cum velocitate puncti C latum eſſet; ſed etiam ſumma motuum (ſcil. motus corporum ſic coaleſcentium & motus tertii corporis D) æqualis erit motui, qui fieret, ſi corpus ex duobus coaleſcens una cum corpore tertio D moveretur cum celeritate puncti E; unde liquet in hoc quoque caſu Theorema. TAB. 4. fig. 14.

Eadem eſt demonſtratio, ſi corpora non in eadem recta, ſed in parallelis vel etiam in rectis quomodocunque inclinatis moveantur. Sed in hoc caſu notandum eſt celeritatem corporum, qua verſus eandem plagam cum centro gravitatis feruntur, non æſtimari à via quam revera percurrunt, ſed ſolum à via in quam ſecundum directionem centri gravitatis promoventur; *v. g.* ſi duo corpora A & B in rectis A*a*, B*b* ferantur, ſitque CG linea à communi centro gravitatis deſcripta, interea dum corpora percurrunt longitudines A*a*, B*b*, & dimittantur à punctis A, *a*, B, *b*, in rectam CG perpendiculares AF, *ag*, BH, *b*K; ſpatia jam quæ ſecundum directionem puncti C corpora percurrunt non ſunt A*a*, B*b*, quæ ſunt ſpatia abſoluta ab iiſdem deſcripta; verum ſpatium ſecundum quod promovetur corpus A verſus plagam D computandum eſt in recta FD, per longitudinem F*g*; tantum enim & non amplius ſecundum directionem puncti C progreditur. Similiter ſpatium ſecundum quod promovetur corpus B verſus plagam D eſt HK, & per illud ſpatium ejus in recta HD progreſſus æſtimatur; adeoque celeritates corporum quibus verſus eandem partem feruntur ſunt ut rectæ F*g*, HK: eſt præterea A ad B ut BC ad AC, ſeu TAB. 5. fig. 2.

(ob æquiangula triangula ACF, BCH) ut HC ad FC; unde similiter procedet demonstratio ac in primo casu.

THEOR. XXII.

Si duo corpora versus contrarias partes ferantur, erit differentia motuum ad partes contrarias factorum, vel, quod idem est, summa motuum ad eandem partem, æqualis motui qui produceretur, si utrumque corpus versus eandem plagam, cum celeritate communis gravitatis centri, latum esset.

Tab. 4. fig. 18. Sint corpora A & B quorum gravitatis centrum commune sit C, & moveatur corpus A ab A versus D, & corpus B versus contrariam plagam à B versus E; sint spatia à corporibus A, B & centro C simul descripta Aa, Bb, CG; hæc (per Theor. 6.) repræsentabunt velocitates corporis A, corporis B & centri gravitatis C respective; unde est motus corporis A ut $A \times Aa$, & motus corporis B ut $B \times Bb$, unde differentia motuum erit $A \times Aa - B \times Bb$: porro ex natura centri gravitatis, est BC ad AC ut A ad B, & ut A ad B ita erit bG ad aG, quare erit ut BC ad AC ita bG ad aG; adeoque erit (per 19. El. 5.) BC ad AC, hoc est A ad B, ut $BC - bG$ ad $AC - aG$, id est, erit A ad B ut $Bb + CG$ ad $Aa - CG$; quare erit (per 16. El. 6.) rectangulum sub A & $Aa - CG$ æquale rectangulo sub B & $Bb + CG$; hoc est, $A \times Aa - A \times CG = B \times Bb + B \times CG$; unde erit $A \times Aa - B \times Bb = A \times CG + B \times CG$; sed $A \times Aa - B \times Bb$ est (uti dictum est) differentia motuum versus contrarias partes, vel summa motuum versus eandem; & $A \times CG + B \times CG$ est motus emergens, si utrumque corpus cum velocitate communis ipsorum centri gravitatis latum esset, unde liquet propositum.

Cor. 1. Si differentia motuum versus contrarias partes sit nihilo æqualis; hoc est, si in utroque corpore sint motuum quantitates æquales, commune gravitatis centrum in hoc casu quiescit.

Cor. 2. Si sint plura corpora, vel omnia versus eandem vel quædam in contrarias partes lata, summa motuum ex omnibus versus eandem partem eadem erit, ac si omnia ad eam partem cum velocitate communis omnium gravitatis centri lata essent.

Cor.

Cor. 3. Corporum igitur plurium motus ex motu centri gravitatis æstimandus est; & tantum eorum systema progreditur vel regreditur, tantum ascendit vel descendit, quantum commune ipsorum gravitatis centrum progreditur vel regreditur, ascendit aut descendit.

THEOR. XXIII.

Si corpora in se invicem impingant, vel etiam utcunque in sese agant, communis illorum gravitatis centri status vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, non exinde mutabitur.

Si corpora in se invicem impingant, (per Theor. 19.) summa motuum versus eandem partem eadem manet ante & post impulsum; sed (per Theor. 21. & 22.) summa motuum ante & post impulsum eadem est, ac si corpora omnia cum velocitate communis gravitatis centri ad eandem cum ipso partem lata essent; quare cum eadem corpora habent motuum summas ante & post impulsum sibi invicem æquales, & etiam æquales motui orto ex omnibus simul cum velocitate communis gravitatis centri latis, liquet velocitatem communis gravitatis centri ante & post impulsum eandem manere. Q. E. D.

Hucusque leges quasdam generales ad corporum quorumcunque motus determinandos inservientes tradidimus: ad alias jam speciales congressuum regulas devenimus, quibus scil. corpora singula post occursum, & mutuum in se invicem impactum, motus suos continuant, & versus quas partes, & cum quibus velocitatibus singula tendant. Verum ob variam corporum structuram, prout scil. elastica vi pollent vel destituuntur, pro diversis corporum generibus regulæ congressuum diversæ erunt; & quamvis nullum fortasse detur corpus, quod sit vel perfecte durum, vel perfecte molle, vel perfecte elasticum, (omnia enim corpora aliquid ex hisce omnibus fortasse in se continent) id tamen non impedit, quin qualitates istas abstractione mentis separare possimus, & corpus considerare tanquam unâ solummodo ex hisce qualitatibus præditum: & motus corporum eo magis ad regulas infra tradendas accedunt, quo magis corpora ipsa ejusmodi qualitatibus & conditionibus gaudent.

Supponimus hic corpora ab aliis omnibus ita esse divisa, ut eorum motus ab aliis circumjacentibus nec impediantur, nec juventur.

THEOR. XXIV.

Si corpus durum vel molle, corpori duro vel molli directe impingat, sive illud in quod impingat quiescat sive versus eandem partem tardius moveatur, seu demum versus contrariam, sintque motus inæquales; utrumque corpus post impactum una cum communi gravitatis centro junctim movebitur.

TAB. 4. fig. 19. Impingat corpus A in corpus B; quod vel quiescat, vel versus eandem plagam tardius, vel versus contrariam cum minore motu feratur; dico utrumque corpus post impulsum eadem celeritate unà cum communi gravitatis centro junctim moveri. Cum enim corpus B non impediatur ab aliis corporibus circumjacentibus, (per legem secundam) à vi in ipsum per corpus A impressâ movebitur versus eas partes, in quas fit virium directio; sed & junctim movebitur cum corpore A: non enim tardius moveri potest, ob corpus insequens A; non celerius, quia nulla alia, ex hypothesi, præter impellens A datur hujus motus causa; cum alia omnia, ut vis elastica & ambiens fluidum, nihil agere supponuntur; adeoque post impactum cum communi ipsorum centro gravitatis utrumque corpus junctim movebitur. Q. E. D.

Cor. Si corpora ponantur concurrere in D, cum velocitates mobilium sunt spatia simul descripta, velocitates corporis A, corporis B, & centri gravitatis C ante concursum erunt ut rectæ AD, BD, CD, respectivè; hæ enim longitudines simul percurruntur.

PROB. II.

Corporum durorum aut mollium post directum impactum determinare motus.

TAB. 4. fig. 20. 21. 22. 23. 24. 25. Omnes hujus Problematis casus eâdem operâ construemus. Sint igitur duo corpora A & B, quorum gravitatis centrum sit C, ponantur corpora concurrere in D; erunt (per præcedens Corol.) celeritates ante impactum corporis A, corporis

poris B, & communis centri gravitatis C, ut rectæ AD, BD & CD respective; fiat jam DE æqualis DC, hæc repræsentabit velocitatem corporum post occursum; hoc est, erit velocitas corporis A ante impulsum ad ejusdem velocitatem post, ut AD ad DE; & velocitas corporis B ante impactum, erit ad ejus velocitatem post impactum, ut BD ad DE: nam (per Theor. 19.) corpora A & B post impulsum una cum centro gravitatis progrediuntur: sed (per Theor. 18.) celeritas centri gravitatis eadem manet ante & post impulsum, & versus eandem semper plagam; quare si CD repræsentet ejus celeritatem ante impulsum, DE ipsi CD æqualis ejus velocitatem post impulsum exponet; adeoque DE exponet quoque celeritatem corporum A & B quæ unà cum centro C progrediuntur post impulsum. Q. E. D.

Cor. 1. Si corpus B quiescat, coincidet punctum D cum B, ut in 20. figura: & quia B est ad A ut AC ad BC vel DE, erit componendo A + B ad A ut AB vel AD ad DE; hoc est, velocitas corporis A ante impactum est ad ejusdem velocitatem post, ut summa corporum ad corpus impingens A. TAB. 4. *fig.* 20.

Exemplum 1. Si A sit æquale quiescenti B, erit A + B ad A ut 2 ad 1, adeoque velocitas corporis impingentis erit dupla ipsius velocitatis post impactum.

Exemplum 2. Si A sit ad B ut 1 ad 9, erit A + B ad A ut 10 ad 1; ideoque velocitas post impulsum erit tantum pars decima velocitatis ante impulsum.

Exemplum 3. Si B sit corpus infinite superans A, erit velocitas corporis A post impulsum infinite parva, hoc est, nulla; nam in eo casu A respectu A + B evanescit, & proinde velocitas corporis A post occursum quoque evanescit; hoc est, si corpus in firmum obicem impingat cedere nescium, post impactum quiescet.

Exempl. 4. Si corpus B ipsi A æquale, secundum eandem directionem tardius moveatur, erit DE vel $CD = \frac{AB}{2} + BD = \frac{AB+2BD}{2} = \frac{AD+BD}{2}$, hoc est, erit velocitas post impulsum priorum velocitatum semi-summa. TAB. 4. *fig.* 21.

TAB. 4. fig. 23. *Exempl* 5. Si corpora cum æqualibus motibus versus contrarias partes tendant, punctum D coincidit cum C, ut in Theor. 20. demonstratum fuit; & CD, DE erunt nihilo æquales, hoc est, post occursum quiescet utrumque corpus.

Cor. 2. Hinc demonstratur falsam esse *Cartesianorum* legem, qua eandem semper motus quantitatem in universo conservari volunt; nam corpora non elastica, versus contrarias partes cum æqualibus motibus in sese incurrentia, mutuos motus tollunt.

TAB. 4 fig. 24. *Exempl.* 6. Si corpora æqualia versus contrarias partes cum inæqualibus motibus tendant, erit DE vel $CD = CB - BD = \frac{AB}{2} - BD = \frac{AB - 2BD}{2} = \frac{AD - BD}{2}$, hoc est, erit velocitas post impulsum priorum velocitatum semi-differentia.

Hæc omnia ex superiori constructione facile fluunt; sed cum in praxi calculus semper adhibendus est, generalis hujus Problematis solutio per calculum sic eruitur.

Velocitas corporis A vocetur C; velocitas corporis B sit c; & si corpora secundum eandem directionem moveantur, summa motuum in utroque versus eandem plagam erit $AC + Bc$: sin versus contrarias partes moveantur, summa motuum versus eandem partem erit $AC - Bc$; sed (per Theor. 19.) in corporibus omnibus summa motuum versus eandem partem ante & post impulsum eadem manet, quare erit corporum post impulsum motus vel $AC + Bc$ vel $AC - Bc$, prout corpora ad eandem vel contrarias partes ante impulsum tendunt; datur igitur momentum corporum eâdem velocitate latorum; unde (per dicta in Lect. X.) ipsorum velocitas simul innotescet; nempe si dividatur momentum per ipsa corpora, quotiens exhibebit ipsorum velocitatem scil. $\frac{AC + Bc}{A + B}$ vel $\frac{AC - Bc}{A + B}$; & si B quiescat, hoc est si c ponatur nihilo æqualis, velocitas corporum erit $\frac{AC}{A + C}$.

Cor. 3. Cum velocitas corporis A ante impactum fuerit ut AD, & post impactum ejus velocitas sit CD, erit velocitas amissa

amissa AC, & proinde motus per ictum amissa A × AC.

THEOR. XXV.

Si corpus motum alteri sive moto sive quiescenti directe impingat; ictus magnitudo proportionalis est momento ad occursum deperdito, in corpore, si quid sit, fortiori.

Si enim intelligatur motorum corporum (si quid sit) fortius, vel, si momentorum sint æqualium, utrumvis ut percutiens, alterum ut percussum; ictus magnitudo æquipollebit vi à percutiente in percussum impressæ; sed vis illa quæ in percussum imprimitur à percutiente decidit, (per legem tertiam;) adeoque motus in corpore percutiente amissus erit vi in corpus percussum impressæ, & proinde magnitudini ictus, proportionalis. Q. E. D.

Cor. Ubi æqualia sunt momenta quæ à corporibus percutientibus decidunt, ibi æquales erunt ictuum magnitudines.

THEOR. XXVI.

Si corpus datum in aliud quiescens datum directe impingat; ictus magnitudo velocitati impingentis semper erit proportionalis.

Impingat corpus datum A in aliud datum quiescens B, cum velocitate quæ exponatur per AB; deinde impingat idem corpus A in idem quiescens B, cum alia velocitate DE; hoc est, sit AB ad DE ut prior velocitas ad posteriorem, & ponantur deinde corporum distantiæ AB, DE; quæcunque enim inter ea, initio motus, intercedat distantia perinde est quoad magnitudinem ictûs; sitque commune centrum in primo situ C, in secundo G. Cum corpus A movetur velocitate AB, erit CB ejus velocitas post occursum; & cum motus ante impactum fuit A × AB, motus post impactum erit A × CB; & motus amissus erit A × AC. Eodem modo si corpus moveatur velocitate DE, erit motus amissus A × DG, ac proinde ictûs magnitudo cum velocitate AB erit ad magnitudinem ictûs cum velocitate DE, ut A × AC ad A × DG, vel ut AC ad DG: quia autem est AC ad BC ut B ad A, erit AC ad AC + BC, hoc est AB, ut B ad A + B; & similiter erit B ad A + B ut DG ad DE, quare erit AC ad AB, ut DG ad DE, unde permutando erit AC Tab. 4. fig. 26.

ad

ad DG ut AB ad DE; hoc eſt, erit ictûs magnitudo cum velocitate AB ad magnitudinem ictûs cum velocitate DE ut velocitas AB ad velocitatem DE. Q. E. D.

Cor. Si corpus A in B irrueret, motus amiſſus eſſet $A \times AC$; ſi vero B in A cum eadem celeritate impingeret, motus amiſſus eſſet $B \times BC$, quia autem eſt ut A ad B ita BC ad AC, erit $A \times AC = B \times BC$, adeoque eadem erit quantitas motus per ictum amiſſa, ſive B cum data celeritate impingat in A, ſive A cum eadem velocitate in corpus B incurrat; adeoque eadem in utroque caſu erit ictus magnitudo.

THEOR. XXVII.

Si corpus unum in alterum, ſecundum eandem rectam, ad eandem partem ſegnius latum, directe impingat, eadem erit ictus magnitudo, ac ſi antecedens quieſceret, & inſequens in illud cum velocitatum differentia latum eſſet.

TAB. 4. fig. 27. Sint duo corpora A & B verſus eandem partem lata; quorum commune gravitatis centrum ſit C; & ponantur corpora concurrere in D: conſtat ex ſupra traditis velocitates corporum ante impulſum eſſe ut rectæ AD, BD, & proinde velocitatum differentia erit ut AB; utriuſque autem corporis poſt impactum velocitas per CD exponetur, & proinde motus deperditus in corpore A erit $A \times AC$. Si autem corpus A cum velocitate AB in quieſcens B impingeret, ipſius velocitas poſt occurſum eſſet CB, & motus amiſſus eſſet $A \times AC$; unde cum in utroque caſu eadem amittitur in percutiente motus quantitas, eadem quoque erit ictus magnitudo.

Cor. Si eadem manet velocitatum differentia, hoc eſt velocitas reſpectiva qua corpora ad ſeſe accedunt; quomodocunque augeatur aut minuatur illorum ſumma, eadem ſemper conſequetur ictus magnitudo.

THEOR. XXVIII.

Si corpora duo motibus contrariis ſibi invicem obviam veniant, ictus magnitudo eadem erit ac ſi unum ipſorum quieſceret & alterum in illud cum velocitatum ſumma impingeret.

TAB. 4. fig. 28. Sint duo corpora A & B verſus contrarias partes lata, quorum

rum commune gravitatis centrum sit C, sitque D punctum in quo concurrunt: constat velocitates corporum A & B esse ut rectæ AD, BD; & proinde velocitatum summa exponetur per AB: CD autem designat ipsorum velocitatem post impactum, & proinde motus in corpore A amissus erit A × AC. Si autem A in B quiescens impingeret cum velocitate AB; velocitas post impactum esset ut CB, & motus amissus esset A × AC. Cum igitur in utroque casu eadem motus quantitas amittitur, eadem quoque erit ictus magnitudo. Q.E.D.

Cor. 1. Si igitur eadem maneat velocitatum summa, hoc est, velocitas respectiva corporum A & B qua ad se invicem accedunt, quæcunque sit velocitatum differentia, seu quomodocunque velocitas illa inter corpora concurrentia partita sit, eadem semper erit ictus magnitudo.

Cor. 2. Est igitur ictus magnitudo in datis corporibus semper proportionalis ipsorum velocitati respectivæ.

Cor. 3. Corporum in dato spatio inclusorum iidem sunt motus inter se, sive spatium illud quiescat, sive moveatur uniformiter in directum; nam differentiæ velocitatum quibus corpora tendunt ad eandem partem, & summæ quibus ad contrarias partes tendunt, eædem sunt, sive spatium in quo corpora includuntur quiescat, sive moveatur uniformiter in directum; adeoque ictus magnitudines hisce semper proportionales existentes eædem erunt in utroque casu. Hinc in navi motus omnes eodem modo se habent, sive ea quiescat sive moveatur uniformiter in directum. Sic etiam projectorum & percussionum Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terra positos, sive cum terra junctim ferantur omnia communi motu, sive absit ille communis motus & terra quiescat; adeoque quæ afferri solebant objectiones à projectionibus inæqualibus eadem vi faciendis, prout vel ad orientem vel ad occidentem fierent; atque ab inæqualibus percussionibus à tormento bellico globum emittente futuris, prout in has vel illas partes explosio fieret; & quæ sunt ejusmodi, nihil in utramvis partem probant, sive ad quietem terræ, sive motum adstruendum.

LECTIO XIV.

SI nulla esset elasticitas, leges, quas in praecedente Lectione de percussione corporum durorum proposuimus, omnibus corporibus perfecte congruerent, & corpora omnia post impulsum junctim moverentur ad partes eas, ad quas ante percussionem tendebat corpus fortius, hoc est, cujus momentum majus erat, & cum ea celeritate quam in supradictis legibus determinavimus. Verum cum pauca admodum dentur corpora in quibus non aliquid insit elasticitatis (nam molle lutum, cera, & alia istiusmodi corpora, quasdam aëris particulas in se continent, quae ipsis virtutem aliquam elasticam reddere valeant) fit per vim illam elasticam, ut corpora non junctim post impulsum moveantur, sed à sese resiliant & diversa velocitate aliquando ad eandem, aliquando ad contrarias partes moveantur. Ut vero modus & causa hujus resilitionis intelligatur, res exemplo illustrari potest.

TAB. 5. fig. 3. Sit AB filum supra planum, in aliqua tamen ab eo distantia, extensum; cujus duae extremitates AB firmiter figantur, & filum fortiter tendatur: si jam trahatur filum per medium suum D, extremitatibus fixis manentibus, ad situm ACB ita ut punctum ejus D sit in C, & tunc dimittatur, non manebit filum in situ ACB, sed magna vi in situm priorem se restituere perget; & cum per continuam vis elasticae actionem motus satis velox in filo genitus est, fit ut cum in situm ADB pervenerit, in motu suo versus eandem partem perseverabit, donec vis elastica seu restitutiva ulteriori huic motui continuo renitens, & tandem aequipollens, ipsum destruet, & filum cum vi versus partes C urgebit, adeo ut cum rursus in situm ADB pervenerit, eandem vim habebit ulterius movendi versus C quam prius habuit tendendi versus partes E; atque sic eundo & redeundo continuas vibrationes efficiet.

Ponamus jam corpus F in filum AB irruere: filum per vim ipsi à corpore F illatam ex situ suo deturbabitur, & punctum ejus D, in quod incurrit corpus F, una cum F versus C movebitur; qui motus eo usque continuabitur, donec vis fili resti-

TAB. IV.

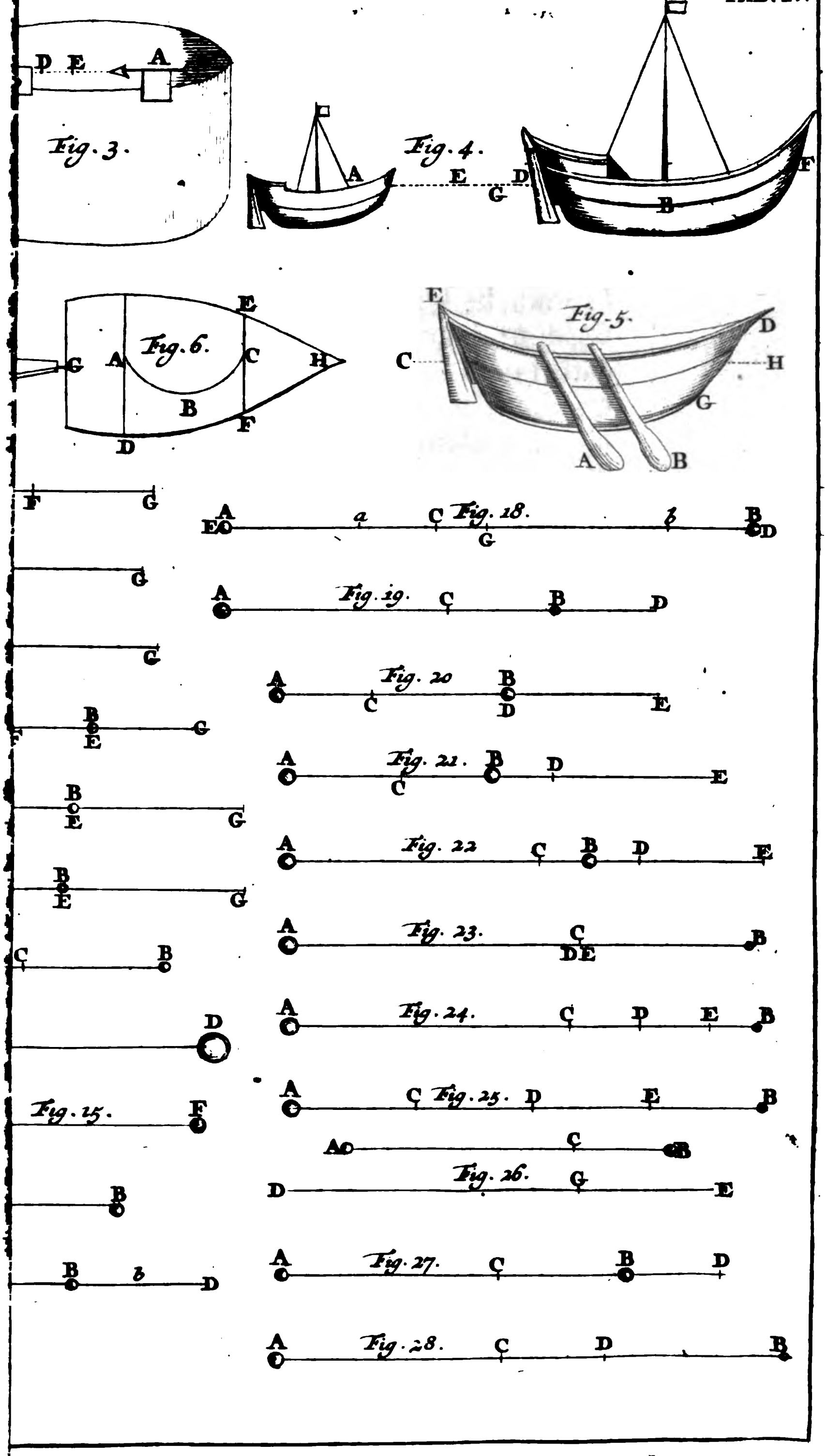


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 21.
Fig. 22
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 15.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.

restitutiva motui corporis F contraria ipsi æquipolleat; quod cum fit, destruetur motus omnis versus C: vis autem hæc elastica ulterius agens filum reducet, quod itaque corpus F urgebit, & ipsum eadem velocitate secum movebit; sed (ob fortem quam hic supponimus fili tensionem) eadem vi se restituet filum qua prius inflexum fuit: at vis qua inflectebatur momento corporis impingentis æquipollebat (nam illud omne in filo flectendo impensum fuit) adeoque filum ea vi in corpus F agendo, eandem motus quantitatem ipsi restituet quæ in flexione insumpta fuerat; adeoque corpus F, eadem velocitate quâ advenerat, regredietur, atque sic fiet reflectio.

Ponamus jam loco fili corpus aliquod elasticum AB, quod fixum & immobile supponere primo liceat; & ejus superficies ADB vi corporis ingruentis F introrsum comprimatur: quamprimum vis comprimens, hoc est, motus corporis F cessaverit, elater vi suâ insitâ in pristinam figuram se restituet, & cum ea vi corpus F urgebit versus E; & si corpus utrumvis sit perfecte elasticum, vis elateris restitutiva vi ipsum comprimenti, hoc est, momento corporis F æquipollebit, adeoque cum hac vi in corpus F agens illud cum eadem velocitate, quam prius habebat, retroire coget. Si vero corpus ADBC non sit fixum, sed in tali statu ut motus ejus à nullo alio corpore impediatur, vis elastica in utroque corpore æqualiter aget, & æquales motuum mutationes producet; nam si corpus ADB urget corpus F versus partem E, illud rursus à corpore F æqualiter urgebitur ad partem contrariam; & proinde corpora à se mutuo resilient. Atque sic demonstravimus qua ratione effectum sit, ut corpora post impulsum non junctim vel quiescant vel moveantur, sed à se invicem resiliendo diversâ velocitate contrarias aliquando ineant vias, aliquando eandem. Tab. 5. fig. 4.

Cartesiani, qui elasticitatis vim ad corpora reflectendum nesciebant, aliam plane diversam tradiderunt reflectionis causam: dixerunt enim motum motui non contrarium esse, sed directionem directioni; ideoque corpus unum in aliud incurrens reflecti, quia incurrentis motus non potest destrui, cum

 scil.

ſcil. ſecundum ipſos nihil motui contrarietur: at cum directio unius alterius directioni obſtet, incurrens poſt impulſum ad contrarias partes reflecti voluerunt, eadem ſemper manente quantitate motus in percuſſo & percutiente.

Sed facile eſt oſtendere hanc ſententiam nec rationi nec experientiæ congruam eſſe; nam cum momentum ſeu quantitas motus ſit vis ſeu energia illa qua mobile ſecundum directionem ſuam tendit, ſi corpora duo ſibi mutuo directe occurrant, vires ſecundum contrarias plagas impreſſæ contrariæ erunt; adeoque ſi æquales ſint, ſeſe mutuo deſtruent; ſi inæquales, motus qui eſt minoris efficaciæ deſtruetur. Præterea corpus unum in aliud majus quieſcens, vel ſecundum eaſdem partes ſegnius motum, impingens reflectitur; atqui hoc fieri non poteſt ob ſolam directionem directioni contrariam; ſi enim impingat corpus B in aliud majus A, quod vel quieſcit vel verſus eaſdem partes & tardius movetur, cum vis omnis quæ in utroque corpore reperitur tendat verſus C, vis illa nunquam poteſt motum verſus partes contrarias in utrovis corpore dirigere. Nam (per legem ſecundam) motus omnis fit ſecundum lineam qua vis imprimitur; atqui (ex hypotheſi) omnis vis imprimitur ſecundum lineam BC, à B verſus C: quare ſi ſolummodo per vim corporibus inſitam fieret reflectio motus, abſque nova vi, fieret motus ſecundum contrariam plagam ei qua vis imprimitur; quod fieri non poteſt. Non igitur à vi prius impreſſa oritur illa reflectio, ſed à vi elaſtica, qua pollet utrumvis corpus, quæque ſecundum partem utramvis æqualiter agens corpora à ſeſe diſcedere cogit.

Tab. 5. fig. 5.

Præterea, ſi motus motui non eſſet contrarius, multo facilius eſſet corpus ſemel motum in contrarias partes dirigere, quam penitus illud ſiſtere; in priore enim caſu motus corporis in manu reflectentis non recipitur, ſed tantum in contrarias partes vertitur: in poſteriore vero caſu, motus ille omnis in corpus reſiſtens impenditur; quod tamen eſt contra manifeſtam experientiam. Denique, ſi nihil motui contrarium eſſet, ubicunque corpus quodvis in aliud aliquod obſtaculum incurreret, fieret ſemper reflectio, quod tamen experiperientiæ repugnat; nam plumbum, lutum, cera & alia corpora elasticitatis fere expertia, si in pavimentum cadunt, non reflectuntur; cum tamen pilæ conflatæ ex lana vel plumis, globuli eburnei, marmorei, vitrei, & alia ejusmodi corpora magna elasticitatis vi pollentia, in idem pavimentum demissa fortiter resiliunt: reflectio igitur illa non è motu qui utrique corpori communis est, sed ab elasticitate, quæ solis reflectentibus peculiaris est, provenit. Quod erat ostendendum.

Sed quærent fortasse *Cartesiani*, quo pacto innotescit globos eburneos, vitreos, marmoreos, & alia reflectentia corpora, quæ durissima esse videantur, elasticitate pollere: respondeo illorum elasticitatem posse exinde concludi, quod cum percutiuntur tinnitum edunt, qui à vibrationibus corporis percussi oritur, eodem modo quo filum tensum suis vibrationibus undulationem aëris efficit; & proinde minime dubium est, quin corpora illa elatere aliquo prædita sint. Atque hoc quidem argumentum corporum vim elasticam probabilem reddit; sed aliud est argumentum, quo res hæc demonstrative probatur.

Sint enim duo globi vel eburnei vel vitrei, & si globorum figuræ essent perfecte sphæricæ, in uno tantum & indivisibili puncto sese tangerent; sed hoc nulla arte humana fieri potest: tam prope tamen ad figuras sphæricas possunt perduci, ut sese in puncto Physico, hoc est, in parte visibili minima tangant. Si jam unius globi superficies atramento (aut quovis colore qui facile detergi potest) inficiatur, & alter in ipsum quiescentem impingat, experimento constat, non punctum tantum physicum globi incurrentis, post impulsum, alterius colore tingi, sed partem ejus superficiei satis magnam; atqui hoc fieri non potest nisi ipsorum superficies per ictus vim mutatæ fuerint: post reflectionem autem utrumque globum pristinam figuram recuperare deprehendimus; quare globi hi habent vim elasticam qua sese in pristinam figuram per ictum deformatam restituere valent. Q. E. D. Sequuntur jam regulæ motus pro corporibus elasticis.

THEOR. XXIX.

Si duo corpora perfecte elastica in se invicem impingant, eadem manebit ipsorum velocitas relativa ante & post impactum; hoc est, corpora perfecte elastica eadem celeritate à sese mutuo post ictum recedent, qua prius ad se invicem accedebant.

Nam (per Cor. Theor. 27.) vis compressiva seu ictus magnitudo in datis corporibus oritur à velocitate corporum relativa, & ipsi est proportionalis; & (per Def. 11.) corpora perfecte elastica eadem vi sese in pristinam figuram restituunt, qua compressa fuere; hoc est, vis restitutiva æqualis est vi compressivæ, ac proinde vi qua corpora ad sese accedebant ante impactum æquipollet: sed per vim hanc restitutivam coguntur corpora à se invicem discedere; unde vis hæc in eadem corpora agens producet velocitatem relativam æqualem ei quam prius habebant, seu faciet ut corpora eâdem velocitate à se invicem recedant qua prius accessere. Q. E. D.

Cor. Æqualibus igitur temporibus ante & post impulsum sumptis, æquales erunt corporum à se invicem distantiæ, & proinde æquales quoque erunt in iisdem temporibus distantiæ corporum à communi gravitatis centro.

Ex hoc corollario regulæ congressuum in corporibus perfecte elasticis facile eruuntur, quod igitur in sequenti problemate præstandum est.

PROBL. III.

In corporibus perfecte elasticis & directe impingentibus regulas congressuum determinare.

Omnes hujus problematis casus eâdem operâ constructos dabimus. Sint A & B duo corpora perfecte elastica, quorum commune gravitatis centrum sit C, & ponantur corpora concurrere in D, ac fiat CE æqualis CD: dico post concursum rectam EA exponere velocitatem corporis A ab E versus A, & rectam EB exponere velocitatem mobilis B ab E versus B.

TAB. 5. fig. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16.

Dem. Cum (per Theor. 23.) commune corporum gravitatis centrum ante & post impulsum eadem semper velo-

citate

citate uniformiter progrediatur, in tempore æquali ei quo percurritur à corpore A longitudo AD, vel à centro gravitatis C longitudo CD, post impulsum ab eodem C percurretur longitudo DK ipsi DC æqualis: fiat K *a* æqualis CA: & cum (per Cor. præcedentis Theor.) æqualibus temporibus ante & post impactum sumptis, æquales semper sint corporum à communi gravitatis centro distantiæ; eodem temporis puncto quo commune gravitatis centrum est in K, corpus A reperietur in *a*, adeoque post impulsum erit ipsius motus à D versus *a*, & ejus velocitas erit ut recta D *a*, quæ ab ipso in eo tempore percurritur; sed ob CE æqualem rectæ CD vel KD, & CA æqualem K *a*, erit rectarum CE, CA differentia æqualis differentiæ rectarum KD, K *a*, hoc est, erit EA æqualis D *a*: sed recta D *a* denotat corporis A velocitatem post impulsum, quare ejus velocitas per rectam EA quoque denotabitur; præterea cum velocitas corporum relativa ante & post impulsum eadem maneat, & recta EA denotet velocitatem mobilis A, velocitas mobilis B post impulsum necessario per rectam EB denotabitur; ab E scil. versus B. Q.E.D.

Cor 1. Si corpus B quiescat, coincidet punctum D cum B: & quia est B ad A ut AC ad CB, erit componendo B & A simul ad A ut AB ad CB; unde duplicando consequentes erit B & A simul ad 2 A, ut AB ad 2 CB vel EB; hoc est, ut corporum aggregatum ad duplum corporis impingentis, ita celeritas impingentis ante contactum ad celeritatem prius quiescentis post contactum. TAB. 5. *fig*. 6. 7. 8.

Cor. 2. Adeoque si A & B æqualia sint, erit A & B 2 A, unde EB celeritas corporis B post contactum erit æqualis AB celeritati corporis A ante contactum; & proinde coincidente puncto E cum puncto A, erit AE velocitas mobilis A post impulsum nihilo æqualis; quod etiam facile sic ostenditur: ob corpora A & B æqualia, erit AC = CB = CD = CE, quare coincidit punctum E cum A, & proinde mobile A post impulsum quiescet, & corpus B post impulsum movebitur cum celeritate EB vel AB. Si igitur corpus elasticum in alterum quiescens & æquale impingeret, post contactum quiescet im- TAB. 5. *fig*. 6.

pin-

pingens, & quiescens cum prioris celeritate movebitur.

Tab. 5. fig. 9. *Cor.* 3. Si corpora A & B æqualia versus eandem partem ferantur post contactum ad eandem quoque partem ferentur; celeritatibus permutatis, nam ob CE=CD & AC=CB erit CE−AC, hoc est EA=CD−CB seu BD; adeoque velocitas corporis A post impactum æqualis erit velocitati mobilis B ante impactum: præterea quia EA=BD erit EB=AD, & proinde velocitas corporis B post contactum, prioris A velocitati ante occursum æqualis erit.

Tab. 5. fig. 13. *Cor.* 4. Si corpora A & B æqualia ad contrarias partes ferantur, post impulsum ad contrarias partes recedent, celeritatibus permutatis. Nam ob AC=CB & CE=CD erit AC−CE, hoc est, AE=CB−CD seu BD, adeoque velocitas corporis A post impactum æqualis erit velocitati corporis B ante impactum: præterea ob EA=BD erit AD=EB; sed AD erat velocitas corporis A ante occursum, & EB est velocitas corporis B post occursum, unde liquet corollarium.

Quoniam in praxi calculus semper est adhibendus, convenit ut modus tradatur, quo celeritates corporum elasticorum post impulsum sunt investigandæ, & ad numeros reducendæ; & quidem facile esset, ad modum superiorum corollariorum, omnes particulares casus ex generali exposita constructione ad numeros revocare; facillime autem generalis calculus sic eruitur.

Tab. 5. fig. 17. Ponamus primo corpora A & B versus eandem partem moveri; sitque C velocitas insequentis A, præcedentis vero B velocitas sit c; unde velocitas corporum relativa erit $C-c$, & summa motuum versus eandem partem $AC+Bc$: velocitas corporis A post impactum versus eandem, qua prius, plagam vocetur x; & quia eadem manet corporum velocitas relativa ante & post impactum, velocitas corporis B erit $x+C-c$; est enim velocitas corporum relativa æqualis excessui velocitatis qua velocitas corporis celerioris superat velocitatem tardioris, adeoque excessus ille debet esse $C-c$; cum vero velocitas corporis A sit x, erit ejus motus versus plagam $D=Ax$; & cum velocitas corporis B sit

$x+$

$x+C-c$, erit ejus motus versus eandem partem $Bx+BC-Bc$; & horum motuum summa æqualis erit summæ priorum motuum, hoc est, erit $Ax+Bx+BC-Bc=AC+Bc$; unde reducendo hanc æquationem, erit $Ax+Bx=AC-BC+2Bc$; & $x=\frac{AC-BC+2Bc}{A+B}=$ Velocitati corporis A. Porro velocitas corporis B est $=x+C-c=\frac{AC-BC+2Bc}{A+B}+C-c=\frac{AC-BC+2Bc+AC+BC-Ac-Bc}{A+B}=\frac{2AC-Ac+Bc}{A+B}$.

Si BC sit major quam $AC+2Bc$, erit x seu $\frac{AC-BC+2Bc}{A+B}$ quantitas negativa, adeoque velocitas corporis A erit versus contrariam partem, & ejus motus versus D erit negativus. Si corpus B quiescat, hoc est, si sit $c=O$, erit velocitas corporis A post impulsum $\pm\frac{AC-BC}{A+B}$, prorsum aut retrorsum prout signum + aut — prævaluerit.

Si corpora A & B celeritatibus C & c, versus contrarias partes lata, sibi mutuo directe impingant, erit ipsorum motus versus eandem partem $AC-Bc$; & velocitas corporum relativa erit $C+c$. Sit jam x velocitas corporis A post impactum; erit ejus motus versus eandem qua prius plagam Ax, & velocitas corporis B erit $x+C+c$, (nam velocitas corporum relativa per ictum non mutatur) & motus in corpore B versus D erit $Bx+BC+Bc$; unde summa motuum in easdem partes erit $Ax+Bx+BC+Bc$ quæ (per Theor. 14.) æqualis erit $AC-Bc$, adeoque erit $Ax+Bx=AC-BC-2Bc$, & $x=\frac{AC-BC-2Bc}{A+B}$ & velocitas corporis B erit $\frac{AC-BC-2Bc}{A+B}+C+c=\frac{AC-BC-2Bc+AC+Ac+BC+Bc}{A+B}=\frac{2AC+Ac-Bc}{A+B}$.

Si $BC+2Bc$ sit major quam AC, erit motus corporis A retrorsum, versus contrariam scil. partem, in quo casu erit x seu $\frac{AC-BC-2Bc}{A+B}$ quantitas negativa.

Corporum durorum leges primus quod sciam recte tradidit *Johannes Wallisius* hujus Academiæ in Cathedra Geometriæ *Savilianus* celeberrimus Professor, in Actis Philosophicis numero 43. ubi etiam primus veram causam reflectionum in aliis corporibus aperuit, & has ab elasticitate proficisci docuit. Postea, non longo temporis intervallo, clarissimi Viri Dom. *Christopherus Wren* tunc temporis in hac Academia Astronomiæ Professor *Savilianus*, & Dom. *Christianus Hugens*, leges quas observant corpora perfecte elastica, Societati Regiæ *Anglicanæ* seorsim impertivere, & eandem prorsus constructionem dederunt, quamvis uterque quid ab altero factum de hac re fuit, inscius erat. Cum autem illi constructiones & leges motûs absque demonstratione in Philosophicis Actis consignarunt; placuit hanc ipsorum elegantem admodum constructionem exinde depromere & demonstrare.

Non dissimili methodo construitur problema in corporibus quidem elasticis, sed quæ non se restituunt vi æquali ei qua comprimuntur. Sint enim duo quæcunque corpora A & B, quorum commune gravitatis centrum sit C; secentur AC, BC ita in *a* & *b*, ut AC sit ad *a*C & BC ad *b*C, ut vis elaterem comprimens ad vim qua elater se restituit; fiatque CE æqualis CD, erit E*a* velocitas corporis A post impulsum ab E versus *a*, & E*b* erit velocitas corporis B ab E versus D.

TAB. 5. *fig.* 18. 19.

Quod si vis restitutiva æqualis sit vi compressivæ, coincidet punctum *a* cum A, & constructio redit ad priorem. Demonstratio facilis est præcedentem intelligenti, nec opus est ut apponatur.

THEOR. XXX.

TAB. 5. *fig.* 20.

Si mobile A *in recta* AB *uniformiter moveatur; & interea recta linea illa* AB, *sibi semper parallela, motu etiam æquabili deferatur secundum directionem ad* AC *parallelam; sitque velocitas mobilis* A *ad velocitatem lineæ* AB *ut* AB *ad* AC, *& compleatur parallelogrammum* ABDC, *cujus diagonalis sit* AD; *erit hæc vera linea à mobili* A *motu suo descripta.*

Cum linea AB ad situm *ab* pervenerit, sit *g* locus mobilis A, & quia (per Theor. 6.) spatia simul descripta sunt

ut

ut velocitates, erit ag longitudo à mobili A percursa ad Aa longitudinem à linea AB percursam, ut velocitas mobilis A ad velocitatem rectæ AB, hoc est, (ex hyp.) ut AB ad AC; unde parallelogrammum aG simile erit parallelogrammo CB, & proinde (per 24. El. 6.) punctum g in diagonali AD locabitur; hoc est, corpus A semper in recta AD reperietur, adeoque hæc linea ab illo percurretur. Q. E. D.

Cor. 1. Eodem tempore describitur à mobili A linea AD, quo absque motu secundum AC lineam AB percurreret; aut quo absque motu secundum AB describeret rectam AC.

Cor. 2. Cum mobile ideo in recta AD deferatur, quod præter motum proprium participat quoque de motu loci sui seu rectæ AB, & motus ejus ex utroque compositus sit; si mobile aliquod duos motus secundum directiones AB, AC simul impressos habeat, sintque motus illi vel vires à quibus producuntur ut rectæ AB, AC, erit AD linea descripta à mobili quod à duabus hisce viribus motus impressos recepit; & ejus vis, qua in recta AD fertur, erit ad priores secundum AB, AC ut diagonalis AD ad latera parallelogrammi AB, AC.

Cor 3. Hinc è converso, si mobile cum vi ut AD percurrat rectam AD, idem erit motus & secundum eandem directionem, ac si initio motus simul impelleretur à duabus viribus, rectis AB, AC proportionalibus, secundum directiones ab A ad B & ab A ad C: atque hinc motus quivis, etsi in se simplex, tanquam ex pluribus motibus compositus considerari potest; & vires quælibet in alias plures secundum diversas directiones agentes resolvi possunt.

THEOR. XXXI.

Si Corpus A *in firmum obicem* DC *oblique impingat, erit energia percussionis, seu magnitudo ictûs obliqui, ad magnitudinem ictûs quem produceret idem corpus eadem celeritate perpendiculariter impingens, ut sinus anguli incidentiæ* ACD *ad radium.* TAB. 5. *fig.* 21.

Ab A in obicem demittatur perpendicularis AD, si superficies obicis sit plana; vel si curva, demittatur perpendicularis

laris in planum tangens obicem in puncto incidentiæ, & C compleatur rectangulum DB. Jam (per Corol. 3. præcedentis) motus corporis A ut AC in recta AC æquipollet duobus motibus simul impressis secundum directiones AB, AD, qui sunt ad motum in AC ut rectæ AB, AD ad AC: sed motui in recta AB nullo modo resistit obex DC, cum enim AB sit ad DC parallela, corpus in recta AB motum in obicem DC nunquam impinget; vis igitur, qua impingit in obicem, est ut recta AD: est itaque vis corporis A in recta AC ad vim qua impingit in obicem, ut AC ad AD: sed si perpendiculariter cum vi ut AC impegisset in eundem, ictus magnitudo per AC repræsentaretur, motus enim totus per obicem destrueretur: quare erit magnitudo ictus obliqui ad magnitudinem ictus perpendicularis ut AD ad AC; hoc est, posito AC radio, ut sinus anguli incidentiæ ad radium.

THEOR. XXXII.

Si corpus perfecte elasticum in firmum obicem oblique impingat, ab illo ita reflectetur, ut angulo incidentiæ æqualis fiet angulus reflectionis.

Tab. 5. fig. 22. Incidat corpus A perfecte elasticum in firmum obicem oblique secundum lineam AB; dico corpus illud cum eadem celeritate ita in recta BC reflecti, ut angulo incidentiæ ABD æqualis sit angulus reflectionis CBF. Recta AB exponat motum corporis A in directione AB. Per. Corol. 3. Theor. 30. resolvitur hic motus in alios duos secundum directiones AE, AD, ad quos motus in AB est ut AB ad AE, AD; sed cum AE sit ad superficiem obicis parallela, & AD ad ipsum, vel saltem ad planum obicem in B tangens, perpendiculares; vis illa, qua impingit in obicem, est ea solummodo quæ est ut AD, secundum directionem ad obicem perpendicularem agens: fiat jam BE æqualis & parallela ipsi AD, & BF æqualis DB vel AE, & compleatur rectangulum EF, quod erit per omnia simile & æquale rectangulo DE. Cum igitur motus ut AE secundum directionem ad obicem parallelam per ictum non destruatur, quippe huic motui obex non est contrarius, post impulsum ad B permanet in corpore vis ut ut AE vel BF movendi secundum directionem BF: sed ex natura elasticitatis, corpus cum vi ut EB secundum directionem EB in obicem impingens, eadem vi secundum eandem directionem reflectitur; motus igitur corporis ad punctum incidentiæ B componitur ex motu ut BF secundum directionem BF, & motu ut BE secundum directionem BE; quare (per Corol. 2. Theor. 30.) corpus in recta BC cum vi ut BC movebitur: sed ob AD, CF æquales & parallelas, item ob DB, BF & angulos ad D & F æquales, erit angulus CBF æqualis angulo ABD, hoc est, angulo incidentiæ æqualis erit angulus reflectionis. Q. E. D.

PROBL. IV.

Corporum oblique impingentium post occursum determinare motus.

Moveantur corpora quæcunque A & B in lineis ad se invicem inclinatis AC, BC, quarum longitudines respective exponant velocitates corporum A, B; recta EFC repræsentet planum à quo tanguntur corpora in puncto concursus; in quod ab A & B demittantur perpendiculares AE, BF, quæ exponant velocitates quibus corpora ad se invicem accedunt. Compleantur rectangula EG, FH. Per Cor. 3. Theor. 30. motus corporis A resolvitur in duos alios secundum directiones AG, AE, ad quos motus in AC est ut AC ad AG, AE respective; similiter motus corporis B resolvitur in duos alios secundum directiones BF, BH; ad quos motus in BC est ut BC ad BF, BH respective: cum vero AG, BH sint parallelæ, velocitatibus quibus secundum has directiones moventur corpora, in se invicem non impingent; adeoque motus secundum hasce directiones per impactum non mutabitur; velocitates igitur quibus corpora in se mutuo incurrunt, sunt ut AE vel GC & BF vel HC. Corporum igitur A, B cum velocitatibus GC, HC in se mutuo directe incurrentium (per Probl. 2. si corpora dura sint, vel per Probl. 3. si elastica) determinentur motus; sitque CL velocitas corporis A à C versus L post impactum, orta ex velocitatibus GC, HC. Cumque, ut ostensum est, maneat in corpore vis movendi secundum directionem ad AG parallelam cum velocitate ut TAB. 6. fig. 1.

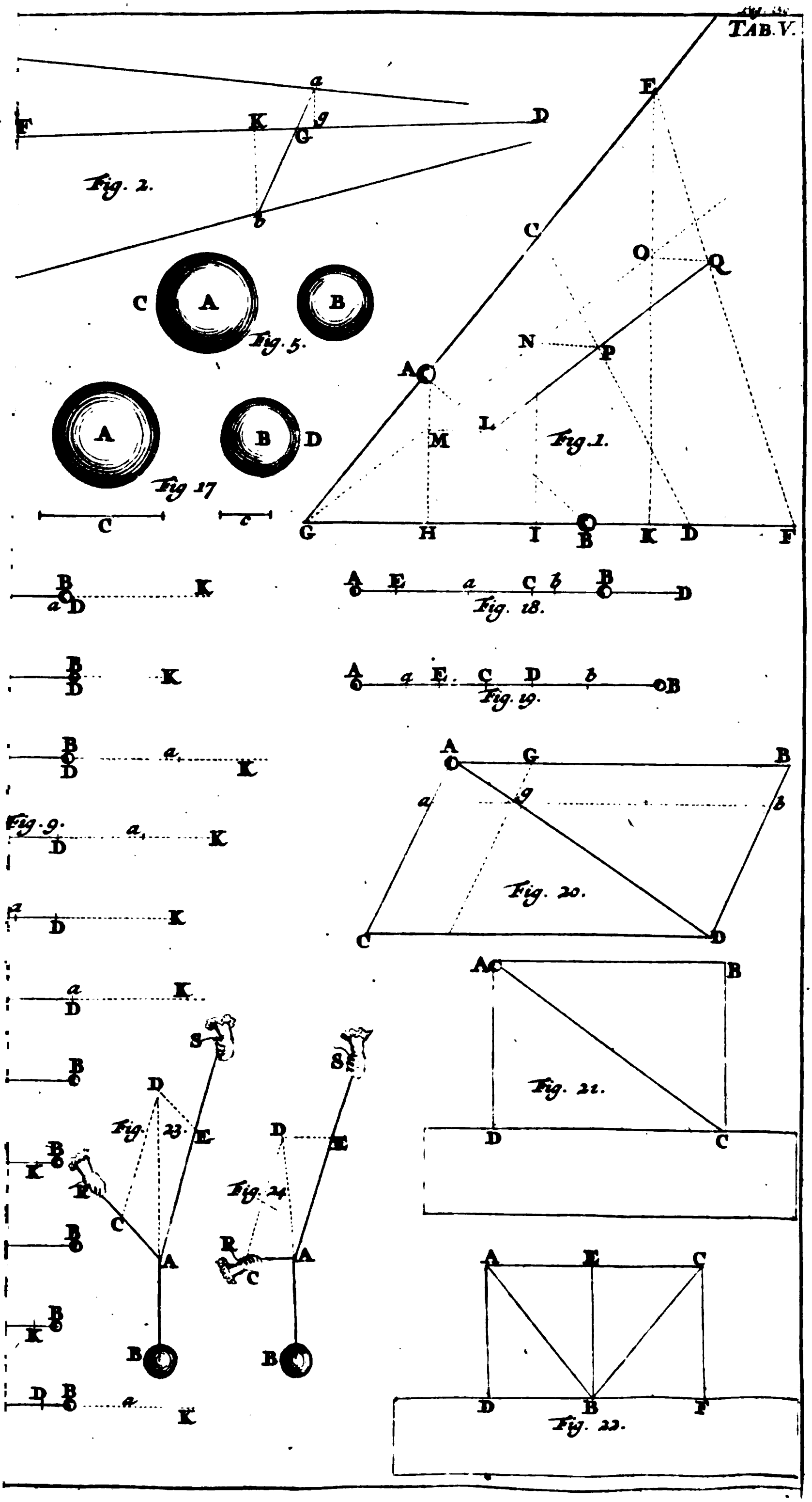
AG, fiat CM æqualis AG, & compleatur rectangulum LM; in hujus diagonali CN movebitur corpus A post impactum cum velocitate ut CN, ut patet (per Corol. 2. Theor. 30.) Et similiter determinabitur motus corporis B post impulsum. Q. E. F.

THEOR. XXXIII.

Tab. 6. fig. 2. *Si mobile* A *à tribus potentiis ope trium filorum trahatur, vel alio quocunque modo urgeatur secundum directiones* AB, AE, AC, *ita ut hæ tres potentiæ sibi mutuo æquipolleant, hoc est, ut binæ quævis alterius effectum destruant, & corpus per nullam ipsarum moveatur; potentiæ illæ inter se eandem rationem habebunt cum rectis tribus ad ipsarum directiones parallelis & à mutuo concursu terminatis.*

Exponat AD potentiam seu vim qua mobile A urgetur ab A versus B; vis huic æquipollens seu æqualis & corpus contrarie ab A versus D urgens etiam per AD exponetur; sed (per Cor. 3. Theor. 30.) vis ab A versus D corpus impellens æquipollet duabus secundum directiones AC, AE agentibus, ad quas vis prior ab A versus D agens, est ut AD ad AC, AE, vel ad AC, CD respective; & vicissim vires secundum rectas AC, AE agentes, & vi corpus ab A versus D urgenti simul æquipollentes, debent esse ad vim eandem secundum AD ut AC & AE vel CD ad AD; quare etiam vires secundum rectas AC, AE agentes, & æquipollentes vi qua corpus ab A versus B urgetur, ejusque effectum destruentes, debent esse ad eandem, ut AC, CD ad AD; hoc est, si idem mobile à tribus potentiis sibi mutuo æquipollentibus secundum directiones AB, AC, AE urgeatur, erunt hæ tres potentiæ ut rectæ AD, AC, AB respective. Q. E. D.

Cor. 1. Cum in triangulo quovis latera sint ut sinus angulorum oppositorum, erit AC ad CD ut sinus anguli ADC vel DAE ad sinum anguli DAC; unde quævis duæ potentiæ erunt inter se reciproce ut sinus angulorum, quos lineæ directionum cum linea directionis tertiæ potentiæ continent. Est præterea AD ad AC ut sinus anguli C vel AED ad sinum anguli CDA vel DAE; & similiter potentia secundum AB agens est


Tab. V.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 17
Fig. 1.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 9.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 24
Fig. 22.

est ad potentiam secundum AE, ut sinus anguli AED ad sinum anguli ADE vel CAD.

Cor. 2. Si pondus B duæ potentiæ R, S filorum ope secundum rectas AR, AS trahentes sustineant, punctum A à tribus potentiis urgetur, quarum duæ secundum directiones AR, AS agunt, & altera est vis gravitatis ponderis B, agens secundum rectam AB ad terram perpendicularem; unde erit potentia R ad vim gravitatis ut AC ad AD, vel ut sinus anguli DAE ad sinum anguli DEA vel CAE; & potentia S erit ad vim gravitatis ut EA ad AD, vel sinus anguli CAD ad sinum anguli DEA vel CAE, & potentia R erit ad S potentiam ut sinus anguli EAD ad sinum anguli CAD. Tab. 5. fig. 23. 24

Theorema hoc cum suis corollariis est fundamentum totius Mechanicæ novæ, quam Dominus *Varignon* edidit, & ab ipso etiam immediate consequuntur pleraque theoremata mechanica, quæ in eximio opere *Jo Alphonsi Borelli* de Motu animali continentur; ejus enim ope vires musculorum æstimari possunt.

THEOR. XXXIV.

Si Grave B plano inclinato incumbat, & à potentia R secundum directionem plano parallelam agente sustineatur, nec in plano illo descendat; potentia R erit ad pondus corporis B ut sinus anguli inclinationis ad radium.

Per punctum ubi Grave plano incumbit, ducatur ad communem sectionem plani & Horizontis perpendicularis AC, à cujus puncto quovis A demittatur in planum horizontis perpendicularis AD, & jungatur CD: erit (per Def. 6. El. 11.). ACD angulus inclinationis plani & horizontis, cujus sinus est AD posito CA radio. Dico jam AC esse ad AD ut pondus corporis A ad potentiam R. Corpus enim B à tribus potentiis secundum diversas directiones agentibus, & sibi mutuo in æquilibrio positis urgetur; quarum prima est vis gravitatis secundum directionem BE ad CD perpendicularem agens, secunda est potentia R corpus trahens secundum directionem BR ad AC parallelam, tertiæ autem potentiæ supplet vicem resistentia seu contranitentia plani secundum lineam FBH sibi Tab. 6. fig. 3.

per-

perpendicularem agens; nam reactio actioni semper est æqualis, & fit in plagam contrariam: cumque planum perpendiculariter à mobili prematur secundum directionem BF, planum æqualiter reaget in corpus secundum directionem BH, & contranitentia illa æquipollet potentiæ secundum BH mobile urgenti: cumque hæ tres potentiæ sint sibi mutuo in æquilibrio & mobile ab ipsis sustineatur, si ducatur FG ad EB parallela rectæ AC occurrens in G, erit potentia R ad vim gravitatis ut BG ad FG (per præcedens Theor.) Sed ob triangulum CFG rectangulum, & demissam in basin CG perpendicularem FB, est (per 8. El. 6.) ut BG ad FG ita FG ad GC, & ut FG ad GC ita (per 4. El. 6.) erit AD ad AC; quare est potentia R ad vim gravitatis ut AD ad AC, vel ut sinus inclinationis plani ad radium. Potentia igitur aliqua potest Grave in plano inclinato sustinere, modo potentia illa sit ad pondus Gravis, ut sinus inclinationis plani ad radium. Q. E. D.

Cor. 1. Cum potentia R impediat descensum Gravis in plano AC, & ejus momento, quo in illo descendere nititur, æquipolleat; sequitur Gravis cujusque vim descendendi in plano inclinato esse ad vim qua descendere conatur in perpendiculo, ut sinus inclinationis plani ad radium.

Cor. 2. Hinc etiam plani inclinatio talis assignari potest, ut super illud, quantulacunque potentia pondus quodcunque magnum sustinere vel etiam elevare poterit.

LECTIO XV.

De Descensu Gravium in Planis Inclinatis & Pendulorum Motu.

PEractis iis quæ ad motum generaliter spectant, ad eos jam devenimus qui ex datis viribus oriuntur motus; in quibus exponendis & Phænomenis inde ortis recensendis præcipue versatur vera Physica. Ut igitur à simplicissimis ordiamur, imprimis consideranda venit vis illa, quæ uniformiter, hoc est ubique eodem tenore, versus eandem semper plagam dirigitur, qualis vulgo supponitur esse vis Gravitavitatis: quamvis enim certum sit, Gravitatis vim non ubique eandem esse, sed in diversis à centro Terræ distantiis, quadratis distantiarum reciproce esse proportionalem; cum tamen diversæ altitudines ad quas gravia à nobis projecta perveniunt, exiguæ admodum sint præ ingenti illa à telluris centro distantia, in tantilla hac altitudinum differentia, eandem ubique esse Gravitatis vim, tuto & absque minimo sensibili errore, supponi potest.

De motu itaque Gravium in hoc loco agendum est: Motum autem illum peragi supponimus, vel in planis ad Horizontem inclinatis, vel in superficiebus curvis, quales sunt sphæricæ & cycloidicæ; vel in spatiis denique liberis & non resistentibus, de quibus sequentia dabimus Theoremata.

THEOR. XXXV.

Descensus Corporis Gravis, super plano quovis inclinato, est motus æquabiliter acceleratus. Estque velocitas quam Grave super plano inclinato, in dato quovis tempore è quiete decidens, acquirit, ad Velocitatem à Gravi perpendiculariter cadente eodem tempore acquisitam, ut altitudo plani ad ejus longitudinem.

Sit planum inclinatum AB super quo descendat Grave D. Per Corol. primum. Theor. 34. est vis qua descendere conatur Grave, super plano quovis inclinato, ad vim absolutam Gravitatis, qua sc. in perpendiculo descenderet, in constanti ratione, quæ est sinus inclinationis plani ad radium, seu ut altitudo plani ad ejusdem longitudinem; adeoque cum eadem maneat vis absoluta Gravitatis corporis D, eadem quoque manebit vis qua super plano AB descendere conatur. Vis igitur illa eodem semper tenore in Grave D aget; adeoque similiter applicata, per legem secundam, æqualia semper velocitatum incrementa superaddet; haud secus ac fit in Gravibus in perpendiculo cadentibus. Est igitur descensus Gravium in plano inclinato motus uniformiter acceleratus. Q. E. D. *Tab. 6. fig. 4.*

Porro Incrementa Velocitatum Gravium in perpendiculo & in plano inclinato cadentium, quæ eodem tempore indefinite

 finite

finite exiguo producuntur, sunt ad se invicem ut vires quibus producuntur: at vires sunt in constanti ratione, scil. ut longitudo plani AB ad ipsius altitudinem AC; quare incrementa velocitatum inde orta erunt in eadem ratione. Ac proinde (per 12. Prop. Elementi V.) summa incrementorum unius erit ad summam incrementorum alterius in eadem ratione; hoc est velocitas corporis Gravis in perpendiculo cadentis, est ad velocitatem corporis super plano inclinato interea descendentis, ut longitudo plani ad ejus altitudinem. Q. E. D.

Corol. 1. Velocitates corporis Gravis in plano inclinato cadentis, sunt ut tempora quibus acquiruntur.

Corol. 2. Quæcunque igitur in Theor. 12. & ejus Corol. de motu uniformiter accelerato demonstravimus, vera quoque erunt de descensu Gravium in planis inclinatis. Scil. spatium à Gravi in plano inclinato cadente dato tempore percursum, ab initio motus computatum, dimidium erit istius quod in illo tempore à mobili uniformiter percurri potest, cum velocitate ultimo acquisitâ. Item spatia percursa, ab initio motus computata, sunt in duplicata ratione Temporum vel celeritatum. Et Celeritates & Tempora sunt in subduplicata ratione spatiorum percursorum.

Corol. 3. Hinc etiam Gravis Ascensus per planum quodvis acclive est motus uniformiter retardatus, sicut fit in Ascensu corporis in perpendiculo, illumque eadem omnino symptomata comitantur.

SCHOLIUM.

Si ad Experientias recurratur, has omnes ratiociniis nostris conformes esse reperiemus; & in planis non admodum declivibus experimenta instituere facile est, cum motus haud admodum veloces exacte mensurari possint; secus ac fit in descensu in perpendiculo, ubi pernicitas motus observationibus accuratis locum non relinquit.

Notandum nos supponere plana exacte polita, & motum super iis nulla scabritie impeditum.

PROBL.

PROBL. V.

Dato plano inclinato, assignare quam ejus partem percurrit Grave, interea dum aliud Grave datum spatium in perpendiculo perfecerit.

Sit planum inclinatum AB, super quo descendat Grave ex A; assignanda est longitudo quæ à Gravi in plano inclinato cadendo percurritur, interea dum aliud Grave spatium AC in perpendiculo cadens perfecerit. A puncto C in AB demittatur perpendicularis CD plano occurrens in D; erit AD spatium in plano inclinato confectum tempore quo Grave cadit in perpendiculo ex A ad C. Si enim non sit AD, sit AE spatium eodem tempore confectum, quo grave cadit ex A ad C, quod vel majus vel minus sit quam AD. Ducatur horizontalis recta CB. Et quoniam per Theorema 12. in eo tempore quo Grave cadit ex A ad C vel ex A ad E, percurri potest dupla longitudo AC, cum velocitate uniformi, & æquali ei quæ acquiritur cadendo in C; (sicut per Corol. præcedentis,) in eodem tempore percurri potest longitudo dupla ipsius AE, cum ea velocitate quæ acquiritur in E; erit (per Theor. VI.) Velocitas in C ad velocitatem in E acquisitam, ut dupla AC ad duplam AE, vel ut AC ad AE: sed cum AC, AE simul percurrantur, erit (per Theorema præcedens) velocitas in C ad velocitatem in E ut AB ad AC; quare erit ut AB ad AC ita AC ad AE: sed (per octavam Elementi 6.) ut AB ad AC ita AC ad AD: quare erit ut AC ad AE ita AC ad AD: ac proinde erit AE æqualis AD, minor majori, quod fieri non potest. Non igitur aliud spatium quam AD à Gravi super plano AB cadente conficitur, interea dum aliud Grave cadat ex A ad C. Quod erat ostendendum. TAB. 6. fig. 5.

Corol. Hinc invenitur spatium per quod Grave in perpendiculo cadit, interea dum Grave super plano inclinato percurrit longitudinem quamvis datam AB: nempe si ex puncto B ad AB erigatur perpendicularis recta BC, perpendiculo occurrens in C, erit AC spatium quæsitum. TAB. 6. fig. 6.

Corol. 2. Si duo vel plura sint plana inclinata AB, AE; & detur spatium AD, quod à Gravi super plano AB in aliquo TAB. 6. fig. 7.

tempore percurritur; invenietur ſpatium, quod à Gravi in altero plano AE interea percurratur; erigendo ex puncto D perpendicularem DG, cum perpendiculo occurrens in G; & ex G in AE demittendo perpendicularem GH plano AE occurrens in H; erit AH ſpatium quæſitum: utrumque enim ſpatium AD, AH conficitur in eo tempore, quo Grave in perpendiculo deſcendit ex A ad G.

Corol. 3. Ex hujus Theorematis demonſtratione conſtat, velocitates à Gravibus in perpendiculo & in plano inclinato, eodem tempore acquiſitas, eſſe ut ſpatia ab iiſdem confecta.

THEOR. XXXVI.

Tab. 6. fig. 5. *Tempus quo percurritur planum inclinatum* AB *eſt ad tempus quo percurritur perpendiculum* AC, *ut* AB *longitudo plani ad longitudinem perpendiculi* AC.

Ex C ad AB demittatur perpendicularis CD; & erit tempus quo percurritur AD, æquale tempori quo AC percurritur. Eſt vero tempus quo percurritur AB, ad tempus quo percurritur AD, in ſubduplicata ratione AB ad AD (per Corol. 2. Theor. 35.) hoc eſt, ob AB, AC, AD continue proportionales, eſt tempus quo percurritur AB ad tempus quo percurritur AD vel AC, ut AB ad AC. Quod erat demonſtrandum.

Tab. 6. fig. 8. *Corol.* Hinc tempora quibus percurruntur diverſa plana, AB, AD, KB, quorum eadem eſt altitudo, ſunt ut longitudines planorum: eſt enim tempus per AB ad tempus per AC ut AB ad AC; & tempus per AC ad tempus per AD ut AC ad AD: quare ex æquo erit tempus per AB ad tempus per AD, ut AB ad AD.

THEOR. XXXVII.

Celeritates Gravium, ſuper plano quovis inclinato & in perpendiculo, æquales ſunt, ubi Gravia pervenerint ex eadem altitudine ad eandem rectam Horizontalem.

Tab. 6. fig. 5. Sit planum inclinatum AB, & perpendiculum AC. Ducatur Horizontalis recta BC. Dico celeritatem acquiſitam in pun-

puncto B, post descensum per AB, æqualem fore celeritati acquisitæ in puncto C, post casum per AC. A puncto C demittatur ad AB perpendicularis CD. Erit AD spatium quod à Gravi in plano, AB cadendo percurritur, in eo tempore quo aliud Grave in perpendiculo descendit per AC: & (per Cor. 3. Probl. 5.) celeritas in C est ad celeritatem in D ut AC ad AD, vel ut AB ad AC. Quoniam autem celeritates super eodem plano cadendo acquisitæ, sunt in subduplicata ratione longitudinum quæ à Gravi percurruntur, erit celeritas in B ad celeritatem in D in subduplicata ratione longitudinis AB ad longitudinem AD; hoc est, ob AB, AC, AD continue proportionales, ut AB ad AC. Sed ostensum celeritatem in C esse ad eandem celeritatem in D etiam ut AB ad AC; quare cum celeritates in B & C eandem habeant proportionem ad celeritatem in D, inter se æquales erunt. Quod erat demonstrandum.

Cor. Hinc celeritates, quæ à Gravibus cadendo ex eadem altitudine, ad eandem Horizontalem rectam, super planis utcunque inclinatis acquiruntur, sunt inter se æquales: nam utraque celeritas, scil. ea quæ acquiritur in puncto B, post descensum per AB vel KB; & ea quæ acquiritur in puncto D, post descensum per AD, æqualis est celeritati acquisitæ in descensu Gravis ex A ad C. TAB. 6. *fig.* 8.

THEOR. XXXVIII.

Si ex eadem altitudine descendat mobile continuato motu, per quotlibet ac qualibet plana continua AB. BC. CD; *semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis est ei quæ cadendo perpendiculariter ex pari altitudine acquiritur.*

Per A & D ducantur Horizontales rectæ HE, DF, & producantur plana BC, CD, ut cum HE conveniant in punctis G & E. (Per Corol. Theor. 37.) eadem celeritas acquiritur in puncto B, descendendo per AB, ac si per GB descendisset Grave: supponimus autem flexum aut punctum B, non impedire motum Gravis cadentis, sed tantum ipsius directionem mutare; adeoque in puncto C eadem erit celeritas acquisita descendendo per AB, BC, ac si per GC descendisset. TAB. 6. *fig.* 9.

Sed descendendo per CG, eadem acquiritur celeritas quam obtineret grave cadendo per EC: adeoque cum flexus C velocitatem Gravis non minuere supponitur, in D eandem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum ED, vel per EF perpendiculum. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet, per circuli circumferentiam, vel per curvas quaslibet, descendente mobili, (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositas hic considerare liceat) semper eandem ipsi velocitatem acquiri, ac si ab eadem altitudine rectà in perpendiculo descenderit Grave.

Cor. 2. Quod si Grave, post descensum per AB, BC, CD, vel per HD, sursum convertat motum suum; ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quæcunque plana inclinata: nam cum Gravitas eadem semper vi in eodem plano agat, sive ascendat corpus sive descendat, eadem erit ejus efficacia ad corporis velocitatem in ascensu minuendam, quæ est ad ipsam in descensu augendam; tantum igitur est decrementum velocitatis in puncto C, dum ascendat mobile à D ad C, quantum fuit incrementum velocitatis acquisitum in descensu à C ad D; ac proinde eadem erit velocitas in C, post ascensum per CD, quæ erat prius in eodem puncto, post descensum per AB, BC. Similiter velocitas in B post ascensum per CB eadem est cum velocitate acquisita in descensu per AB vel BG; sic etiam Gravitas tantundem detrahet à velocitate mobilis ascendendo per BA, quantum acquirebatur in descensu per AB; & in punctis æque altis eadem semper erit mobilis velocitas: sed velocitas in initio descensus, scil. in puncto A nulla fuit; adeoque ascendendo, in puncto illo A omnis tolletur velocitas; quod igitur punctum erit terminus ad quem mobile ascendendo perveniet.

TAB. 6. fig. 10 *Cor*. 3. Si mobile per superficiem quamvis AB descendat ad punctum infimum B, ac deinde, velocitate cadendo acquisita, per superficiem similem & æqualem BC ascendat; æqualibus temporibus per æqualia spatia ascendet ac descendet.

THEOR.

TAB. VI.

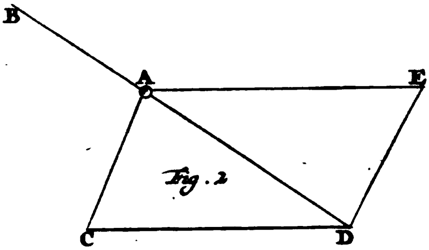


Fig. 2

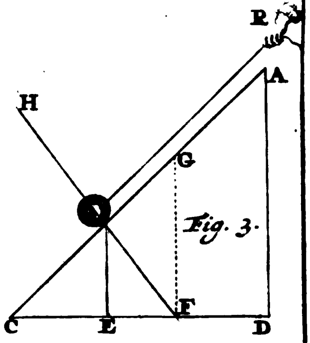


Fig. 3.

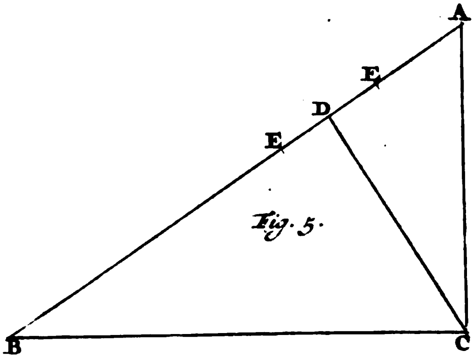


Fig. 5.

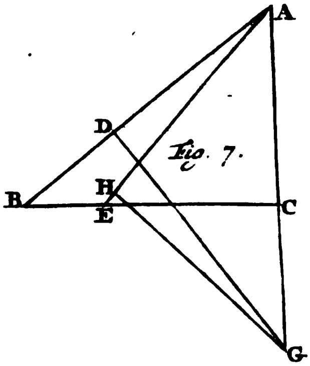
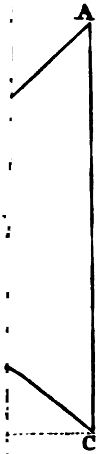


Fig. 7.



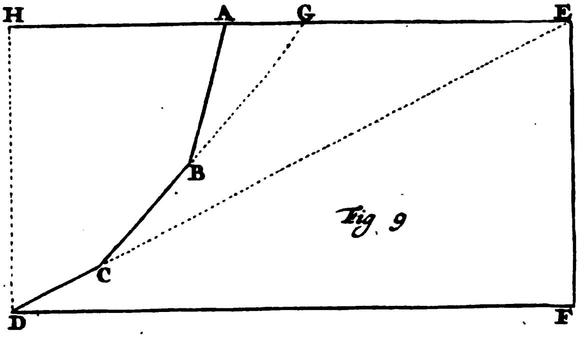
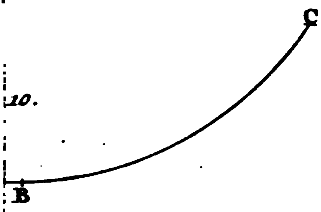


Fig. 9



10.

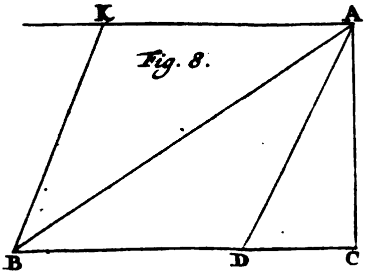


Fig. 8.

THEOR. XXXIX.

Si à puncto supremo A, vel infimo B, circuli ad Horizontem erecti, ducantur qualibet plana inclinata AC, BC, usque ad circumferentiam; tempora descensuum per ipsa, aequalia erunt tempori, quo Gravia perpendiculariter per diametrum cadunt. TAB. 7. fig. 1.

Cadat Grave ex A ad C, super plano AC: dico tempus descensus per AC aequale esse tempori descensus per Diametrum AB. Nam angulus ACB in semicirculo rectus est, (per 31. Elementi tertii) unde cum à puncto C ad AC erecta sit perpendicularis BC, perpendiculo AB occurrens in B; erit (per Corol. 1. Probl. 5.) tempus descensus per AC in plano inclinato, aequale tempori casus per AB in perpendiculo. Dico etiam tempus per CB eidem tempori per AB aequale fore. Ducatur CD ad AB, & DB ad AC parallela: & (per 34. Elementi primi) erit CD aequalis AB; & ob angulum ACB in semicirculo rectum, erit angulus CBD rectus: quare cum à puncto B, super CB erecta sit ad angulos rectos BD, cum perpendiculo conveniens in D; erit (per Corol. 1. Probl. 5.) tempus per CB aequale tempori descensus per CD; sed est CD aequalis AB, unde tempus per CB aequale erit tempori per AB.

Idem aliter sic ostendi possit. Tempus descensus per AB est ad tempus per EB, in subduplicata ratione AB ad EB, hoc est (ob AB, BC, EB continue proportionales) ut AB ad BC, vel BC ad EB; sed (per Theor. 36.) tempus per BC est ad tempus per EB in eadem ratione BC ad EB: quare cum tempora per AB & BC ad tempus per EB eandem obtinent rationem, aequalia erunt. Quod erat demonstrandum.

Cor. 1. Si ducatur perpendiculum AB, & super Diametro AB, describatur Circulus; omnia plana à puncto B, vel à puncto A, ad circuli circumferentiam ducta eodem tempore percurrentur; eodem scil. tempore percurruntur AB, CB, DB, EB, FB, GB. TAB. 7. fig. 2.

Cor. 2. Si in eodem puncto supremo A, plures circuli ABD, AGK se mutuo tangant, & exeant plura plana AB, AC, AD, AE circulos secantia; partes GE, HB, LC, KD aequali tem- TAB. 7. fig. 3.

tempore percurrentur, si initium motus fiat à puncto supremo.

THEOR. XL.

Si duo Gravia descendant super duobus aut pluribus planis, similiter inclinatis & proportionalibus; tempora iis percurrendis impensa erunt in subduplicata ratione longitudinum planorum.

TAB. 7. fig. 4. Percurrat Grave quodvis plana AB. BC, alterum autem Grave plana DE, EF, similiter ad Horizontem inclinata & proportionalia, hoc est, ut sint anguli BAG, EDH, item BGA, EHD æquales; & AB ad BC ut DE ad EF. Dico tempus quo percurruntur AB, BC ad tempus quo percurruntur DE, EF, subduplicatam habere rationem planorum AB, BC ad plana DE, EF. Ob triangula ABG, DEH æquiangula, est AB ad DE ut BG ad EH; sed ex hypothesi ut AB ad DE ita est BC ad EF, quare ut BG ad EH ita est BC ad EF; & ita (per 12. Elementi quinti) est GC ad HF. Sed quia AB, DE similiter inclinata sunt, eodem prorsus modo percurruntur ac si partes essent ejusdem plani; sic etiam plana GC, HF eodem modo percurruntur ac si partes essent ejusdem plani: adeoque tempus per AB erit ad tempus per DE in subduplicata ratione AB ad DE: & tempus per GC est ad tempus per HF in subduplicata ratione GC ad HF, vel in subduplicata ratione AB ad DE. Sed tempus per GB est ad tempus per HE, in subduplicata ratione GB ad HE, vel AB ad DE; adeoque (per 19. Elementi quinti) tempus per BC post descensum ex G vel A, est ad tempus per EF post descensum ex H vel D, in subduplicata ratione AB ad DE, hoc est ut tempus per AB ad tempus per DE: adeoque (per 12. Elem. V.) tempus per AB, BC erit ad tempus per DE, EF ut tempus per AB ad tempus per DE; vel in subduplicata ratione AB ad DE; verum ob AB ad DE ut BC ad EF, erit AB ad DE ut AB, BC ad DE, EF; adeoque tempus per AB, BC erit ad tempus per DE, EF in subduplicata ratione AB, BC ad DE, EF. Q. E. D. Idem similiter ostendetur si plura essent utrobique plana inclinata & proportionalia, unde patet propositum.

Cor.

Cor. Si sint duæ superficies curvæ AB, DE, similes & similiter positæ, hæ minime differunt ab infinitis numero planis, infinite parvis, & proportionalibus, & ad se invicem similiter inclinatis: adeoque erit tempus descensus per superficiem AB ad tempus descensus per superficiem DE in subduplicata ratione AB ad DE. TAB. 7. fig. 5.

PROBL. VI.

Dato spatio AB *in plano utcunque inclinato, in dato tempore à Gravi è quiete cadente percurso; invenire spatium percursum æquali tempore, in alio plano contiguo* BG; *posito Grave in secundo hoc plano motum suum continuare.* TAB. 7. fig. 6.

Per A ducatur horizontalis recta AE, & producatur BG ad E, ac fiat BD æqualis AB; & rectis EB, ED capiatur tertia proportionalis EC: erit BC spatium quod in secundo plano à Gravi motum suum continuante æquali tempore percurritur, quo AB in primo plano. Exponat enim AB vel BD tempus per AB, unde (per Corol. Theor. 36.) EB exponet tempus per EB. Est vero tempus per EB ad tempus per EC, in subduplicata ratione EB ad EC, hoc est ut EB ad ED; sed est EB spatium quod percurritur tempore ut EB; adeoque EC erit spatium quod percurritur tempore ut ED, ac proinde BC est spatium quod percurritur tempore ut DB vel AB, post casum ex E vel A. Quod erat inveniendum.

PROBL. VII.

Dato spatio AB *in plano inclinato, à Gravi è quiete cadente percurso in dato tempore; item spatio* BC *in alio plano contiguo, in quo Grave motum suum continuat: Invenire tempus quo percurritur spatium illud datum* BC. TAB. 7. fig. 7.

Ducatur per A horizontalis recta AE, cui occurrat BC producta in E: inter EB, EC inveniatur media proportionalis ED. Et si AB exponat tempus quo percurritur AB, BD exponet tempus quæsitum quo percurritur BC. Est enim tempus per AB ad tempus per EB, ut AB ad EB; adeoque EB exprimet tempus quo Grave cadet per EB: at est tempus per EB ad tempus per EC, in subduplicata ratione EB ad EC,

X sive

ſive ob EB, ED, EC continue proportionales, ut EB ad ED; ſed eſt EB ut tempus per EB; unde DB erit ut tempus per BC. Ac proinde tempus per AB erit ad tempus BC ut AB ad BD. Q.E.I.

TAB. 7. *fig.* 8. *Cor*. Hinc ſi Grave ſucceſſive per plura plana inclinata AB, BC, CD deferatur, aſſignari poteſt tempus in quo per ſingula movetur: producantur enim BC, CD ut cum horizontali per A ducta conveniant in E, & F; inter EB, EC fiat EG media proportionalis: item inter FC, FD fiat media proportionalis FH, & ſi AB exponat tempus per AB, BG exponet tempus per BC, & CH exponet tempus per CD.

TAB. 7. *fig.* 9. *Def.* Si Grave quodvis A, filo tenuiſſimo circa centrum B mobili, appendatur; talem machinam *Pendulum* appellamus. Quod ſi *Pendulum* circa B rotetur ut Grave arcum CAD deſcribat, idem motus huic Gravi accidet ac ſi in ſuperficie ſphærica CAD, perfecte dura ac levigata, motum fuiſſet corpus Grave. Etenim motum circa punctum B liberrimum ſupponimus, & ab aëris reſiſtentia, quæ in gravioribus pendulis exigua admodum eſt, abſtrahimus: quod ſi pendulum ad ſitum BC deferatur, & exinde demittatur, Grave deſcendendo deſcribet arcum CA, & in puncto A eam habebit velocitatem quæ acquiritur cadendo per EA, qua velocitate per tangentem in A exire conabitur; per Legem primam. Verum cum per filum AB detineatur in peripheria CAD, aſcendet per arcum AD ad eandem altitudinem, ſcil. ad D ex qua decidit, (per Cor. 2. Theor. 38.) ubi omni amiſſâ velocitate, ſua gravitate rurſus incipiet deſcendere; & in puncto A priorem acquiret velocitatem, cum qua aſcendet ad C: atque ſic aſcendendo & deſcendendo continuas vibrationes in peripheria CAD perficiet. Quod ſi aër pendulorum motui nihil obſtaret, & ſi nulla eſſet frictio circa centrum rotationis B, in æternum duraturæ forent pendulorum vibrationes: at ob haſce cauſas aliquantulum, licet inſenſibiliter ſingulis vibrationibus diminuitur penduli velocitas in puncto A, unde fit ut non ad idem præciſe punctum redeat Grave penduli, ſed arcus in quos excurrit continuo breviores reddantur, donec tandem inſenſibiles evadant.

THEOR.

THEOR. XLI.

Ejusdem penduli Vibrationes exiguæ, utcunque inæquales sint, fere & ad sensum sunt æquidiuturnæ.

Sit pendulum AB, quod oscillando describit inæquales arcus CBD, FBG: dico æqualia fere in illis describendis insumi tempora, sive oscillationem in arcu CBD æquali fere tempore peragi, quo perficitur oscillatio in arcu FBG, modo arcus CB, FB, non sint nimis magni. Ducantur subtensæ CB, FB, DB, GB; & quoniam arcus supponantur exigui, ii nec longitudine nec declivitate multum à subtensis suis deflectunt: ac proinde Grave paria fere insumet tempora, sive per arcus CB, FB, sive per arcuum subtensas feratur; sed tempora descensuum per arcuum subtensas æqualia sunt (per Theor. 39.) Quare tempora per arcus BC, FB erunt fere æqualia, igitur & horum temporum dupla, scil. quibus oscillando describuntur inæquales arcus CBD, FBG, erunt quoque fere æqualia. Quare ejusdem penduli vibrationes licet in arcus inæquales excurrentes, sunt saltem ad sensum æquidiuturnæ. Q. E. D. TAB. 7. *fig.* 10.

Huic Theoremati suffragatur experientia; pendula enim duo æqualis longitudinis ad motum incitata, quorum unum in multo majores arcus excurrat quam alterum, tempora oscillationum fere æqualia habebunt, adeo ut in centum oscillationibus vix erit discrepantia temporis unius oscillationis.

THEOR. XLII.

Durationes Oscillationum duorum pendulorum in similes Arcus excurrentium, sunt in subduplicata ratione longitudinum Pendulorum.

Sint duo pendula AB, CD, in arcubus similibus EBF, GDH oscillantia; erit tempus oscillationis penduli AB ad tempus oscillationis penduli CD, in subduplicata ratione longitudinis AB ad longitudinem CD. Nam quoniam arcus EB, GD sunt similes & similiter positi, erit (per cor. Theor. 40.) tempus descensus per EB, ad tempus per GD, in subduplicata TAB. 7. *fig.* 11.

 ratione

ratione EB ad GD; sed tempus descensus per EB est dimidium oscillationis integræ in arcu EBF; sicut tempus descensus per GD est dimidium oscillationis integræ per arcum GDH; adeoque tempus oscillationis penduli per arcum EBF erit ad tempus oscillationis penduli per arcum GDH, in subduplicata ratione EB ad GD: hoc est, ob arcus EB, GD similes, in subduplicata ratione semidiametri AB ad semidiametrum CD; vel in subduplicata ratione longitudinis penduli AB ad longitudinem penduli CD. Q. E. D.

Cor. Longitudines pendulorum sunt in duplicata ratione temporum quibus oscillationes perficiuntur.

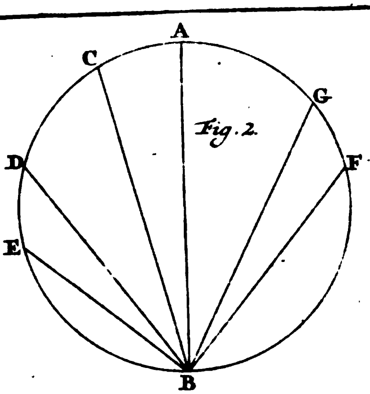
Cum durationes vibrationum sint reciproce ut numerus vibrationum eodem tempore peractarum, facile ex dato numero vibrationum quæ ab uno pendulo AB notæ longitudinis, in dato tempore perficiuntur, dabitur numerus vibrationum, quæ ab alio quovis pendulo CD notæ longitudinis eodem tempore perficientur; capiendo numerum qui sit ad numerum vibrationum penduli AB, in subduplicata ratione AB ad CD, sive ut AB ad mediam proportionalem inter AB, CD, vel ut radix quadrata numeri quo exprimitur longitudo penduli AB, ad radicem quadratam numeri quo exprimitur longitudo penduli CD. Et vicissim ex dato vibrationum numero quæ eodem tempore à duobus pendulis AB, CD perficiuntur, & data longitudine unius scil. AB, dabitur longitudo alterius CD; nempe faciendo ut quadratum numeri vibrationum penduli CD ad quadratum numeri vibrationum penduli AB, ita longitudo AB ad longitudinem quæsitam CD.

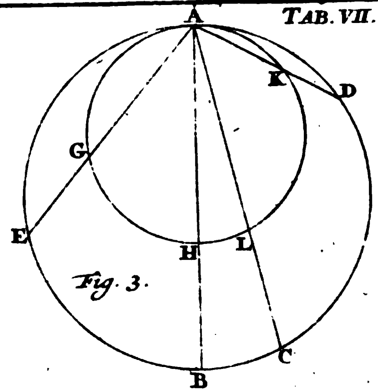
THEOR. XLIII.

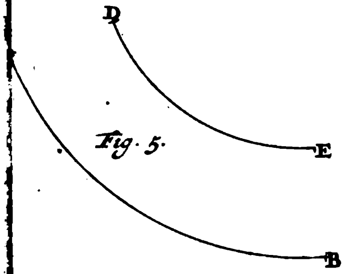
Velocitas penduli in puncto infimo est ut subtensa arcus quem descendendo describit.

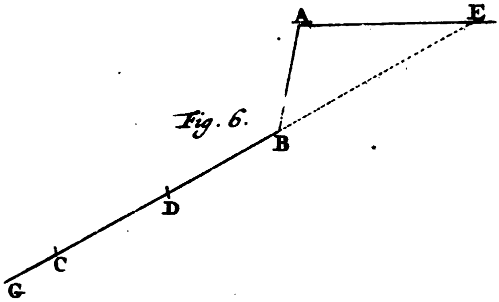
TAB. 8. fig. 1. Sit Pendulum AB, quod motu suo describat circulum BDCG: dico velocitatem acquisitam cadendo ex D in B, esse ad velocitatem in B acquisitam cadendo ex C in B, ut chorda arcus BD ad chordam arcus BC. Per puncta D, C ducantur horizontales rectæ DE, CF; & erit velocitas gravis acquisita

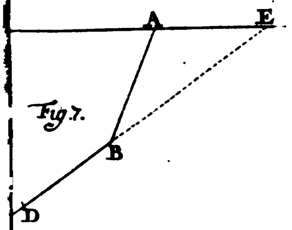
TAB. VII.

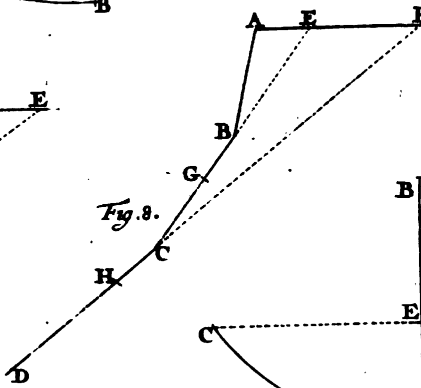

A
C
G
Fig. 2.
D
F
E
B

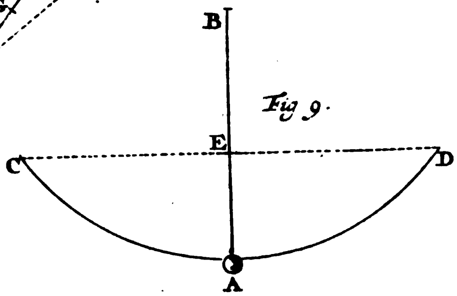

A
K
D
G
E
H
L
Fig. 3.
C
B

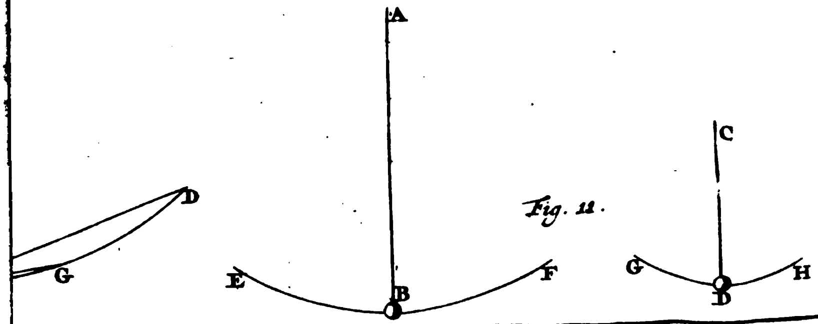

D
Fig. 5.
E
B


A
E
Fig. 6.
B
D
C
G


A
E
Fig. 7.
B
D


A
E
F
B
G
Fig. 8.
C
H
D


B
Fig. 9.
E
C
D
A


A
C
D
Fig. 11.
G
E
B
F
G
D
H

quisita descendendo per EB, ad velocitatem gravis acquisitam in descensu per GB, in subduplicata ratione EB ad GB, hoc est, ob EB, DB, GB continue proportionales, ut DB ad GB. Eadem ratione, velocitas acquisita à mobili cadendo per GB, est ad velocitatem acquisitam in casu per FB, ut GB ad CB. Quare ex æquo, velocitas acquisita in descensu gravis per EB, erit ad velocitatem acquisitam in descensu per FB, ut DB ad CB; sed velocitas acquisita in descensu per arcum DB, eadem est cum velocitate acquisita in perpendiculo per EB; & velocitas in descensu per arcum CB acquisita, eadem est cum velocitate in perpendiculari descensu per FB acquisita. Quare erit velocitas acquisita in descensu per arcum DB, ad velocitatem acquisitam in descensu per arcum CB, ut subtensa DB ad subtensam CB. Q. E. D.

Corol. 1. Sit GB perpendiculum cujusvis longitudinis, & velocitas acquisita in descensu Gravis ex G ad B exponatur per GB; super quo tanquam diametro, describatur semicirculus GCDB, & ex quovis diametri puncto E, erigatur normalis ED, peripheriæ occurrens in D, ducaturque chorda GD: erit hæc ut velocitas à Gravi acquisita cadendo ex altitudine GE: nam ob BG, GD, GE continue proportionales, erit ratio BG ad GD subduplicata rationis BG ad GE, adeoque BG erit ad GD ut velocitas acquisita cadendo ex altitudine GB, ad velocitatem per GE cadendo acquisitam. Similiter velocitas acquisita cadendo per GB, est ad velocitatem acquisitam ex casu per GF, ut GB ad GC; adeoque velocitates acquisitæ à Gravibus, cadendo per altitudines GE, GF, sunt ut chordæ GD, GC. TAB. 8. *fig.* 2.

Cor. 2. Si capiantur arcus B 1, B 2, B 3, &c. tales, ut eorum subtensæ sint ut 1, 2, 3, &c. respective; atque vis quædam agens pendulum sursum impellat per arcum B 1, alia vero per arcum B 2, & alia per arcum B 3; velocitates penduli in puncto B hisce viribus moti, erunt ut 1, 2, 3 respective. TAB 8. *fig.* 1.

Ope hujus Theorematis, variæ in quavis ratione data velocitates mobili tribuentur; aliæque à percussione alterius corporis acquisitæ, inter se & cum aliis initio datis, comparari possunt.

TAB. 8. fig. 3. Fiat Triangulum ligneum ABC, in quo juxta angulum A, capiantur duo puncta D, E, quorum distantia talis sit, ut pendula duo DF, EG ex illis libere dependentia se mutuo tangant, & centris D, E, intervallo DF vel EG describantur circulorum arcus FK, GH, in quibus capiantur portiones F1, G1; F2, G2; F3, G3; F4, G4, &c. tales ut subtensæ sint ut 1, 2, 3, 4, &c. respective; & si Grave F ad punctum 5 attollatur in arcu KF, G vero ad punctum 3 in arcu GH, atque simul demittantur (per Theor. 41.) ad puncta infima simul pervenient, & velocitates quibus sese percutient erunt ut 5 & 3: quod si post ictum mobile G in arcu GH ascendat ad 5, & mobile F in arcu FK ascendat ad 3, erunt velocitates mobilium F & G ut 3 & 5 respective & versus contrarias partes. Ad hunc modum facile erit experientiæ subjicere regulas motus, tam in corporibus duris quam elasticis, quas in lectionibus XIII & XIV demonstravimus.

Cum ejusdem penduli vibrationes minimæ sint fere æquidiuturnæ, licet arcus in quibus excurrat pendulum sint inæquales; hinc egregium pendulorum usum, ad horologiorum automaton motus regendos, monstravit *Christianus Hugenius*; quamvis enim *Galilæus* hujus scientiæ author, pendula prius adhibuit in observationibus Astronomicis & Physicis, quæ accuratam temporis mensuram requirunt: *Hugenius* tamen primus horologia pendulis instruxit, & experientia comprobavit, horologia ejusmodi, priora illa quorum libratores horizontales fuerint, longe superare. Ex eo tempore in usum communem recepta sunt horologia pendulis instructa, quorum aliqua tam affabre elaborata sunt, ut temporis mensuram exhibeant motu Solis multo justiorem, qui tempus apparens seu relativum solummodo monstrat, non autem verum & absolutum; unde fit ut automata pendulis instructa, statis temporibus horam indicant ab apparenti diversam, & aliquando tempus solaris horologii quindecim vel sedecim minutis primis superantem, aliquando totidem minutis ab

eo

eo deficientem: nec nisi quater in quolibet anno sol & horologium automaton idem temporis punctum monstrant.

Quamvis ejusdem penduli vibrationes, (licet excurrat pendulum in arcus inæquales,) sint fere & ad sensum æquidiuturnæ; cum tamen non sint omnimodo & Geometrice tales, sed majores minoribus sint aliquantulum diuturniores, & vibrationes pauxilla temporis quantitate à se invicem differant, ex multis minimis differentiolis, tandem magna satis conflatur differentia, idque ita esse reipsâ atque experimentis evincitur: si enim, ut aliquando in frigida fit tempestate, lentore aliquo afficiantur rotæ, ut pendulum minore vi impellant, incitatius quam par est festinant oscillationes; si nimia lubricitate polleant rotæ, & pendulum in majorem arcum excurrere cogant, lentius procedit tempus ab horologio indicatum. Imo ex nuperis experimentis in *Actis Philosophicis Londinensibus* recensitis, constat automati pendulum in vacuo vibrationes perficiens, sublatâ aëris resistentiâ in majores arcus excurrisse, & singulas oscillationes in majore tempore complevisse. Quare ut pendulorum Oscillationes ad omnimodam æqualitatem redigantur, & reciprocationum penduli latiorum angustiorumque tempora perfecte æqualia evadant; excogitavit *Hugenius* methodum quo Grave penduli per cycloidis arcum semper deferretur. In sequentibus autem demonstrabitur, tempora descensuum per quoscunque ejusdem cycloidis arcus ad punctum infimum quod verticem cycloidis esse supponitur, inter se æqualia esse; adeoque si Grave penduli semper in arcu cycloidis moveatur, erunt tempora oscillationum accurate inter se æqualia; sive pendulum in majores excurrat arcus, sive in minores.

THEOR. XLIV.

Si centro C, *intervallo quovis* CA, *describatur circuli quadrans* AHB, *atque in recta* AC *ea lege descendat mobile, ut ejus velocitas in loco quovis* P *sit semper ut* PL *quæ est sinus arcus* AL; *erit tempus quo descendit mobile ab* A *ad* C, *æquale tempori quo percurri possit peripheria* AHB *cum uniformi velocitate ut* CB *quæ ultimo à mobili cadendo acquiritur: erit* Tab 8. fig. 4.

præterea

terea tempus casus per spatium quodvis AF, *ad tempus casus per spatium* A*p*, *ut arcus* AH *ad arcum* A*l*; *& vis qua in loco quovis* F *acceleratur mobile erit ut* FC, *quæ est loci à centro distantia.*

Distinguatur peripheria AB in particulas innumeras infinite exiguas LLLL, & ducantur FH, PL, p*l* in AC perpendiculares; jungatur HC, sitque HK perpendicularis in PL. Quoniam triangula FHC KHL sunt æquiangula, (nam præter angulos ad F & K rectos, est angulus FHC æqualis angulo KHL, est enim angulus KHC utriusque complementum ad rectum) erit FH ad HC ut KH vel FP ad HL; sed (ex hyp.) est FH ut velocitas mobilis in puncto F qua scil. percurritur lineola FP, & CH vel CB est ut velocitas quæ ultimo cadendo acquiritur, ubi mobile ad C pervenerit, adeoque erit ut velocitas qua describitur arcus HL. Erit igitur velocitas mobilis descendentis per lineolam FP, ad velocitatem mobilis quod per arcum HL movetur, ut ipsa lineola FP ad arcum HL; quare cum velocitates sint spatiis percursis proportionales, erunt tempora in quibus spatia percurruntur, æqualia. Similiter demonstrari potest aliam quamvis peripheriæ particulam LL cum velocitate CB describi, eodem tempore quo percurritur correspondens lineola PP in perpendiculo, cum velocitate correspondente PL; ac proinde componendo eodem tempore descendit mobile per omnes lineolas PP, hoc est per totam AC, quo percurruntur omnes arcus LL, vel tota peripheria AHB, cum velocitate uniformi ut CB. Q. E. D.

Præterea est tempus quo descendit mobile ab A ad F, æquale tempori quo percurritur arcus AH; & tempus quo descendit mobile ab A ad *p*, æquale est tempori quo describitur arcus A*l*: sed est tempus quo percurritur arcus AH, ad tempus quo percurritur arcus A*l*, (cum utraque eadem velocitate describitur) ut arcus AH ad arcum A*l*; quare erit tempus descensus ex A in F ad tempus descensus ex A in *p*, ut arcus AH ad arcum A*l*; ac proinde dividendo tempus per F*p* erit ut H*h* arcus. Q. E. D. Fiant arcus HL, *hl* æquales, unde tempus descensus per FP æquale erit tempori per *fp*; & ob triangula KHL, FHC, item *khl*, *fh* C æquiangula.

h, erit KL ad HL vel *hl*, ut FC ad CH vel C*h*: item est *hl* ad *kl* ut C*h* ad C*f*, ac proinde, ex æquo, erit KL ad *kl* ut CF ad C*f*; at est KL ut incrementum velocitatis acquisitum dum mobile percurrit FP, & *kl* est ut incrementum velocitatis mobilis dum in æquali tempore percurrit lineolam *fp*; vires vero quibus acceleratur mobile in locis F & *f* sunt ut incrementa velocitatum temporibus æqualibus orta, erunt igitur vires mobilis acceleratrices in locis F & *f* ut rectæ KL, *kl*, hoc est vis qua urgetur mobile in F est ad vim qua urgetur in *f*, ut KL ad *kl*; sed ostensum est ut KL ad *kl* ita esse CF ad C*f*, quare erit vis qua urgetur mobile in F ad vim qua in *f* urgetur, ut distantia CF ad distantiam C*f*. Sunt igitur vires acceleratrices in quibusvis locis ut ipsorum à centro distantiæ. Q. E. D.

Cor. Hinc è converso si mobile descendendo ab A ad C urgeatur à vi quæ sit ut ipsius à centro distantia; & vis illa initio motus exponatur per rectam DE, posito arcu AE infinite exiguo; velocitates ejusdem mobilis in locis quibusvis F*f* exprimentur per sinus FH, *fh*, & tempora per arcus AH, A*h*; & incrementa velocitatum, vel, si arcus æqualiter crescant, vires acceleratrices per incrementa sinuum exponentur.

THEOR. XLV.

Si mobile in recta AC *urgeatur versus punctum* C, *viribus quæ sint distantiis à puncto* C *proportionales, ex quacunque altitudine demittatur, ad punctum* C *eodem semper tempore perveniet; estque tempus illud ad tempus quo possit mobile percurrere eandem viam, cum uniformi velocitate & æquali ei quæ ultimò cadendo acquiritur, ut semiperipheria circuli ad ejus diametrum.*

Demittantur duo mobilia ex punctis A & M simul, & urgeatur utrumque mobile viribus quæ sint distantiis à puncto C proportionales: dico utrumque mobile ad punctum C eodem tempore perventurum. Centro C, intervallis CA, CM, describantur circuli quadrantes AB, MN; & exponatur vis qua urgetur mobile in A, vel quod idem est, ipsius velocitas in ipso motus initio, per DE sinum arcus infinite parvi AE; con- Tab. 8. fig. 5.

ſtat ex *Cor.* præcedentis, ipſius velocitatem, poſt caſum ad C, per rectam CB exponi. Sed ex Hypotheſi, vis qua acceleratur mobile in A, eſt ad vim qua acceleratur mobile in M, ut CA ad CM, vel ut DE ad PO, ob arcus AE, MO ſimiles; quare ſi DE exponat velocitatem mobilis initio caſus ex A, PO exponet velocitatem mobilis initio caſus ex M: AC proinde (per idem Cor.) CN exponet velocitatem mobilis in C poſt caſum per MC. Eſt præterea tempus caſus ex A ad C, æquale tempori quo deſcribi poteſt peripheria AB, cum uniformi velocitate ut CB; & tempus caſus ex M ad C, æquale eſt tempori, quo deſcribitur peripheria MN velocitate ut CN. Sed tempus quo deſcribitur peripheria AB velocitate CB, æquale eſt tempori quo deſcribitur peripheria MN velocitate CN, (ob AB : MN : : CB : CN, ſpatia ſcil. percurſa velocitatibus proportionalia.) Quare erit tempus caſus ex A ad C æquale tempori quo corpus deſcendit ex M ad C. Q.E.D.

Tempus quo mobile percurrit rectam AC, cum velocitate CB eſt ad tempus quo arcum AB percurrit cum eadem velocitate, ut recta AC ad arcum AB, vel ut illius dupla ad hujus duplam, hoc eſt ut diameter circuli ad ſemiperipheriam; ſed tempus per arcum AB eſt æquale tempori deſcenſus ad C; unde erit tempus quo mobile fertur per rectam AC cum velocitate ut CB, ad tempus caſus ad C, ut diameter circuli ad ſemiperipheriam Q.E.D.

Tab. 8. fig. 6. *Defin.* Si ſuper recta B*b* inſiſtens circulus, (quem circulum generatorem dicimus,) puncto ſui *b*, (quod punctum lineans appellabimus) rectam B*b* tangens, ſuper eadem recta volvi intelligatur, peripheria ſua continua ad rectam applicatione commenſurans æqualem rectam BA*b*. donec punctum lineans in ſublime latum, adeoque curvam BG*b* ſuo motu deſcribens, circuitu facto, eandem rectam BA*b* iterum in *b* contingat; Curva BG*b* motu puncti *b* deſcripta, linea *Cyclois* appellatur. Et figura BGDAB figura cycloidis dicitur; & recta GA biſecans baſim perpendiculariter, cycloidis axis; & punctum G vertex cycloidis dicitur.

LEM-

LEMMA.

Si circulus generator circa axem Cycloidis constituatur, & à puncto quovis Cycloidis C ordinetur ad axem recta CE, cum peripheria circuli conveniens in D; erit recta CD æqualis arcui circulari GD, arcus vero cycloidis GC æqualis erit duplæ chordæ GD; & semicyclois BCG æqualis erit duplæ diametro AG; recta vero CF cycloidem in C tangens parallela erit chordæ DG. Hæc à *Wallisio* & aliis qui de Cycloide scripserunt, demonstrata sunt.

THEOR. XLVI.

In cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus est vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile urgente vi gravitatis, à quocunque in eo puncto demissum ad punctum imum pervenit, sunt inter se æqualia; habentque ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis, eam rationem quam habet semiperipheria circuli ad ipsius diametrum.

Sit cyclois ACD, cujus axis CE, circulus generator ECG. Cum recta cycloidem in puncto quovis H tangens parallela sit chordæ CG, in circulo Generatore circa axem constituto, ductæ; patet mobile in descensu suo, eadem vi accelerari in puncto H, ac si in recta GC descenderet; est vero vis qua acceleratur in GC ad vim Gravitatis, ut MC ad GC; sed ut MC ad GC ita GC ad CE, (per Cor. 8. Prop. El. 6.) Quare vis qua acceleratur mobile in puncto H, est ad vim Gravitatis, ut GC ad CE. Eadem ratione vis Gravitatis est ad vim qua acceleratur mobile in alio quovis loco K, ut CE ad CL) quare ex æquo vis qua acceleratur mobile in H, est ad vim qua acceleratur in K, ut GC ad LC, vel ut dupla GC ad duplam LC, hoc est ut curva Cycloidis HC ad curvam KC. Vires igitur quibus descendendo super cycloide acceleratur mobile, sunt ut longitudines curvæ percurrendæ. Ponamus jam rectam *ac* æqualem longitudini curvæ AC, atque supponatur mobile aliquod iisdem viribus urgeri in recta *ac* versus *c*, quibus mobile urgetur descendendo per curvam AC; at vires quibus urgetur mobile, in punctis quibusvis Tab. 8. fig. 7.

 cy-

cycloidis H & K, sunt ut longitudines HC, KC, vel *bc*, *kc*, hoc est vires in locis quibusvis sunt ut distantiæ locorum à puncto *c*; ac proinde (per Theor. præcedens) tempora descensuum ex quacunque altitudine æqualia erunt. Quoniam itaque in correspondentibus cycloidis & rectæ *ac* punctis, æquales sunt vires acceleratrices, velocitatum incrementa æqualia quoque erunt, *v. g.* posito AH = *ab*, accelerationes in punctis H & *h* æquales erunt, sicut etiam in punctis K & *k*, modo sit AK = *ak*: & similiter in cæteris omnibus utriusque lineæ punctis quæ sibi mutuo respondent, incrementa velocitatum æqualia erunt; adeoque si mobilia ex correspondentibus punctis incipiant descendere, summæ incrementorum, seu velocitates in æqualibus spatiis describendis acquisitæ æquales erunt, ac proinde tempora quibus æqualia hæc spatia æqualibus velocitatibus descripta sunt, æqualia quoque erunt. Est igitur tempus descensus ab *a* ad *c* in recta *ac*, æquale tempori descensus ab A ad C super cycloide, & tempus descensus ab *h* ad *c* in recta *hc*, æquale tempori descensus ab H ad C super cycloide; & similiter tempus per KC æquale est tempori per *kc*, si initium casus sit ex punctis *k*, K, & sic de cæteris. Sed tempus casus ab *a* ad *c* æquale est tempori casus ab *h* ad *c*, vel a *k* ad *c*; quare tempus descensus super cycloide ab A ad C, æquale erit tempori descensus ab H ad C, vel a K ad C. Tempora igitur descensus, quibus mobile à quocunque puncto in cycloide demissum ad punctum imum pervenit, sunt inter se æqualia. Q. E. D.

Porro tempus casus ab *a* ad *c* est ad tempus quo percurritur *ac* vel 2EC, cum velocitate ultimo acquisita, ut semiperipheria circuli ad diametrum: at tempus quo percurritur 2EC cum eadem velocitate, æquale est tempori, quo mobile sua Gravitate cadens, descendit per EC axem cycloidis; unde erit tempus descensus per *ac* vel AC ad tempus quo grave descendit per cycloidis axem, ut semiperipheria circuli ad ejus diametrum.

Cor. Tempus quo Grave descendit in cycloide per arcum AC

AC & afcendit per CD, hoc eft tempus motus in cycloide ACD, eft ad tempus cafus perpendicularis per axem cycloidis, ut integra circuli peripheria ad ejus diametrum.

Hinc fi Grave penduli vibrationes in cycloide perficiat, five in magnos excurrat arcus five in minimos, æqualibus femper temporibus fingulæ ofcillationes peragentur. *Hugenius* autem, in tractatu de *Horologio Ofcillatorio*, parte tertia, modum oftendit, quo fiet ut Grave in cycloide, vel alia quacunque curva, ofcilletur: invenienda fcil. eft curva, cujus evolutione curva data defcribitur; & duæ laminæ in eandem curvaturam inflectendæ funt, intra quas, per fila determinatæ longitudinis, fufpenfum Grave non circulum fed aliam curvam defcribit. Sint duæ laminæ ACB, AED, in figuras fimiles & æquales incurvatæ, & ex puncto A fufpendatur penduli filum, quod dum pendulum ofcillatur, circumplicatur laminis ACB, AED quas perpetuo tangit; per fili ad laminas applicationem continuo impeditur motus penduli in circulo, & Grave per curvam BPFD defertur: curva ACB vel AED dicitur *Evoluta*, & curva BPFD ex evolutione defcribi dicitur. Quod fi curvæ ACB vel AEB fint duæ femicycloides, quarum axes vel diametri circulorum Generantium fint æquales FG vel AG, dimidiæ fcil. longitudini penduli, curva BPFD per quam Grave defertur evadit Cyclois integra, cujus axis eft FG dimidia penduli longitudo, ut ab *Hugenio* aliifque demonftratur. Tab. 8. fig. 8.

Cum portio cycloidis prope verticem F, defcribitur motu fili cujus longitudo eft AF, atque circulus centro A intervallo AF, eodem fili motu defcribitur; circulus ille per F tranfiens fere coincidet cum cycloidis portione prope verticem F, eftque ipfi æquicurvus; eodem igitur tempore Grave defertur ad F, per arcum exiguum circuli ac per arcum cycloidis, cui circulus eft æquicurvus.

Hinc rurfus patet ratio, cur pendulo vibrationes exiguas in circulo perficiente, tempora ofcillationum funt æqualia: nam fi arcus CAD, GAF parvi fint, fere coincident cum portione cycloidis prope verticem F defcriptæ circa axem AK, dimidiam fcil. penduli longitudinem; adeoque eodem fere Tab. 8. fig. 9.

tempore descendit Grave per arcus circuli CA vel GA, quo per arcus cycloidis ipsis propemodum coincidentes descenderet: sed æqualibus temporibus per arcus quoscunque cycloidis descendet Grave; quare etiam æqualibus temporibus cadet Grave per arcus exiguos circulares CA, GA; ac proinde oscillationes integræ per arcus CAD, GAF æqualibus temporibus peragentur.

Est itaque tempus quo pendulum oscillationem minimam in circulo perficit, æquale tempori quo perficitur oscillatio per arcum cycloidis cujus axis est dimidia penduli longitudo. At tempus, quo perficitur oscillatio in cycloide, est ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis, hoc est per dimidiam penduli longitudinem, ut peripheria circuli ad diametrum. Atque hinc sequitur tempus cujusvis oscillationis minimæ, esse ad tempus casus per penduli longitudinem, in constanti ratione, quæ est ea quam habet circuli peripheria ad ipsius diametrum ductam in radicem quadratam numeri binarii.

Si in diversis orbis Terræ regionibus, idem pendulum temporibus inæqualibus oscillationes suas perfecerit, tempora descensuum per penduli longitudinem in diversis his regionibus inæqualia quoque erunt; & ubi lentius procedunt oscillationes, ibi quoque lentius descendet Grave in perpendiculo, & in dato tempore minus cadendo describet spatium. Experimento vero certum est, in Regionibus prope Æquatorem sitis, ejusdem penduli oscillationes diuturniores esse quam in aliis locis, quorum major est latitudo; adeoque Gravia in illis Regionibus minus in dato tempore conficiunt spatium cadendo; & minori vi accelerant motum suum quam in nostris Regionibus longius ab Æquatore dissitis: adeoque experimentis probatur minorem esse Gravitatis actionem in iis locis, quorum minor est latitudo, quam in locis polo propioribus.

Hoc Gravitatis decrementum ex vi centrifuga oritur: cum enim ex Terræ circa axem suum rotatione, quodlibet corpus à centro circuli quem describit recedere conatur, quo majores sunt corporum circuitus, eo major ipsis inerit vis con-

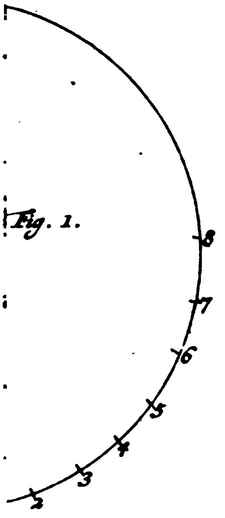
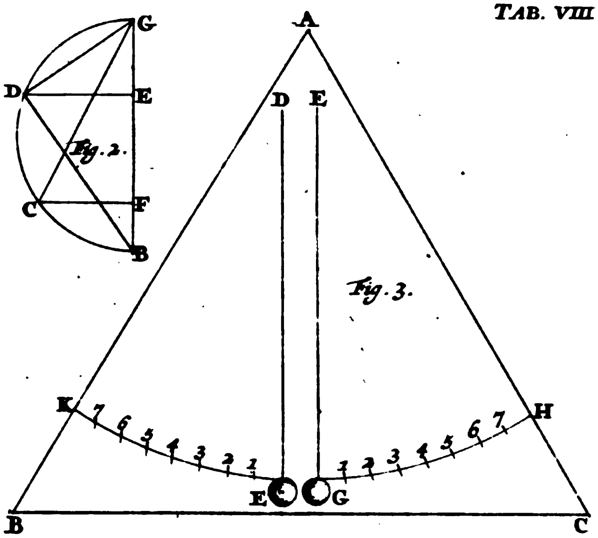
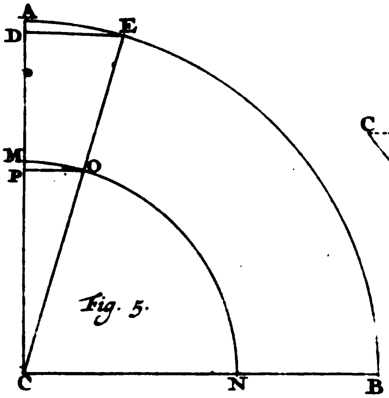
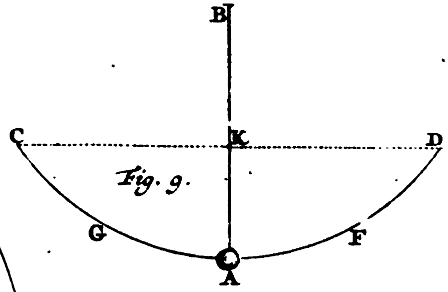


Fig. 1.
8
7
6
5
4
3
2


G
D
E
Fig. 2.
C
F
B
A
D E
Fig. 3.
K 7 6 5 4 3 2 1
1 2 3 4 5 6 7 H
E G
B
C


A
E
D
M
O
P
Fig. 5.
C
N
B


B
C
K
D
Fig. 9.
G
F
A

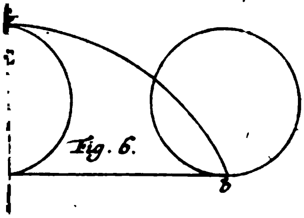
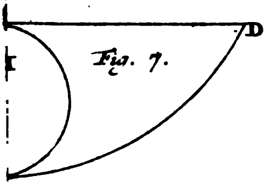
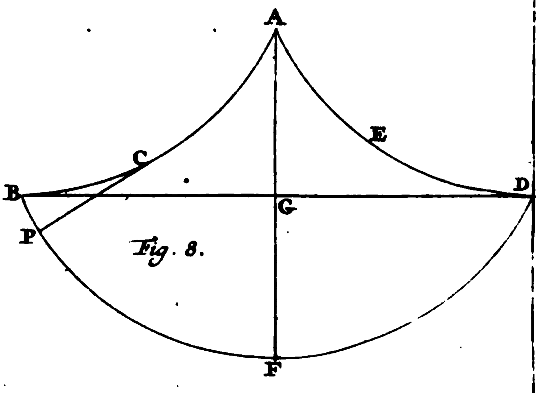


Fig. 6.
b


D
Fig. 7.


A
E
C
B
D
G
P
Fig. 8.
F

centrifuga, quæ itaque est semper ut sinus distantiæ loci à polo, & sub æquatore maxima est, sub polo vero nulla; adeoque erit vis, Gravitatis in Æquatore minima, in polo vero maxima.

Priusquam hanc materiam missam facimus, lubet solutionem exhibere celeberrimi problematis à *Galileo* primum quæsiti, deinde à *Joh. Bernoullio* Geometris propositi, ineunte An. Dom. 1696. Et à Geometris celeberrimis, *Newtono*, *Leibnitio*, *Jac. Bernoullio*, *Hospitalio* aliisque soluti. *Problema* autem sic propositum fuit.

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, *assignare mobili viam, per quam Gravitate sua descendens, & moveri incipiens à puncto* A, *brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum* B. TAB. 9. *fig.* 1.

Lineam hanc esse Curvam Cycloidis per puncta AB transeuntem, cujus basis est in horizontali per A ducta, invenerunt prædicti Geometræ, ad quod demonstrandum sequens præmittimus.

LEMMA.

Si A*dg* B, *sit linea celerrimi descensus, citius descendet Grave, ex quolibet ejus puncto d ad aliud quodvis ipsius punctum g, post casum ex* A, *per ipsam curvam deg, quam per aliam quamcunque viam.*

Nam si dicatur citius descendere Grave per *dfg*, ergo via A *dfg* B, breviori tempori percurretur, quam A *deg* B; ac proinde curva illa A *deg* B non erit curva celerrimi descensus, contra hypothesin.

Sit jam A *deg* B curva, cujus axis AC, ordinatim applicata *a*L; Fluxio seu incrementum momentaneum axis sit LO = *db*: Fluxio vero curvæ sit *de*; sitque semper rectangulum sub data recta, quam vocemus *a*, & *db* vel LO, applicatum ad *de*, velocitati qua percurritur *de*, hoc est, quæ acquiritur cadendo ex A in *d* proportionale: hæc curva erit linea celerrimi descensus. Capiantur *de*, *eg* duæ curvæ portiones contiguæ & infinite parvæ; quæ proinde à TAB. 9. *fig.* 2.

re-

rectulis minime differunt: dico minore tempore descendere Grave per deg curvam, post casum ex A, quam per aliam quamlibet viam dfg. Per f ducatur fq parallela eg. Et supponatur fq eadem celeritate percurri qua eg; sitque fn in de. item me, gq in fq perpendiculares. Et ob æquiangula triangula fne, deb, item fme, gei; est de ad db ut fe ad ne; adeoque erit $ne = \frac{db \times fe}{de}$: item ob ge ad ei ut fe ad fm: erit $fm = \frac{ei \times fe}{ge}$. Est vero $\frac{db \times fe}{de} : \frac{ei \times fe}{ge} :: \frac{db}{de} : \frac{ei}{ge} :: \frac{bd \times a}{de} : \frac{ei \times a}{ge}$, hoc est, ne est ad fm ut velocitas qua percurritur ne, ad velocitatem qua percurritur fm: unde ne, fm æqualibus temporibus percurruntur; & quia mq æqualis est eg, erit tempus per mq æquale tempori per eg, adeoque tempus per fq æquale erit tempori per neg. Sed ob angulum ad q rectum, est fg major quam fq, adeoque tempus per fg majus erit tempore per fq, vel per neg; & ob df majorem quam dn, erit tempus per df majus tempore per dn; unde erit tempus per df, fg, majus tempore per dn, ng. Minore igitur tempore descendit Grave ex dng, post lapsum ex A, per curvam deg. quam per aliam quamlibet viam; ac proinde curva AdegB erit via celerrimi descensus.

TAB. 9. fig. 3. Sit ABM cyclois per B transiens, cujus basis sit horizontalis recta per A ducta; erit illa linea super qua descendens Grave, in minimo tempore perveniet ex A in B. Sit GNM dimidium circuli Generatoris, cujus diameter GM vocetur a, sitque de pars curvæ cycloidis infinite parva, quæ ab ejus tangente in d minime differt; adeoque parallela erit rectæ NM; unde triangula dhe, NQM, GMN, æquiangula erunt: quare est de ad dh, ut GM seu a ad GN; ac proinde $dh \times a = de \times$ GN. AC $\frac{dh \times a}{de} =$ GN. Sed (per Cor. 1. Theor. 43.) est GN ut velocitas, quæ acquiritur à Gravi cadendo ex altitudine GQ vel Ld, hoc est ut velocitas qua percurritur lineo-

la

la de. Quare erit $\frac{dh \times a}{de}$ velocitati qua percurritur lineola de proportionalis. Est igitur curva Cycloidis AdeB linea celerrimi descensus. Q. E. D.

Si velocitas ponatur esse ut altitudo unde decidit Grave, linea celerrimi descensus erit portio peripheriæ circuli, cujus centrum est in horizontali per A ducta, nam ob æquiangula triangula dhe, dLC, est dh ad de, ut dL ad dC; ac proinde erit $dh \times d\mathrm{C} = de \times d\mathrm{L}$ & $\frac{dh \times d\mathrm{C}}{de} = d\mathrm{L}$. Sed ex hypothesi dL est velocitati proportionalis; quare si dC dicatur a, erit $\frac{dh \times a}{de}$ velocitati proportionale. In hac igitur hypothesi peripheriæ portio AdeB erit via celerrimi descensus. TAB 9. fig 4.

Si velocitas, in puncto quolibet, sit ut altitudinis emensæ dignitas m, & dicatur AL x, dL y, erit $dh = \dot{x}$, $he = \dot{y}$; & $de = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Quare ex curvæ natura, erit $\frac{a^m \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = y^m$, unde $\frac{a^{2m} \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = y^{2m}$, & $a^{2m} \dot{x}^2 = y^{2m} \dot{x}^2 + y^{2m} \dot{y}^2$, & $a^{2m} \dot{x}^2 - y^{2m} \dot{x}^2 = y^{2m} \dot{y}^2$, & $\dot{x}^2 = \frac{y^{2m} \dot{y}^2}{a^{2m} - y^{2m}}$, & $\dot{x} = \frac{y^m \dot{y}}{\sqrt{a^{2m} - y^{2m}}}$.

Quæ æquatio universaliter exprimit curvæ naturam, in qua descendit Grave, tempore brevissimo, si velocitas sit ut altitudinis emensæ dignitas quælibet m.

LECTIO XVI.

MOtus Gravium in planis inclinatis, aut in superficiebus curvis, eorumque symptomata præcipua, quantum permitteret instituti nostri brevitas, in præcedente lectione explicavimus. Restat jam, ut Projectorum Phænomena recenseamus: & primo invenienda est natura istius lineæ, quam mobile in spatiis liberis, & non resistentibus projectum, urgente vi Gravitatis describit. Et quidem si directe sursum vel deorsum projiciatur Grave, in recta linea mo-

movebitur; ejusque motum esse motum uniformiter retardatum vel acceleratum, prout sursum vel deorsum projicitur, ex dictis in prioribus lectionibus constat. At si secundum directionem horizontalem, vel aliam quamvis ad horizontem obliquam projiciatur, in linea quadam curva defertur.

Tab. 9 fig. 5. Projiciatur enim mobile ex A, secundum directionem AV. Per legem naturæ primam, si nulla alia accedat vis, in eadem recta, eadem cum velocitate, semper progrederetur; adeoque æqualia spatia AB, BC temporibus æqualibus describeret. Distinguamus itaque tempus in æquales particulas; & post primam temporis particulam ubi mobile ad B pervenerit, vis aliqua, impulsu unico, in ipsum agere supponatur; motumque illi communicare, quo secundum directionem ad horizontem perpendicularem (priore sublato motu) per rectam BE deferretur, in eo tempore quo describeret rectam BC; & compleatur parallelogrammum CBED: constat ex Cor. 2. Theor. 30. mobile motu ex utroque composito, per diagonalem BD moveri, & in hac recta postea semper pergeret projectum, si nova nulla accederet vis ipsum ex propria semita detorquens; & æquali tempore spatium DF ipsi BD æquale conficeret. Verum si in puncto D vis eadem, secunda vice, simili agat impulsu, quo mobile per spatium æquale FG deorsum in eo tempore deferatur: motus mobilis ex utroque motu compositus, erit per rectam DG, quam in eodem tempore describet mobile; quo absque novo impulsu progrederetur per spatium DF. Si vero post tertiam temporis particulam, eadem vis iterum agat, & mobile in G deorsum per spatium ipsi HI æquale impelleret; motus ex priore & hoc novo compositus erit secundum rectam GI, quam in quarta temporis particula describet mobile: in I vero eadem urgente vi, mobile è semita GL in directionem IK detorquebitur, atque hác lege projectum motu suo polygonum ABDGIK describet. Quod si diminuantur in infinitum singulæ temporis particulæ, quibus vim agere posuimus, & augeatur ipsarum numerus, latera polygoni in infinitum minuentur, ipsorumque numerus in infinitum augebitur:

bitur: ac proinde in curvam vertetur Polygonum, hoc est, si vis deorsum propellens talis sit, ut constanter & indesinenter agat, qualis est vis Gravitatis, mobile urgente hac vi in Curva deferetur.

THEOR. XLVII.

Projectum, cujus linea directionis horizonti parallela est, motu suo describit lineam Parabolicam.

Sit Grave, vi quavis extrinseca, Balista, *v. g.* Pulvere Pyrio, aut simili qualibet vi, ex puncto A projectum, cujus projectionis directio sit horizontalis AD. Dico Gravis semitam fore curvam semiparabolicam. Nam si aër motui projecti minime obstaret, neque adesset Gravitas; projectum motu æquabili procederet, in eadem semper directione; essentque tempora quibus percurruntur spatii partes AB, AC, AD, AE, ut ipsa spatia AB, AC, AD, AE respective. Accedente jam Gravitatis vi, & eodem tenore agente ac si mobile vi extrinseca non impelleretur; continuo à recta AE deflectet, & spatia descensus seu deviationes ab horizontali AE, eædem erunt ac si perpendiculariter caderet. Quare si mobile, suâ gravitate perpendiculariter cadens, tempore AB percurrat spatium AK; tempore AC descendet per AL, & tempore AD per AM, eruntque spatia AK, AL, AM, ut quadrata temporum, hoc est ut quadrata rectarum AB, AC, AD, vel KF, LG, MH. At cum impetus secundum directionem horizonti parallelam idem semper maneat; (huic enim vis Gravitatis, quæ deorsum tantum corpora urget, minime contraria est) æqualiter promovebitur mobile secundum directionem horizonti parallelam, ac si Gravitas abesset: quare cum tempore AB percurrit mobile spatium æquale AB; cogente vero vi gravitatis deflectet à recta AB per spatium æquale AK, positaque BF æquali & parallela AK, in fine temporis AB erit Grave in F. Sic cum tempore AC percurrat mobile spatium, secundum directionem horizontalem, æquale AC, & in eo tempore descendat per spatium æquale AL, si fiat CG æqualis & parallela AL, in fine istius temporis erit mobile in G. Similiter cum tempore AD, secundum TAB. 9. fig. 6.

dire-

directionem horizontalem promoveatur Grave per spatium æquale AD, accedente Gravitate descendat interim per spatium æquale AM, positaque DH æquali AM, in fine temporis AD erit mobile in H. Semitaque projecti erit in Curva AFGH: sed quia quadrata rectarum KF, LG, MH sunt interceptis AK, AL, AM proportionalia, erit curva illa AFGH semiparabola. Est itaque semita corporis Gravis secundum directionem AE projecti curva semiparabolica. Q. E. D.

LEMMA.

Tab. 9. fig. 7. *Sit* ADB *curva talis, ut demissa, ex quovis ejus puncto* C, *ad* AB *perpendiculari* CG, *rectangulum sub* AG, GB *æquale sit rectangulo sub* CG, & *data recta* L, *erit curva illa Parabola.*

Bisecetur AB in E; & erigatur perpendicularis DE erit ex hypothesi, rectangulum sub DE & L: æquale rectangulo sub AE, EB, seu AE quadrato ‖ (per 5. El. secundi) rectangulo sub AG & GB + GE quad. = CG × L + GE quad. = EF × L + CE quad. quare erit rectang. sub DF & L æquale CF quadrato, quæ est proprietas Parabolæ. Si punctum *g* cadat in AB productam; quod fit ubi curva descendit infra AB, eadem Parabola erit locus puncti *c*; nam (per 6. El. secundi) est E*g* quad. = (*ec* quad. =) rectang. sub A*g*. *g*B + EB quad. = L × *cg* + L × DE. = L × D*e*: quæ est proprietas parabolæ.

Cor. Est recta illa L latus rectum seu parameter Parabolæ.

THEOR. XLVIII.

Tab 9. fig. 8. *Linea curva, quæ describitur à Gravi, secundum directionem quamlibet sursum oblique projecto, parabolica est.*

Sit AF directio projectionis, utcunque ad horizontem AV inclinata. Seposita Gravitatis actione, mobile in eadem recta motum suum semper continuaret, per Legem naturæ primam, & spatia AB, AC, AD, temporibus proportionalia describeret. At accedente Gravitate, à via AF continuo deflectere cogitur, & in curva moveri, dico hanc curvam esse Parabolam. Ponamus Grave perpendiculariter cadens, tem-

tempore AB percurrere ſpatium AQ, tempore vero AC ſpatium AR, & tempore AD ſpatium AS; erunt ſpatia AQ, AR, AS ut quadrata temporum, vel ut quadrata rectarum AB, AC, AD. Quoniam vero mobile vi inſitâ, excluſa gravitate, tempore AB percurreret ſpatium AB, Gravitate vero interim ſe exerente; deſcendit per ſpatium æquale AQ, liquet ſi in perpendiculo BG capiatur BM = AQ, locum Gravis in fine temporis AB, fore M. Similiter cum mobile, ex impetu primo impreſſo, tempore ut AC percurrere debet ſpatium AC, at ex vi Gravitatis per ſpatium = AR interim deſcendere cogitur; ſi capiatur in perpendiculo CN = AR, erit N locus mobilis in fine temporis AC. Sic etiam poſito ſpatio DO, in perpendiculo, æquali AS, erit O locus mobilis in fine temporis AD, & deviationes BM, CN, DO à recta AF temporibus AB, AC, AD ortæ, æquales erunt ſpatiis AQ, AR, AS; adeoque erunt, ut quadrata rectarum AB, AC, AD. Per A ducatur horizontalis recta AP; ſemitæ projecti occurrens in P. Ex P erigatur perpendiculum PE, lineæ directionis occurrens in E; & ob æquiangula triangula ABG, ACH, ADI, AEP, quadrata rectarum AB, AC, AD, AE proportionalia erunt quadratis rectarum AG, AH, AI, AP; adeoque deviationes BM, CN, DO, EP quadratis rectarum AG, AH, AI, AP, proportionales erunt. Rectis EP, AP tertia proportionalis ſit L recta; eritque (per 17. El. 6.) $L \times EP = AP$ quad. Eſt vero AP quad.: AG quad. :: EP : BM :: $L \times EP : L \times BM$, unde cum ſit $L \times EP = AP$ quad. erit $L \times BM = AG$ quad. Similiter erit $L \times CN = AH$ quad. & $L \times DO = AI$ quad. Quoniam autem eſt BG: AG :: (EP: AP :: ex hyp.) AP: L, erit $L \times BG = AG \times AP = AG \times AG + AG \times GP$ - AG quad. + $AG \times GP$. Oſtenſum autem eſt $L \times BM = AG$ quad. quare erit $L \times BG - L \times BM = AG \times GP$, hoc eſt $L \times MG = AG \times GP$: ſimili ratiocinio erit $L \times NH = AH \times HP$, & $L \times OI = AI \times IP$, ſicut etiam $L \times VK = AV \times VP$. Quare per lemma præcedens, Curva AMNOPK in qua movetur projectum, erit Parabola. Q.E.D.

Cor. 1. Recta L eſt parabolæ latus rectum ad axem pertinens.

Cor. 2. Sit AH = HP & erit $L \times CN = AH$ quad. $= L \times NH$,

 Unde

Unde erit $NH = CN$; ac proinde recta AF linea directionis projecti Parabolam tanget (per Prop. 33. libri primi Conicorum *Apollonii*

Cor. 3. Quoniam est $AP = 2AH$; erit $PE = 2CH = 4CN$ vel $4NH$.

Cor. 4. Si rectis PE, AE tertia proportionalis sit l, erit l latus rectum, seu parameter parabolæ ad diametrum AS pertinens. Nam quoniam PE, AE, l sunt continue proportionales, erit $l \times PE = AE$ quadrato: est vero AE quad. ad AB quad. vel ad QM quad. :: PE : BM vel AQ :: $l \times PE$: $l \times AQ$: quare cum sit AE quad. $= l \times PE$ erit QM quad. $= l \times AQ$. Quare erit l parameter ad diametrum AS pertinens.

Cor. 5. Est vero $l = PE + L = 4NH + L =$ quadruplæ altitudini parabolæ $+ L$. Nam est $l \times PE = AE$ quad. $= AP$ quad. $+ PE$ quad. $= L \times PE + PE$ quad. $= \overline{L + PE} \times PE$. Quare erit $l = L + PE = L + 4NH$.

Cor. 6. Si tempora AB, BC, CD fiant æqualia; erunt spatia horizontalia AG, GH, HI æqualia; hoc est si Grave motu suo describat parabolam, æqualibus temporibus secundum directionem horizonti parallelam æqualiter promovebitur; & in singulis parabolæ punctis idem manebit impetus horizontalis, qui fuit ab initio motus.

TAB. 9. fig. 9. *Cor*. 7. Si mobile ex A projectum, secundum directionem AE, describat parabolam ACP; in puncto quolibet C, per legem naturæ primam, secundum tangentem CG egredi conabitur, cum omni ea velocitate quam in puncto C habet, & per solam Gravitatem in curva parabolica retinetur. Quod si aliud Grave ex C secundum directionem CG, ea velocitate projiciatur quam habuit Grave ex A projectum in eodem puncto C; Grave illud alterum eandem parabolam CP describet. In puncto enim C eadem est utriusque Gravis directio, eadem velocitas, & eadem Gravitatis vis: quare utriusque eadem erit semita.

Cor. 8. Hinc si Grave, deorsum secundum directionem ad horizontem obliquam, projiciatur; semita projecti erit Curva parabolica.

THEOR.

THEOR. XLIX.

Impetus projecti in diversis Parabolæ punctis, sunt portiones tangentium inter duas rectas axi parallelas interceptæ.

Describat Grave parabolam ABL, quem tangant in punctis A & B rectæ AD, BE. Erunt impetus Gravis in punctis A &B, ut CD, EB portiones tangentium inter duas rectas axi parallelas interceptæ. Nam si à mobili in puncto A Gravitas auferatur sua, egraderetur in tangentem AC, eodem impetu quem habet in puncto A. Sic etiam mobile in B, amissa Gravitate, per tangentem BE procederet, cum omni velocitate quam in puncto B habet. Verum in punctis A & B idem manet impetus horizontalis, uti liquet (per Cor. 6. præcedentis Theor.) adeoque mobile in A egrediens per tangentem AD, & in B per tangentem BE, æqualibus temporibus per æqualia spatia secundum lationem horizontalem promovebitur. Æqualibus igitur temporibus percurruntur CD in tangente AD, & BE in tangente BE; sed velocitates, seu impetus mobilis, sunt ut spatia æqualibus temporibus percursa: quare impetus mobilis in A est ad ejusdem impetum in B ut CD ad BE. Q. E. D. TAB. 10. fig. 10.

Cor. Si A sit vertex parabolæ, & producatur tangens donec axi occurrat in G; erit impetus in A ad impetum in B ut ordinata BH ad tangentem BG; est enim CD : BE :: CF : BF (ob Triangula CBF BHG similia) :: BH : BG.

Defin. Sit ACF parabola, in cujus axe ultra verticem producto capiatur GA = $\frac{1}{4}$ lateris recti. Linea GA dicitur *Sublimitas Parabolæ*. Et si infra verticem capiatur AD = AG, & ordinetur DC ad axem, erit DC = 2 AD vel 2 AG: nam ex natura parabolæ rectangulum sub latere recto = 4 AD & AD, hoc est 4 AD quad. = est DC quad. adeoque erit 2 AD = DC. TAB. 10. fig. 1.

THEOR. L.

Si Grave ex Sublimitate Parabolæ decidat ad verticem usque, motusque cadendo acquisitus, reflexione aliqua aut alio quovis modo, in horizontalem mutetur, ita ut de novo, Grave incipiat motum deorsum; Grave projectum ipsam Parabolam describet.

Cadat

Tab 10. fig. 1. Cadat Grave ex puncto G sublimitate parabolæ ACF, & in A, per reflexionem aut aliam quamvis causam, motus cadendo acquisitus in horizontalem per ABE mutetur; Vel quod idem est, projiciatur Grave secundum directionem AE, ea velocitate quæ acquiritur cadendo per GA: dico Grave illud parabolam ACF motu suo describere. Sit AD = AG, eritque DC = 2 AG. Ducatur CB ipsi AD parallela. Et ex alio quovis parabolæ puncto F ducantur FH ad AE, & FE ad HA parallelæ. Si abesset Gravitas, mobile secundum directionem AE projectum, velocitate quæ acquiritur cadendo ex G in A, eodem tempore per duplum G A latum esset; adeoque in eo tempore describeret AB = DC = 2 GA. Sed mobile, ob vim Gravitatis, incipiens in puncto A de novo descendere, in eodem tempore cadet per spatium BC = AG. Quare motu suo transibit per punctum C in parabola. Porro supponatur mobile motu horizontali, (abstrahendo ab illo qui ex Gravitate oritur) quodam tempore pervenisse in E, ultra vel citra B; cumque motus secundum directionem horizonti parallelam æquabilis maneat, erunt AB AE, ut tempora quibus percurruntur. Sed descensus sive deviationes mobilis à recta AE, sunt ut quadrata temporum, quibus fiunt: quare ob BC, EF quadratis rectarum AB, AE proportionales, cum C est locus Gravis in fine temporis AB, erit F ejusdem locus in fine temporis AE; atque sic semper Grave in parabola ACF reperietur.

Cor. Hinc Gravis, parabolam quamvis describentis, velocitas in vertice, est ea quæ acquiritur cadendo ex Sublimitate parabolæ.

LEMMA.

Tab 10. fig. 2. *Sit* BA *Parabola cujus axis* AF, *sublimitas* AG, *tangens quælibet* BC, *ordinatim applicata* BF: *erit* BF. *quad.*: BC *quad.*:: GA: GF.

Est enim (per 33. Libri primi Conicorum Apollonii CF = 2 AF; & ex natura parabolæ 4 GA × AF = BF quad. quare erit BF quad.: BC quad.:: 4 GA × AF: 4 GA × AF + CF quad.:: 4 GA × AF: 4 GA × AF + 4 AF quad.:: GA: GA + AF vel GF. Q. E. D.

THEOR.

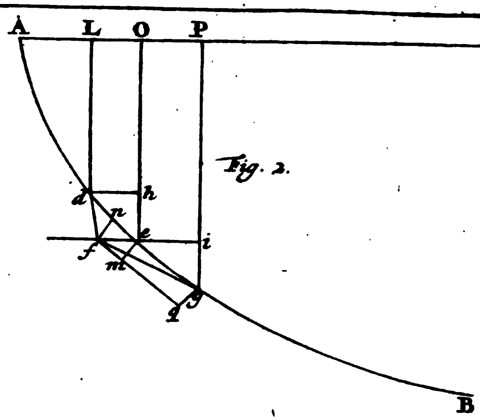
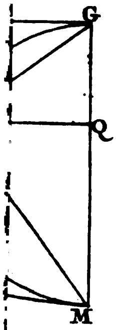


Fig. 2.



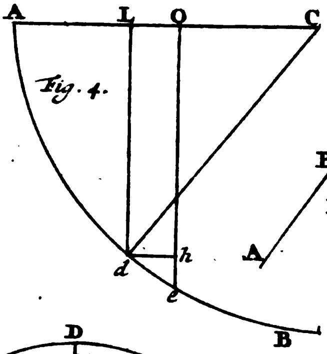


Fig. 4.

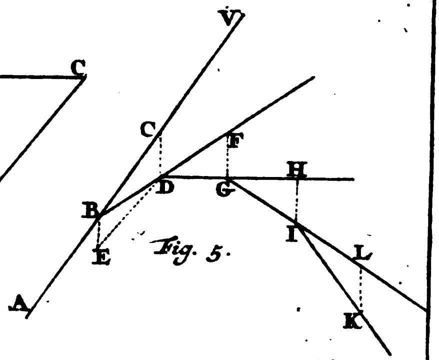


Fig. 5.

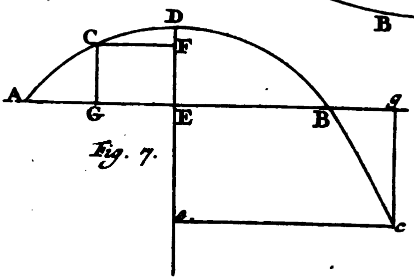


Fig. 7.

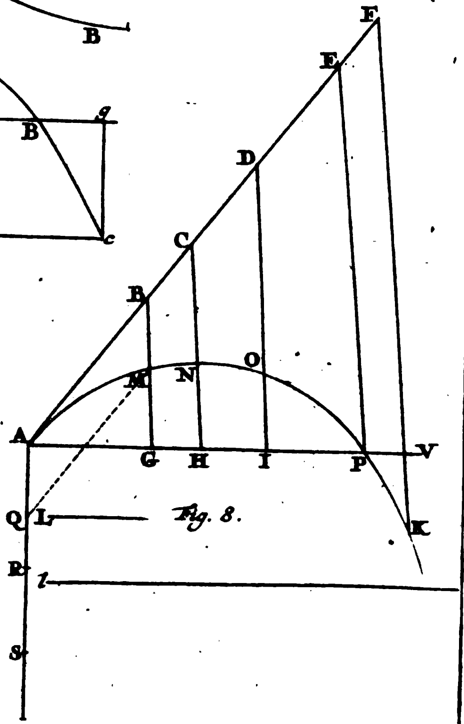


Fig. 8.

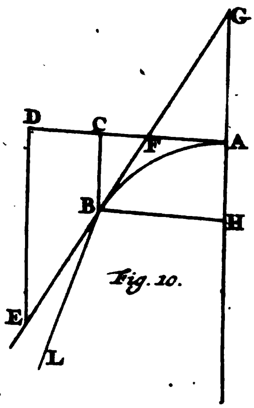


Fig. 10.

THEOR. LI.

Grave directe sursum projectum, eodem impetu quo aliud Grave oblique projicitur, ascendet ad altitudinem æqualem altitudini & sublimitati simul sumptis, ejus parabola quam oblique projectum motu suo describet. TAB. 10. fig. 3.

Projiciatur ex B secundum directionem BC Grave, motu suo describens parabolam BAM, cujus axis AF, vertex A, sublimitas GA. Dico si idem vel aliud Grave, æquali impetu ex B projiciatur directe sursum, illud ascendere ad L, ut sit BL æqualis FG altitudini & sublimitati parabolæ simul sumptis. Per Cor. Theor. 49. Impetus Gravis in B est ad ejusdem impetum in A, ut BC ad BF; sed impetus acquisitus cadendo ex G in F, est ad impetum acquisitum cadendo ex G in A, in subduplicata ratione GF ad GA, hoc est (ob BC quad. : BF quad. :: GF : GA) ut BC ad BF. Quare erit impetus in B ad impetum in A, ut impetus acquisitus cadendo ex G in F ad impetum acquisitum cadendo ex G in A; sed impetus Gravis in vertice A est is qui acquiritur cadendo ex G in A; quare ejusdem impetus, seu velocitas, in B est ea quæ acquiritur cadendo ex G in F, sive ex L in B, quæ altitudo æqualis est altitudini & sublimitati parabolæ simul sumptis; sed Grave sursum directe projectum eodem impetu ascendet ad L: quare si Grave directe sursum projiciatur, eo impetu quem habet illud Grave describens parabolam BAM in eodem puncto B; ascendet ad altitudinem æqualem altitudini & sublimitati parabolæ simul sumptis. Q. E. D.

Cor. 1. Si Grave cadat ex L in B, & manente impetu casu acquisito, reflectione aliqua aut simili quovis modo, mutetur directio motus in rectam BC vel BN, ita ut Grave de novo incipiat descendere; Grave motu suo parabolam SBAM describet.

Cor. 2. Impetus in quovis parabolæ puncto B, est is qui acquiritur cadendo per quartam partem lateris recti pertinentis ad diametrum quæ per punctum illud ducitur. Est enim LB = ¼L + KB. Quare erit 4 LB = L + 4 KB = lateri recto

 quod

quod ad diametrum per B transeuntem pertinet, ut constat ex Cor. 5. Theor. 48.

Jactis fundamentis Doctrinæ de Gravium projectione, antequam ad solutionem sequentium problematum accedamus; convenit ut modum ostendamus, quo Tormenta bellica, secundum quemlibet elevationis Gradum, dirigantur. Directio autem *Bombardi* eadem censenda est, cum directione vacui seu animæ ejusdem; nam accenso pulvere pyrio, Globus emittitur secundum concavitatem *Bombardi* vel *Mortarii*: & nisi adesset Gravitas, in illa recta producta pergeret, adeoque recta illa Tormenti directio est.

Quare ut tormentum ad scopum dirigatur, non collimandum est secundum exterius metallum, cum Tormenta crassiora sunt versus caudam quam juxta orificium, quod maxima eorum resistentia fieri debet in ea parte, quæ patitur maxime à pulvere pyrio; unde ut facillime dirigatur tormentum, additur aliquid orificio, (quod *Dispart* vocatur) ut ejus crassities æquetur crassitiei caudæ: collimatur deinceps per rectam animæ *Bombardi* parallelam, atque modo prædicto Tormenta rectà ad scopum diriguntur cum muri dejiciendi sunt; aut aliud quidvis efficiendum, ubi magnus requiritur impetus; & scopus non distat ultra 200 passus, & tormentum satis magnum est: in talibus jactibus præter mox dicta, & experientiam de concedendo cuique Tormento debitam pulveris pyrii quantitatem & Globo congruam, nullum insuper artificium requiritur. Verum cum sæpissime arces aut hostes impetendi sunt, qui ob nimiam distantiam rectà collimando attingi non possunt, vel ubi urbium tecta per *Bombas* cadentes perrumpenda & ædes accendendæ sunt; elevanda est machina Bellica, angulo ad horizontem inclinato: in quem finem opus erit regula ABCD cui adhæret parallelogrammum BEFD, in quo semicirculus in suos gradus divisus inscriptus; ex cujus centro dependet filum pondere instructum: extremum autem regulæ A in os machinæ inserendum est, & in situ ad ejus axem parallelo regula detinenda est, atque sic attollendum aut deprimendum est Tormentum, donec perpendiculum CQ attingat, in semicirculi

TAB. 10. fig. 4.

lim-

limbo, punctum K, gradum scil. elevationis desideratæ, ab L versus B numerandum. Patet autem angulum LCK æqualem esse angulo CMN elevationis machinæ; quia angulus MCN est utriusque complementum ad rectum. Sæpe parallelogrammo BEFD solum utuntur absque regula, & latus BE ad os machinæ applicant, quo fit ut perpendiculum CQ ostendat gradum elevationis.

Defin. Per Impetum perpendiculo quovis AB designatum, intelligimus impetum requisitum ad projiciendum Grave propositum ex A ad altissimum punctum B perpendiculi AB, sive quod idem est, impetum acquisitum cadendo ex B in A; neque enim alia ratione impetus sub certa & universali regula cadere potest, quam illum hoc modo per spatia determinando. TAB. 10. fig. 5.

PROBL. VIII.

Dato impetu BA, *hoc est quantus est naturaliter cadentis ex* B *in* A, *dataque directione* AI, *seu angulo Elevationis* DAI; *oportet projectionis amplitudinem, altitudinem, totamque futuræ projectionis semitam reperire.* TAB. 10 fig. 5.

Ducantur ex A & B horizontales lineæ AD, BL; Supra diametrum AB fiat semicirculus AFB, qui lineam directionis AI secet in F; per F ducatur horizonti parallela EF, & producatur ad G, ita ut sit GF = EF: itemque per G agatur perpendiculum LGD; vertice G per A describatur parabola AGK; dico hanc esse semitam projecti, cujus directio est AI, & impetus AB; adeoque DG sive AE erit projectionis altitudo. Dupla AD sive quadrupla EF erit ejusdem amplitudo sive jactus integer horizontalis, & BE sive LG erit ejusdem parabolæ sublimitas. In triangulis AEF, IGF, ob angulos ad E & G rectos, & angulos AFE, GFI ad verticem æquales, item EF = GF, erit IG = AF = DG, ac proinde recta AI tanget parabolam. Et quoniam est AD = EG = 2 EF; erit AD quad. = 4 EF quad. = 4 BE × EA = 4 LG × GD = rectangulo sub latere recto & GD; quare erit 4 LG = lateri recto parabolæ, unde erit LG ejusdem parabolæ sublimitas: quare (per Cor. 1. Theor. 51.) si Grave decidat ex B in A, & impetu casu acquisito se-

secundum directionem AI projiciatur, parabolam AGK describet.

Tab 10. fig. 6. *Cor.* Hinc manifestum est ex dato alicujus machinæ impetu AB, circa quem descriptus sit semicirculus ADB, dari altitudines & amplitudines omnium projectionum, quæ ab eadem machina fieri possunt. Exempli gratia, manente semper eodem impetu AB, projectio facta secundum directionem AE, habet altitudinem AF, & amplitudinem quadruplam ipsius EF; similiter jactus facti secundum directionem AD altitudo erit AG, & amplitudo quadrupla ipsius GD; & sic de cæteris. Unde si angulus elevationis DAK sit semirectus, erit quadrupla GD amplitudo omnium maxima quæ eodem impetu fieri possunt; & amplitudines projectionum æqualiter à projectione semirecta distantium, verbi gratia secundum rectas AE, AC, (positis angulis DAE, DAC æqualibus) nimirum quadrupla EF & quadrupla HC, erunt æquales. Erit præterea projectionis semirectæ amplitudo 4 GD = 4 GB = lateri recto parabolæ. Projectio vero perpendicularis sursum, hoc est impetus projectionis, æquabitur dimidiæ amplitudini projectionis semirectæ eodem impetu factæ. Denique ad æquales jactus in plano horizontali faciendos, minor requiritur impetus in projectione semirecta: si enim non sit minor impetu alterius projectionis, secundum aliam directionem factæ, erit amplitudo projectionis semirectæ major amplitudine alterius istius projectionis.

Cor. 2. Quoniam AK tangit circulum, erit (per 32. Elementi tertii) angulus ABE = EAK angulo elevationis; ac proinde est angulus AGE ipsius EAK duplus: quare posito GA dimidio impetus pro radio, erit EF quarta pars amplitudinis, sinus dupli anguli elevationis; & AF altitudo projectionis, erit arcus AE seu dupli anguli elevationis sinus versus; & FB parabolæ sublimitas erit sinus versus arcus BE, seu complementi dupli anguli elevationis ad duos rectos.

PROBL. IX.

Tab. 10. fig. 7. *Datis amplitudine* AK *& angulo directionis* CAK, *invenire projectionis impetum & altitudinem* AI.

Ca-

Capiatur AD pars quarta amplitudinis; & erigantur perpendicula DC, AB; fiatque angulus ACB rectus. Dico AB esse projectionis impetum, & DC esse ejusdem altitudinem. Nam quoniam angulus ACB rectus est, semicirculus diametro AB descriptus transibit per C; unde per Corol. 1. Problematis præcedentis, projectio cujus directio AC & impetus AB, motu suo describet parabolam AMK, cujus altitudo est DC vel AI, & quarta pars amplitudinis est AD; quare vicissim projectum cujus directio est AC & quarta pars amplitudinis AD, impetum habebit AB, & altitudinem DC. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc ex dato cujusvis machinæ quovis jactu horizontali, è data elevatione facto; reperire licet altitudinem jactus perpendiculariter sursum facti, nimirum machinæ impetum, qui quidem, in majoribus Tormentis, excedit quamlibet perpendicularem altitudinem, ad quam ascendere hominibus conceditur. Dato vero impetu, dabitur amplitudo & altitudo jactus ex alia quavis elevatione facti; unde dignosci potest num dato Tormento scopus, cujus distantia cognita est, attingi poterit.

Cor 2. Si AD, quarta pars amplitudinis, ponatur radius, erit altitudo DC tangens anguli elevationis. Ut scopus, in data distantia horizontali percutiatur, præstat eundem semper retinere angulum directionis, semirectum nempe, & impetum augere vel minuere, donec scopus attingatur. Nam machinâ ad hunc angulum elevatâ, minimus requiritur impetus ad scopum feriendum; adeoque in hisce jactibus faciendis maxime pulveri pyrio parcitur: Accedit quod circa hanc elevationem jactus sit omnium certissimus; cum error unius aut duorum graduum vix sensibilem in projectione producet errorem.

PROBL. X.

Datis impetu & amplitudine, invenire directionem & altitudinem jactus.

Sit impetus AB; quarta pars amplitudinis datæ, sit AD. Supra diametrum AB, describatur semicirculus ACEB, & eriga- TAB. 14. fig. 1.

rigatur normalis DCE, semicirculum secans in punctis C & E: Dico utramque directionem, sive AC sive AE, parabolam designare, cujus amplitudo erit AK, quadrupla AD. Nam projectiones factæ cum impetu AB, juxta directionem AC vel AE, amplitudinem habent AK quadruplam ipsius FC, vel GE, (per Probl. 8.) altitudo vero potest esse vel AF vel AG; ut patet. Quod si normalis DC, circulo in unico puncto occurrat, hoc est ipsum tangat, parabola unica erit descripta, projectione semirecta, & amplitudo proposita erit maxima quam dato impetu attingere licet. Si perpendicularis DC semicirculo non occurrat, problema erit impossibile.

Cor. Si habeatur machinæ cujusvis impetus, (inventus per Cor. 1. Probl. præcedentis, ex quovis jactu horizontali) licebit ope hujus Probl. talem machinæ tribuere directionem, ut scopus in data distantia horizontali positus feriatur, & ex duabus directionibus proposito aptis, à directione semirecta æqualiter remotis, magis idoneam eligere.

SCHOLIUM.

Præcedentium trium Problematum conversa, ex supradictis facillime & nullo negotio solvuntur; scil. ex data altitudine & amplitudine, impetum & directionem invenire. Item ex datis impetu & altitudine, directionem & amplitudinem invenire, & denique datis directione & altitudine, amplitudinem invenire: ita ut hisce diutius immorari inutile sit.

PROBL. XI.

Propositum sit, rationem invenire inter durationem projectionis factæ perpendiculariter sursum, & alterius cujusvis cujus idem est impetus.

TAB. 10. fig. 8. Sit AF projecti impetus, sive projectio sursum facta, & ABC projectio ex alia qualibet elevatione AG. Circa diametrum AF, describatur semicirculus, directionem AG secans in G: dico durationem projectionis directe sursum, sive temporis ascensus per AF, & descensus per eandem, esse ad durationem projectionis in parabola ABC, sicut AF ad AG. Tempus

pus lationis ex A in B, æquale est tempori lationis ex B in C: adeoque tempus per ABC duplum est temporis lationis ex B in C; sed tempus lationis ex B in C æquale est tempori descensus liberi in perpendiculo BD; quoniam motus progressivus nullo modo impedit descensum à gravitate oriundum: adeoque tempus projectionis per ABC duplum est temporis descensus per BD, vel per æqualem EA; sic etiam tempus ascensus & descensus per FA, sive tempus projectionis directe sursum, duplum est temporis descensus per FA: quare tempus projectionis sursum erit ad tempus projectionis in parabola ABC, ut tempus descensus per FA ad tempus descensus per EA, hoc est in subduplicata ratione FA ad EA, vel ob FA, AG, EA continue proportionales, ut FA ad AG. Q. E. D.

Cor. Durationes projectionum, pari impetu, secundum diversas directiones AG, AH factarum, sunt in ratione chordarum AG, AH. Quod si AF ponatur radius, erit AG sinus anguli AFG; qui æqualis est angulo elevationis machinæ; adeoque est tempus projectionis directe sursum ad tempus projectionis in parabola, ut radius ad sinum anguli directionis.

SCHOLIUM.

Omnia Problemata circa Gravium projectiones, in plano horizontali factas; ope Tabularum Sinuum & Tangentium facillime resolvuntur.

Proponatur AK, amplitudo horizontalis alicujus Tormenti majoris, ad datum angulum CAK elevati; quæritur altitudo projectionis, & machinæ impetus. In triangulo ADC, fiat ut radius ad tangentem anguli elevationis, ita AD quarta pars amplitudinis datæ, ad altitudinem DC; item fiat ut sinus anguli elevationis ad radium, ita altitudo inventa DC ad AC, quæ proinde dabitur; & in rectangulo triangulo BCA, fiat ut sinus anguli ABC (qui æqualis est elevationis angulo,) ad radium, ita AC ad AB impetum, qui proinde innotescet. Dato vero impetu, dabitur tempus projectionis perpendicularis. Est vero tempus projectionis perpendicularis ad tempus projectionis secundum AC, ut AB ad AC; sive ut radius TAB. 16. *fig.* 7.

ad

ad sinum anguli elevationis; ac proinde, per tabulas Sinuum, tempus projectionis secundum AC innotescet. Hinc etiam, ex dato tempore projectionis cujusvis, secundum datam elevationem factæ, dabitur tempus alterius cujusvis projectionis, eodem impetu factæ. Est enim ut sinus elevationis projectionis, cujus tempus est notum, ad sinum alterius elevationis, ita tempus notum projectionis unius ad tempus alterius, quod proinde notum erit. Ex data vero amplitudine unius projectionis, secundum datam directionem factæ, dabitur amplitudo projectionis secundum aliam quamvis directionem factæ. Nam posito dimidio impetus pro radio, quarta pars amplitudinis est sinus dupli anguli elevationis, ac proinde amplitudines sunt ut horum angulorum sinus. Quare si innotescat amplitudo secundum directionem AG, dabitur amplitudo secundum directionem AH; fiat enim ut sinus dupli anguli CAG ad sinum dupli anguli HAC, ita amplitudo projectionis secundum AG ad amplitudinem projectionis secundum directionem AH. Quod si ex datis impetu & amplitudine horizontali, quæratur elevatio correspondens; illa ex eodem principio facile innotescet. Nam constat ex Cor. 1. Probl. 8. duplum impetus esse amplitudinem projectionis semirectæ. Sed sinus elevationum duplicatarum sunt ut amplitudines; quare fiat ut duplum impetus ad amplitudinem datam, ita sinus dupli anguli semirecti, hoc est sinus nonaginta graduum seu radius, ad alium; qui erit sinus duorum arcuum, quorum unus est alterius complementum ad semicirculum: atque hi duo arcus dimidiati dabunt duas elevationes, quibus data amplitudo attingi potest.

TAB. 10. fig. 8.

Non semper Tormenta bellica ita explodenda sunt, ut globus præcise in eodem horizontali plano incidat; sed sæpe scopus est altior Tormento, aut depressior: quare in sequenti Problemate methodus tradenda est, qua scopus supra vel infra horizontem, attingendus est.

PRO-

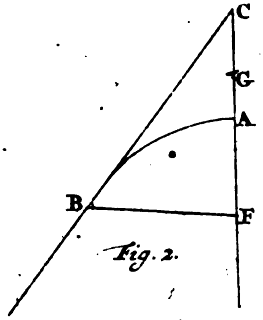


Fig. 2.

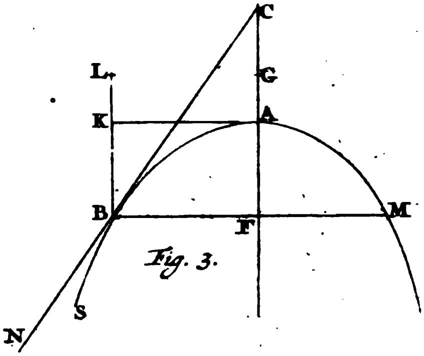


Fig. 3.

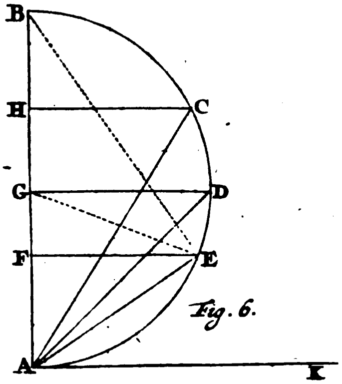


Fig. 6.

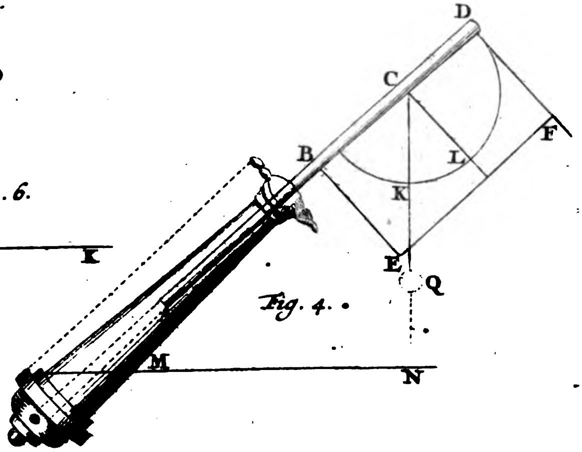
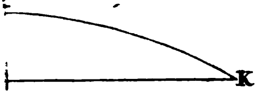


Fig. 4.



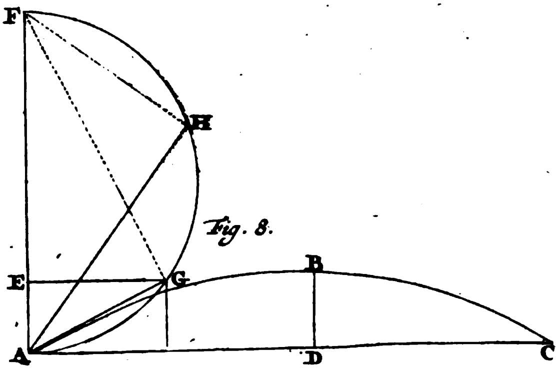
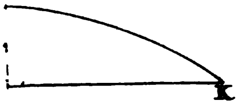


Fig. 8.



PROBL. XII.

Data basi Parabolæ, unoque puncto per quod ipsa transit; directionem, semitam & impetum projectionis invenire.

Sit AC basis Parabolæ, & punctum B scopus feriendus: ex B in AC demittatur perpendicularis BD; rectis BD, AD, DC quarta proportionalis capiatur L; erit L latus rectum parabolæ: bisecetur AC in E, & ex E erigatur perpendiculum EF; rectis L & AE tertia proportionalis sit EG; erit G vertex parabolæ: & si producatur EG, ita ut sit $GF = GE$, & ducatur AE, erit FAE angulus directionis machinæ. Estque impetus quo projiciendum est Grave, æqualis $EG + \frac{1}{4}L$. Quoniam est BD ad AD ut DC ad L, erit $L \times BD$ = rectangulo sub AD & DC, adeoque (per Cor. 1. Theor. 48.) est L latus rectum parabolæ per B transeuntis, cujus basis est AC. Et quoniam L, AE, EG proportionales sunt, erit $L \times EG = AE$ quad. adeoque erit G vertex parabolæ. Vertice igitur G & latere recto L descripta parabola erit semita projectionis Gravis, quod punctum B feriet. Estque impetus projectionis æqualis $EG + \frac{1}{4}L$; angulus vero elevationis est FAE. Q. E. I. Tab. II. fig. 2.

Eodem modo procedendum est, si punctum *b* sit infra horizontem: si enim ex *b* in AC productam demittatur perpendicularis *bd*, & ipsis *bd*, A*d*, *d*C quarta proportionalis capiatur L, erit L latus rectum parabolæ per *b* transeuntis.

Cor. Posito AE radio, erit EF, vel dupla EG, tangens anguli elevationis; adeoque si fiat ut AE data ad datam EF, ita radius ad tangentem anguli FAE, dabitur angulus elevationis.

PROBL. XIII.

Dato impetu, invenire directionem secundum quam projectum Grave datum punctum quodvis attingat.

Sit impetus datus M, punctum per quod transire debet projectum sit B, cujus distantia AB a puncto A datur: ex B in horizontalem AC demittatur perpendicularis BD, in qua producta capiatur $DG = 2M$ & centro G intervallo GB describatur circulus quem in B tanget recta $BK = AB$: ex K super BK erigatur perpendicularis KH circulo in duobus punctis H, H Tab. II. fig. 3.

 oc-

occurrens, ex quibus in diametrum LB demittantur perpendiculares HE, HE, ducanturque rectæ AE, AE; quæ erunt duæ directiones proposito satisfacientes; hoc est, projectum secundum directionem AE emissum cum impetu M, per punctum B transibit. Est enim AD quad. + BD quad. = AB quad. = BK quad. = EH quad. = (ex natura circuli) LE × EB = LB × EB — EB quad. = $\overline{4M - 2DB}$ × EB — EB quad. quare erit 4M × EB = (AD quad. + BD quad. + 2DB × EB + EB quad. = AD quad. + DE quad. =) AE quad. Sed parabola descripta à Gravi secundum directionem AE projecto, cum impetu M, ita secabit rectam DE, ut sit 4M × EB = AE quad. (uti patet ex Cor. 2. Theor. 51.) quare punctum B est in eadem parabola: & Grave, cum impetu M secundum directionem AE projectum, per B transibit. Q.E.D.

Tab. II. fig. 4. *Cor.* Si HK in uno solummodo puncto, circulo occurrat; hoc est, si circulum tangat; unica erit directio proposito inserviens. Quod si non omnino circulo occurrat, Problema erit impossibile, hoc est, punctum B dato impetu attingi non potest. Adeoque si KH circulum tangat, erit impetus ille omnium minimus, quo datum punctum attingi potest. Eritque in eo casu BK seu AB = BE vel BG = 2M — DB, adeoque BE + BD seu DE = 2M, impetus igitur minimus, quo datum punctum attingi potest, æqualis erit dimidiæ DE = $\frac{AB + BD}{2}$: & posito DA radio, erit DE tangens anguli EAD, hoc est anguli elevationis. Quare si fiat ut AD ad DE, sive ad AB + BD; ita radius ad quartam proportionalem; dabitur tangens anguli directionis, secundum quam si fiat projectio, impetu omnium minimo attingitur punctum B.

Sed angulus ille directionis facilius multo habetur, bisecando angulum NAB, perpendiculo AN & recta AB comprehensum. Recta enim AE, hunc angulum bisecans, erit projectionis directio. Nam quoniam impetus est minimus, erit AB æqualis EB; ac proinde angulus BAE æqualis erit angulo BEA = NAE (ob DE, AN parallelas;) adeoque directio pro-

projectionis impetu minimo factæ, angulum NAB bisecabit. Quare si Tormento figatur speculum, cujus planum perpendiculare sit ipsius Tormenti axi seu lineæ directionis; radius incidens BA in perpendiculum AN reflectetur, atque ope hujus speculi nullo negotio dirigetur Tormentum ut scopus impetu minimo attingatur. Elevanda enim aut deprimenda est machina, quoad imago puncti B, facta per speculum planum, in perpendiculo NA videatur: nam ob angulum BAE incidentiæ æqualem angulo reflectionis NAE, erit angulus NAB bisectus, ac AE erit directio machinæ, cum punctum B impetu minimo attingendum est.

CLARISSIMI

HUGENII THEOREMATA DE VI CENTRIFUGA ET MOTU CIRCULARI DEMONSTRATA.

SEquentium Theorematum demonstrationes, primus ego literato orbi impertivi; auctor enim absque demonstratione illa emiserat: Postea vero à Gallis *quibusdam eadem Theoremata, sed mutato ordine, demonstrata sunt; & nunc ipsius Auctoris demonstrationes concinnæ admodum, nostris vero prolixiores, inter ejus opera posthuma prostant. Cum vero scientiæ de Motu partem haud ignobilem constituunt hæc Theoremata, placuit ipsorum demonstrationes huic rursus operi annectere; ut videat Respublica literaria quantum Philosophia Mechanica per Geometriam promovenda sit.*

Defin. 1. Vis centripeta est vis illa, quâ mobile aliquod de motu rectilineo continuò retrahitur, & versus centrum aliquod perpetuò urgetur. Nam cum juxta satis notam naturæ legem, Corpus omne semel motum, secundum eandem rectam semper uniformiter progredi nitatur, patet nullum mobile posse orbitam aliquam motu suo describere, nisi vi quadam in orbitâ illâ detineatur. *Ex. gr.* Rotetur mobile uniformi cum motu in peripheria circuli ACE; quod ubi ad A pervenit, sublatâ vi illâ qua in orbita detinetur, progrederetur secundum Tangentem AB, & in infinitum ex-

TAB. 1. Fig. 5.

excurreret: quo itaque in peripheria detineatur, opus eſt ut vis aliqua continuo agat, quæque æquipolleat vi in A agenti corpus verſus D per ſpatium æquale BC, interea dum mobile vi inſitâ per ſpatium indefinite exiguum AB progrederetur: nam hac ratione hiſce viribus conjunctis deſcribet mobile lineam AC (per *Theor.* 30.) Vis hæc, ſive ſit actio fili detinentis, ſive cohærentia cum alio corpore gyrante, ſive oriatur à Gravitate aut attractione quacunque, Vis Centripeta dici poteſt.

2. Vis Centrifuga eſt Reactio ſeu reſiſtentia quam exercet mobile ne à viâ ſuâ deflectere cogatur, quaque motum ſuum in eadem directione continuare conatur; eſtque, uti Reactio actioni, vi centripetæ ſemper æqualis & contraria: ea ex vi inertiæ materiæ oritur, & cum corpus in peripheria circuli gyrans, ope fili ne excurrat detinetur; per vim illam centrifugam tenditur filum, quod filum eodem relaxandi ſe conatu æqualiter urgebit corpus verſus centrum, & centrum verſus corpus.

Cum vis centripeta proportionalis eſt ſpatio quod corpus urgenti illâ vi in dato tempore deſcribit, liquet tam vim centripetam quam centrifugam poſſe per lineolas naſcentes BC vel *bc* repræſentari: nam dum corpus Tangentem AB indefinite exiguam deſcribit, ſpatium quod urgente vi centripeta interea percurret, erit æquale BC. Demonſtravimus autem (*Lect.* 4ta.) in lineolis naſcentibus ſeu infinite parvis AB, AC, eſſe BC, infinite minorem AB vel AC unde vis centripeta vel centrifuga erit infinite minor quam vis inſita ſeu excurſoria AB.

LEMMA.

In circulo ſubtenſæ anguli contactus evaneſcentes ſive infinite parvæ ſunt in duplicatâ ratione arcuum conterminorum.

Sint arcus illi AC, A*c*; ſubtenſæ ad tangentem perpendiculares, BC, *bc*; ducatur diameter AD, & ad diametrum perpendiculares C*m*, *cn*; & erit BC : *bc* :: A*m* : A*n* :: A*m* $\times$ AD : A*n* $\times$ AD. Eſt vero (per 8. E. 6.) AD : AC :: AC : A*m*, & AD : A*c* :: A*c* : A*n*; quare erit AD $\times$ A*m* = AC*q* & AD $\times$ TAB. III fig. 6.

 A*n*

$An = Acq$: Quare est etiam BC : bc :: ACq : Acq. Q. E. D.

Cor. Hinc est $BC = \frac{ACq}{AD}$

Hoc Lemma in omnibus curvis primi generis universaliter demonstravit egregius Newtonus.

THEOR. I.

Si duo mobilia æqualia, æqualibus temporibus, circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia ad eam quæ in minore, sicut ipsæ inter se circumferentiæ vel earum Diametri.

TAB. II. fig. 7. Percurrat mobile A circumferentiam ACH, & eodem tempore mobile *a* circumferentiam *ach*, sintque AC, *ac*, arcus minimi simul descripti. Quia utraque peripheria æquali tempore percurritur, arcus illi erunt similes, & proinde figura ABC similis erit figuræ *abc*; quare BC : *bc* :: AC : *ac* :: periph. ACH : periph. *ach*. Sed constat, ex superiore definitione, esse vim centrifugam mobilis A ad vim centrifugam mobilis *a* ut BC ad *bc*. Quare erit vis centrifuga mobilis A ad vim centrifugam mobilis *a* ut periph. ACH ad periph. *ach*, sive ut illius diameter ad diametrum hujus. Q. E. D.

Cor. Hinc vice versa, si vires centrifugæ sint ut diametri, tempora periodica erunt æqualia.

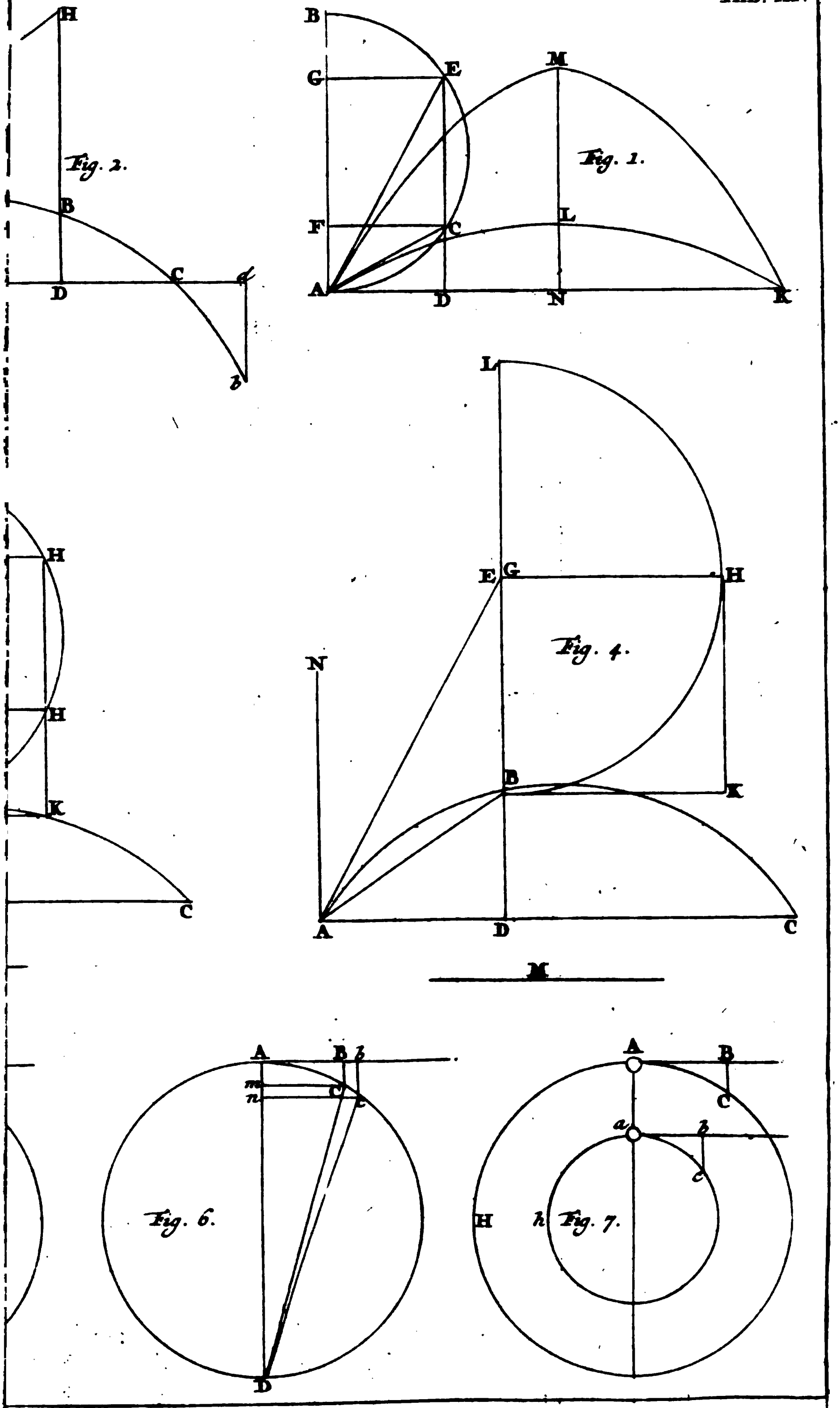
THEOR. II.

Si duo mobilia æqualia æquali celeritate ferantur in circumferentiis inæqualibus, erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

TAB. 12. fig. 1. Sint AC, *ac* arcus minimi simul descripti, qui ob æqualem in utroque mobili velocitatem, æquales erunt. Fiat arcus A*m* similis arcui *ac* & ducatur *lm* ad BC parallela; & erit vis centrifuga in majori circumferentia ad eam quæ est in minore ut lineola nascens BC ad nascentem *bc*: sed est BC ad *bc* in ratione composita ex BC ad *lm* & *lm* ad *bc*; & ex præcedenti lemmate est BC ad *lm* ut ACq ad Amq, & est *lm* ad *bc* ut Am ad *ac* vel AC. Quare erit BC : *bc* :: ACq : Amq + Am : *ac* :: ACq : Amq + Amq : Am × *ac* :: ACq

vel

TAB. XI.



vel $acq : Am \times ac :: ac : Am$, hoc est, ut tota periph. ach ad totam periph. ACH, sive ut diameter ab ad diametrum AH. Q.E.D.

THEOR. III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, sed utraque motu æquabili, (qualem in his omnibus intelligi volumus) erit vis centrifuga velocioris ad vim tardioris in ratione duplicata celeritatum.

Sunt enim vires centrifugæ ut subtensæ evanescentes anguli contactus quæ (per hactenus demonstrata) in eodem vel æqualibus circulis sunt in duplicata ratione arcuum conterminorum: sed arcus contermini, cum sint spatia simul descripta, sunt ut velocitates; quare vires centrifugæ sunt in duplicata ratione velocitatum. Q.E.D.

THEOR. IV

Si mobilia duo æqualia in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subduplicata ratione diametrorum.

Sint AC ac, arcus minimi simul descripti; Quia vires centrifugæ æquales sunt, erit BC = bc. Dicatur tempus quo describitur periph. ACH, T, & tempus quo describitur periph. ach, t: fiat arcus Am similis arcui ac, & ponamus mobile aliquod eodem tempore percurrere circumferentiam ACHA quo percurritur circumferentia $acba$; & in eo casu arcus in utraque peripheria simul descripti erunt Am, ac: sed est velocitas mobilis in dato aliquo tempore percurrentis arcum Am, ad velocitatem mobilis eodem tempore percurrentis arcum AC, ut arcus Am ad arcum AC; adeoque cum tempus quo eadem peripheria percurritur est semper reciproce ut velocitas, erit $T ; t :: Am : AC$ & $T^2 : t^2 :: Amq : ACq :: ml : BC :: ml : bc$: hoc est, ob arcum A$m$ similem arcui ac, ut diameter AH ad diametrum ab, unde constat esse $T : t :: \sqrt{AH} : \sqrt{ab}$: Q.E.D. Tab. 12. fig. 1.

Schol. Cum in omni casu, vis centrifuga est ad vim centrifugam

gam ut BC ad bc, est vero BC $= \frac{ACq}{AH}$ & $bc = \frac{acq}{ab}$, erit vis centrifuga ad vim centrifugam ut $\frac{ACq}{AH}$ ad $\frac{acq}{ab}$; hoc est, ut quadrata arcuum simul descriptorum ad circulorum diametros applicata; & cum arcus illi sunt ut velocitates, erunt vires centrifugæ etiam ut velocitatum quadrata ad circulorum diametros applicata.

LEMMA. 2.

Si mobile in circumferentia circuli revolvatur, spatium quod mobile recta progrediens, & urgente solummodo vi centrifuga ex motu illo circulari orta, in dato tempore percurreret, erit tertium proportionale circuli diametro & arcui, quem si in circumferentia circuli latum esset eodem tempore describeret.

Tab. 12. fig. 1. Sit AC arcus quilibet in minima aliqua temporis particula descriptus, & designet n tempus quodlibet seu numerum quemlibet istiusmodi particularum; erit $n \times$ AC arcus quem mobile in peripheria latum in dato tempore n describet, & BC spatium quod in prima temporis istius particulâ, urgente vi centrifuga, percurreret. Cum autem mobile omne, vi eadem in eandem semper plagam continuatâ, describat spatia in duplicata ratione temporum (per Cor. 3. Theor. 17. Lect. 11. Quippe quæcunque de gravitate demonstrata sunt, ea cuilibet alii vi uniformiter agenti applicari possunt) erit spatium urgente vi centrifuga in tempore n descriptum $= n^2 \times$ BC. Sed (ut constat ex lemmate primo) est AH : AC : : AC : BC, & ut AC ad BC ita $n \times$ AC ad $n \times$ BC; quare est AH ad AC ut $n \times$ AC ad $n \times$ BC, & ducendo consequentes in n, erit AH ad $n \times$ AC ut $n \times$ AC ad $n^2 \times$ BC: hoc est, diameter circuli, arcus in dato tempore descriptus, & spatium quod urgente vi centrifuga in eodem tempore percurretur; sunt continue proportionalia. Q. E. D.

Cor. Si diameter circuli dicatur D, & arcus in quolibet tempore à mobili descriptus vocetur A, spatium quod mobile, urgente vi centrifuga & recta progrediens, eodem tempore

pore

pore deſcriberet erit $\frac{A^2}{D}$; ſunt enim D, A, $\frac{A^2}{D}$ continue proportionales.

THEOR. V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur, ea celeritate quam acquirit cadendo ex altitudine quæ ſit quartæ parti diametri æqualis, habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem; hoc eſt, eadem vi funem quo in centro detinetur intendit, atque cum in eo ſuſpenſum eſt.

Vocetur diameter circuli D, & peripheria P: & cum ex hypotheſi velocitas mobilis in peripheria lati uniformis ſit, & æqualis illi quam acquirit cadendo per $\frac{1}{4}$ D, liquet quod mobile æquali tempore in peripheria latum deſcriberet arcum illius duplo æqualem, (per Theorema 17. Lect. 11.) hoc eſt $= \frac{1}{2}$ D; unde ex lem. 2. ſpatium ab impellente vi centrifuga interea percurſum erit $= \frac{1}{4}$ D; eſt enim D ad $\frac{1}{2}$ D ut $\frac{1}{2}$ D ad $\frac{1}{4}$ D: Sed ex hypotheſi ſpatium quod mobile urgente vi gravitatis eodem tempore deſcribit eſt etiam $\frac{1}{4}$ D. Quare cum ſpatia à duabus hiſce viribus eodem tempore percurſa ſunt æqualia; erunt quoque vires illæ æquales.

Cor. 1. Hinc vice verſa, ſi mobile in circumferentia latum habeat vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem, ejus velocitas eſt ea quæ acquiritur cadendo per $\frac{1}{4}$ D.

Cor. 2. Hinc tempus circuitus eſt ad tempus deſcenſus per $\frac{1}{4}$ D ut P ad $\frac{1}{2}$ D ſive ut 2 P ad D. Nam quo tempore mobile cum velocitate accelerata percurrit $\frac{1}{4}$ D, cum velocitate ultimò acquiſita uniformiter motum percurret $\frac{1}{2}$ D: ac proinde cum velocitates ſunt æquales, erunt tempora ut ſpatia percurſa; hoc eſt tempus quo mobile percurrit peripheriam eſt ad tempus quo deſcribit $\frac{1}{2}$ D ut P ad $\frac{1}{2}$ D, ſive ut 2 P ad D; ſed tempus quo deſcribitur $\frac{1}{2}$ D eſt = tempori caſus per $\frac{1}{4}$ D: unde erit tempus circuitus ad tempus caſus perpendicularis per $\frac{1}{4}$ D ut 2 P ad D.

THEOR. VI.

In cava ſuperficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendicu-

lum erectum habeat, circuitus omnes mobilis circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora singula æquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabolæ genetricis.

TAB. 12. fig. 2. Sit HGADE conoides parabolicum, cujus axis AP ad perpendiculum erigitur; GD, HE, diametri circulorum quorum peripherias horizonti parallelas mobile percurrit: quod igitur urgebitur à tribus potentiis sibi mutuo æquipollentibus secundum tres diversas directiones, quarum prima est vis gravitatis impellens mobile secundum rectam HN ad horizontis planum perpendicularem; secunda est vis centrifuga orta ex motu circulari, urgens mobile ab H versus K; tertiæ vero potentiæ supplet vicem resistentia seu contrarius nisus superficiei parabolicæ secundum lineam HP sibi perpendicularem agens, nam reactio actioni semper æqualis est, & fit in plagam contrariam: unde cum superficies perpendiculariter à mobili premitur, hæc æqualiter reaget in corpus secundum directionem HP, & contrarius ille nisus æquipollet potentiæ secundum directionem HP mobile urgenti: quare cum mobile à tribus hisce potentiis sustinetur, erunt necessario sibi mutuo in æquilibrio, *i. e.* binæ quævis alterius effectum destruent. Unde ducta ON ad HK parallela cum HN occurrente in N, si OH repræsentet reactionem superficiei parabolicæ, recta ON exponet vim centrifugam & HN vim gravitatis mobilis: sed ob æquiangula triangula HON, HMP, est ON ad HN ut HM ad MP, hoc est, erit vis centrifuga mobilis peripheriam circuli HME describentis ad vim gravitatis ejusdem ut HM radius circuli ad MP subperpendicularem. Similiter in quavis alia peripheria GLD in superficie Conoidis, vis centrifuga mobilis ipsam describentis est ad vim gravitatis ut GB radius ad BQ subperpendicularem. Porro quoniam est vis centrifuga mobilis, peripheriam HME percurrentis, ad vim gravitatis ut HM ad MP, & vis gravitatis ejusdem mobilis est ad ejus vim centrifugam cum peripheriam GLD percurrit, ut BQ ad BG, sive (ex natura parabolæ) ut MP ad BG, erit ex æquo vis centrifuga mobilis peripheriam HME percurrentis ad vim ejus centrifugam

gam

gam cum percurrit peripheriam GLD, ut HM ad BG; hoc eſt, vires centrifugæ ſunt ut ſemidiametri vel diametri circulorum: unde (per Cor. Theor. primi) tempora periodica æquantur. Quod primo erat demonſtrandum.

Accipiatur jam circulus GLD talis ut ejus diameter GD ſit æqualis lateri recto parabolæ HAE, unde ex natura parabolæ erit GB = BQ; adeoque vis centrifuga mobilis in peripheria GLD æqualis erit vi gravitatis; eſt igitur (per Cor. præc.) velocitas mobilis in peripheria GLD ea quæ acquiritur cadendo per ſpatium æquale $\frac{1}{4}$ GD, vel (ex natura parabolæ) per BA. Fiat jam OST cyclois cujus axis vel diameter circuli generatoris SR ſit æqualis AB, & erit tempus deſcenſus per cycloidem OS ad tempus caſus perpendicularis per axem RS vel per BA, ut $\frac{1}{2}$ P ad D (per Theor. 46. Lect. 15.) Sed (per Cor. præc.) eſt tempus deſcenſus per AB ad tempus circuitus in periph. GLD ut D ad 2 P; quare ex æquo tempus deſcenſus per cycloidem OS eſt ad tempus circuitus in periph. GLD ut $\frac{1}{2}$ P ad 2 P, ſive ut 1 ad 4; unde tempus quatuor deſcenſuum per cycloidem, ſive tempus binarum oſcillationum in cycloide, æquatur tempori circuitus in peripheria GLD. Eſt vero tempus binarum oſcillationum in cycloide æquale tempori binarum oſcillationum minimarum in circulo, qui cum cycloide æquicurvus eſt ad verticem S; eo quod portio iſtiuſmodi circuli & portio cycloidis ad verticem S fere coincidunt, & proinde eundem in rebus phyſicis præſtant effectum, ut jam ſatis notum eſt. Sed radius circuli æquicurvi cum cycloide ad verticem S, vel quod idem eſt, radius circuli oſculantis cycloidem ad verticem, æqualis eſt duplæ RS vel duplæ AB, (ut facile ex Corol. Theor. 46. Lect. 15. ſequitur) adeoque longitudo penduli in circulo illo oſcillantis æqualis eſt duplæ AB ſive dimidio lateris recti parabolæ genetricis. Unde tempus binarum oſcillationum minimarum penduli, cujus longitudo eſt dimidium lateris recti, æquale eſt tempori binarum oſcillationum in cycloide OST, vel tempori circuitus in peripheria GLD vel in periph. HME. Q. E. D.

Cor. Hinc ſi mobile in circumferentia circuli ea celeritate feratur quæ acquiritur cadendo per $\frac{1}{4}$ diametri, tempus circuitus

 æqua-

æquale erit tempori binarum oſcillationum minimarum penduli cujus longitudo ſit ſemidiameter circuli.

THEOR. VII.

Si mobilia duo ex filis inæqualibus ſuſpenſa gyrentur ita, ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente, fuerint autem conorum, quorum ſuperficies fila hoc motu deſcribunt, altitudines æquales, tempora quoque circulationum æqualia erunt.

Tab. 18. fig. 3

Sit ABE conus ille, cujus ſuperficiem deſcribit filum AB; item ADL conus cujus ſuperficiem deſcribit filum AD; ſitque C centrum baſis utriuſque coni, & AC communis eorum altitudo. Conſideretur jam mobile B tanquam à tribus potentiis ſibi mutuo æquipollentibus tractum, quarum una, quæ eſt vis gravitatis, trahit mobile per rectam BG ad horizontis planum perpendicularem; altera ſecundum directionem B*m* agens, eſt vis centrifuga qua mobile à centro ſuæ orbitæ C recedere conatur; tertia vero quæ hiſce duabus æquipollet & reſiſtit, eſt niſus contrarius fili ſecundum directionem AB agens: eſt enim tenſio fili loco potentiæ contrariæ ac eundem in hoc caſu præſtat effectum. Si ergo BF repræſentet actionem fili, vis mobilis centrifuga & vis gravitatis exponentur per rectas FG & BG (per Theor. 33. Lect. 14.) hoc eſt, vis centrifuga mobilis B erit ad vim gravitatis ut FG ad BG, ſive (propter triangula æquiangula FBG, ABC,) ut BC ad CA. Eodem modo erit vis gravitatis ad vim centrifugam mobilis D ut AC ad DC: quare ex æquo erit vis centrifuga mobilis B ad vim centrifugam mobilis D ut BC ad DC; hoc eſt, vires centrifugæ ſunt ut ſemidiametri circulorum quorum circumferentias mobilia deſcribunt, ac proinde (per Cor. Theor. 1.) tempora circulationum ſunt æqualia. Q. E. D.

Cor Hinc vis centrifuga eſt ad vim gravitatis ut ſemidiameter baſis coni ad coni altitudinem.

Not. Per vim gravitatis & vim centrifugam nos in hac demonſtratione intelligere vires acceleratrices mobilium, niſi mobilia ponantur æqualia, in quo caſu poſſunt etiam ſumi vires abſolutæ.

THE-

THEOR. VIII.

Si duo mobilia, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales, erunt tempora circumlationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

Sint duo mobilia B & G, sintque primo coni ABD, EGH, quorum superficies fila describant, similes; (per Corol. Theorem. 7.) erit vis centrifuga mobilis B ad vim gravitatis ut BC ad AC; & erit vis centrifuga mobilis G ad eandem vim gravitatis ut GF ad FE: sed propter æquiangula triangula ABC, GEF, BC est ad AC ut GF ad FE, quare erit vis centrifuga mobilis B ad vim gravitatis ut vis centrifuga mobilis G ad eandem vim gravitatis, ac proinde vires illæ centrifugæ æquales erunt: erunt igitur (per Theorem. 4.) tempora circuitus mobilium in subduplicata ratione semidiametrorum, hoc est, propter æquiangula triangula ABC, EGF, in subduplicata ratione altitudinum AC & EF. Sed qualescunque sunt coni quos fila describant, modo eorum altitudines invariatæ maneant, tempora circulationum etiam invariata manebunt; quare in omni casu constat veritas hujus Theorematis. Q. E. D. Tab. 12. fig. 4.

THEOR. IX.

Si pendulum motu conico latum circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium ejusdem penduli minimarum.

Sit ADB conus cujus superficiem describit filum; ejus altitudo sit Ac fere = AB, quia circuitus sunt minimi. Semidiametro GH = Ac describatur circulus GLFO, atque in ejus peripheria ponatur mobile revolvi celeritate quæ acquiritur cadendo per ¼ suæ diametri sive ¼ D. (Per Theor. 5.) erit ejus vis centrifuga vi gravitatis æqualis; sed est vis centrifuga mobilis B ad vim gravitatis, ac proinde ad vim centrifugam mobilis in periph. GLF lati, ut Bc ad Ac sive GH: quare mobilia B & G, cum vires centrifugæ sunt ut radii, tempora cir- Tab. 12. fig. 5.

culationum æqualia habebunt (per Cor. Theor. 1.) Est vero tempus descensus per GF sive D ad tempus descensus per $\frac{1}{2}$D, ut D ad $\frac{1}{2}$D (per Cor. 3. Theor. 17. Lect. 11.) & est tempus descensus per $\frac{1}{2}$D ad tempus circuitus in periph. GLG ut $\frac{1}{2}$D ad P: quare ex æquo erit tempus descensus per D ad tempus circuitus in periph. GLF, sive ad tempus circuitus penduli ABcD, ut D ad P. Pars posterior Theorematis liquet ex Corollario Theor. 6.

Cor. Hinc cum tempus casus perpendicularis est in subduplicata ratione spatii à gravi cadente percursi, erit tempus descensus ex altitudine penduli ad tempus circulationis minimæ ut $\sqrt{\frac{1}{2}} \times$ D ad P.

THEOR. X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

Tab. 12. fig. 5. Quia mobilia B, G (ex hyp.) æquali tempore circuitus suos absolvunt, erit vis centrifuga mobilis B ad vim centrifugam mobilis G ut Bc ad GH sive Bc ad Ac; est vero ut Bc ad Ac ita vis centrifuga mobilis B ad vim gravitatis (per Cor. Theor. 7.) Quare (per 9. 5. *Euclidis*) erit vis centrifuga mobilis G æqualis vi gravitatis. Q.E.D.

THEOR. XI.

Penduli cujuslibet motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili ad planum horizontis fuerit partium 2. scrup. 54. proxime: Exactè vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia.

Tab. 12. fig. 6. Sit pendulum, cujus filum describat superficiem conicam CAD talem, ut sit sinus anguli ACE ad radium (hoc est AE ad AC) ut $\frac{1}{2}$D^2 ad P^2. Sit etiam AFG superficies coni quem penduli filum motu minimo lati describit, cujus proinde altitudo

tudo AB = AF = AC. Erit (per Theor. 8.) tempus circuitus mobilis F ad tempus circuitus mobilis C in subduplicata ratione AB sive AC ad AE; est vero ut AC ad AE ita (ex hypoth. P^2 ad $\frac{1}{2} D^2$; quare erit tempus circuitus mobilis F ad tempus circuitus mobilis C in subduplicata ratione P^2 ad $\frac{1}{2} D^2$, hoc est, in ratione P ad $\sqrt{\frac{1}{2}} \times D$. Est vero ut P ad $\sqrt{\frac{1}{2}} \times D$ ita (per Cor. Theor. 9.) tempus circulationis minimæ, hoc est, tempus circulationis mobilis F, ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine; quare tempus circuitus mobilis F eandem habet proportionem ad tempus circuitus mobilis C, quam habet ad tempus casus perpendicularis ex altitudine æquali longitudini penduli; ac proinde (per 9. Elem. 4.) tempus circuitus mobilis C æquale erit tempori casus perpendicularis ex altitudine æquali longitudini penduli. Q. E. D.

Cum autem est P ad D circiter ut 314 ad 100, erit p^2 ad $\frac{1}{2} D^2$ ut 98596 ad 5000. Est autem AC ad AE ex prius demonstratis ut p^2 ad $\frac{1}{2} D^2$; quare est 98596 ad 5000 ut AC ad AE: & ut AC ad AE ita (per Trigonometriam) est sinus anguli ACE seu radius 100000 ad sinum anguli ACE. Est autem ut 98596 ad 5000 ita 100000 ad 5070, qui igitur est sinus anguli ACE, cui quamproxime respondent gradus 2 scrupula 54.

THEOR. XII.

Si pendula duo pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales, erunt vires quibus fila sua intendunt, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

Constat ex Theor. 7. Nam vis gravitatis est in utroque cono ad tensionem fili ut altitudo coni ad longitudinem fili; cumque eadem est conorum altitudo, patet tensiones filorum esse eorum longitudinibus proportionales. Q. E. D.

THEOR. XIII.

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat, ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, tripla majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

Sit

Tab 12. fig. 7.

Sit pendulum AB per quadrantem FB motum: bisecetur AB, in C, per quod ducatur CE ad AB perpendicularis, circumferentiæ occurrens in E. Si pendulum solummodo per arcum EB descenderet, acquireret in puncto B eandem velocitatem, ac si per CB ¼ diametri descendisset (per corollarium primum Theor. 38. Lectionis XV.) adeoque (per Theor. 5.) habebit in puncto B vim centrifugam suæ gravitati æqualem: & proinde gravitas & vis centrifuga simul junctæ dupla majori vi filum trahent, quam si sola adesset gravitas. Si vero pendulum elevetur ad F, post descensum ad B, eandem acquireret velocitatem, ac si per AB cecidisset. Est vero AB ad BC in duplicata ratione velocitatis acquisitæ in descensu per AB ad velocitatem acquisitam in descensu per BC; quare etiam erit AB ad BC (per Theor. 3.) ut vis centrifuga mobilis in puncto B post descensum per FB, ad vim centrifugam in puncto B post descensum tantum per EB; adeoque vis centrifuga mobilis post descensum per FB dupla erit vis centrifugæ post casum per EB; hoc est, vis centrifuga in puncto B post casum per FB dupla erit vis gravitatis: quare filum à vi centrifuga & vi gravitatis, simul & secundum eandem directionem agentibus, tripla majori vi trahitur, quam si à sola gravitate tenderetur. Q. E. D.

IN-

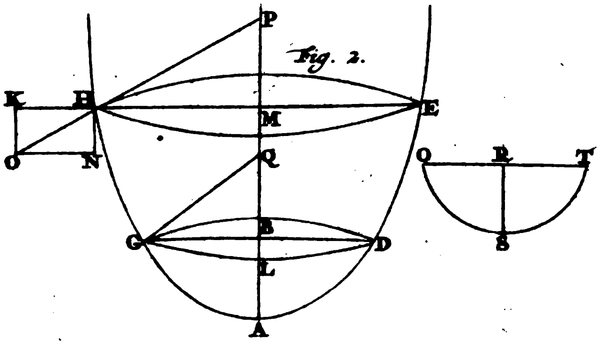


Fig. 2.

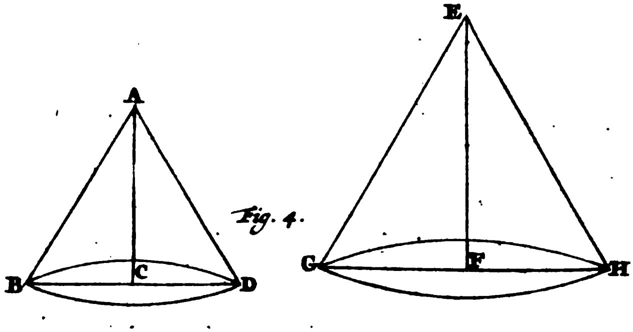


Fig. 4.

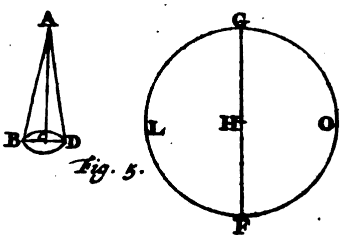
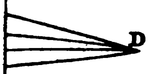


Fig. 5.



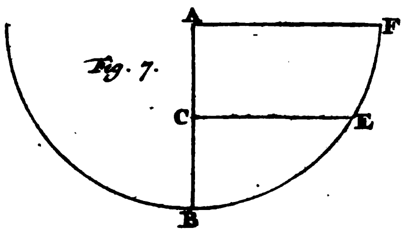


Fig. 7.

INTRODUCTIO
AD
VERAM
ASTRONOMIAM,
SEU
LECTIONES ASTRONOMICÆ
Habitæ in Schola Astronomica Academiæ
OXONIENSIS,

Authore

JOANNE KEILL, M.D.
Astronomiæ Professore Saviliano. R. S. S.

NOBILISSIMO ET HONORATISSIMO

D^NO. D^NO. JACOBO
DUCI
DE
CHANDOS,
MARCHIONI ET COMITI
DE
CARNARVON.

CUM inter Mathematicæ Scientiæ studia primas merito sibi vindicavit, & obtinuit Astronomia; Felicitati illius tribuam, an virtuti Hominum; quód in omni ætate & populo, primarios Principesque viros, præ cæteris longe disciplinis, sortita fuerit fautores? Digneris itaque, Vir Nobilissime, in hujusce libri Patrocinium vocari, quem si parum tibi commendat, aut operis, aut Auctoris meritum, id abunde compensabit Argumenti Dignitas. Cujus enim Tutelæ potius se committat Astrorum descriptio, quam illius viri, qui, si sapientiam spectemus, inter eos primus est qui *Astris dominantur?* Ad quem potius confugient Nostra hæc de Cœli siderumque motibus Tentamina, quam ad virum Cœlestis istius Regis observantissimum, qui *numerum solus novit & Stellarum nomina?*

 Tu

Tu nimirum inter paucissimos unus es, cui Sacrorum Administratio ita imprimis est curæ, ut proprii tui ipsius Domicilii non ante jaceres fundamenta, quam Templum pulchre instauratum Deo consecraveris. Neque interim de cultu minus quam de Templo adornando sollicitus, Pietatis officium excitasti Musicæ adminiculo, & Harmonicum induxisti chorum, Sphærarum, pene dixerim, concentibus æmulum.

Te omnes, Vir Insignissime, cum admiratione intuentur, & dum virtutes imitari contendunt, assequi desperant. In Publicis negotiis obeundis quis acutior? In rebus Domesticæ vitæ disponendis quis expertior? In Rationibus computandis & exigendis providus & frugalis. In pecuniis erogandis liberalis, in largiendis Magnificus.

Ita de literis, simul & literatis præclare, meritus es, ut dum optimarum Artium studio Animum penitissime excolis, earundem Artium studiosis, materiam pariter & incitamentum subministres. Ita illius præcipue Scientiæ, cujus Elementa Tibi offero, utilitati prospicis & incremento, ut in pulcherrimo, quod jam extruis, Ædificio, splendide curaveris, ne vel *Astronomicis Speculatoribus* locus peridoneus, vel aptissima observatoribus desiderentur instrumenta.

Stupendum itaque illud, & per universum orbem mirabile Telescopium, quod Societati apud Anglos Regiæ donavit illustrissimus *Hugenius*, unanimi omnium consensu, in vestras Ædes transferendum, ibique asservandum decernitur. Neque enim Clarissimi illi viri dignius excogitare

po-

poterant Hugeniana Machina Domicilium, aut digniorem Chandosano Domicilio Machinam.

Quod si opusculum hoc inter pretiosa Musei Tui ornamenta; inter Constellationes Stelliculam, collocare non dedigneris, utcunque proprii & nativi luminis nihil præ se ferat, mutuatitia satis luce splendebit, & reflexis illustrabitur Radiis.

Illustrissimæ Meritissimæque Dignitatis, Nobilitatis, & Magnitudinis Tuæ

Observantissimus Cultor

JOAN. KEILL.

PRÆFATIO.

I*NTER alia, quæ benignissimus Deus humano generi multiplicia impertivit dona, illustria imprimis illa sunt, quæ in artium & disciplinarum cognitione consistunt; & inter Artes & Disciplinas, ut Antiquitate & Voluptate, ita & Utilitate non postremum locum tenet Astronomia; quæ mirabilem naturæ Harmoniam, (qua rerum omnium creatarum compages & machina constructa constitutaque cohæret) perscrutatur & observat; Corporum cœlestium motus, motuumque momenta, viresque unde oriantur, trutinat & pensat. In hac scientia magni Heroes à primis statim mundi incunabulis sibi imprimis elaborandum duxerunt. Adeo ut Astronomia semper fuit Regum & Imperatorum Doctrina; unde Chaldæi, Magi, & Philosophi plurimum auctoritate & gratia, apud priscos Reges valuerunt, quos utpote in Divina siderum scientiâ instruebant: absurdum enim esse, turpeque censebant hi Reges, mundo imperare, & quid sit mundus nescire.*

Astronomia Regum & Heroum scientia.

Astronomiæ præstantia exinde patet, quod nulla est lumine naturæ nota scientia, quæ ad cognitionem Summi & Omnipotentis, Dei Cœli Terræque conditoris, magis nos ducit, nulla solidiora administrat argumenta, quibus ejus Existentia demonstratur, quam ea: non aliunde magis evincitur Dei Potentia, summaque Sapientia, quam ex siderum motuumque Cœlestium contemplatione. Cœli enarrant Gloriam Dei, & Firmamentum annunciat opera manuum ejus, *inquit sanctissimus Rex & Propheta David*; *& rursus*: Annunciarunt Cœli Justitiam ejus, & viderunt omnes populi gloriam ejus.

Astronomia Religioni maxime inservit.

Sed & Marcus Tullius Cicero *rationis tantum lumine ductus in hanc sententiam devenit.* Nihil, *inquit*, potest esse tam apertum, tam perspicuum, cum Cœlum suspeximus, Cœlestiaque contemplatisumus, quam esse aliquid numen præstantissimæ mentis, quo hæc reguntur. *Nihil certe magis rapit*

Cicero de Natura Deorum. lib. 2.

pit animos hominum in Dei admirationem, reverentiam & amorem, quam tot tantaque corpora & lumina cælestia, quæ visui pulcherrima, & intellectui jucundissima sunt. Eorum obviationes ad invicem, motus ordinatissimi, certissimæ & determinatæ Circulationes, divinitusque præscriptæ Reversionum leges in concinnitate admirabili, summam Dei potentiam, sapientiam, bonitatem & providentiam manifestant. Quibus præceptis, ad Universi hujus Auctorem & Conditorem, admirandum, venerandum, semperque celebrandum impellimur.

*Præterea Astronomia mentes hominum tot sublimibus speculationibus, de tot tantisque, tamque longe dissitis corporibus, mirifice delectat, & summâ jucunditate recreat. Hinc canit O*vidius. *Fastor. lib.* I. *v.* 297. — Astronomiæ Jucunditas & Certitudo.

Felices Animæ, quibus hæc cognoscere primis,
 Inque Domus superas scandere cura fuit.
Credibile est illos pariter, vitiisque jocisque
 Altius humanis exseruisse caput.
Non Venus & vinum sublimia pectora fregit;
 Officiumque fori, militiæque labor.
Nec levis ambitio, perfusave gloria fuco,
 Magnarumve fames sollicitavit opum.
Admovere oculis distantia sidera nostris,
 Ætheraque ingenio supposuere suo.

Sic etiam Virgilius. *Georg. lib.* II. *v.* 490.

Felix qui potuit rerum cognoscere causas,
Atque metus omnes, & inexorabile fatum
Subjecit pedibus.

Astronomia, certitudine & evidentia demonstrationum, ne quidem Geometriæ cedit. Usu latissime patet, & amplitudine subjecti per omne mundanum spatium diffunditur. Nam inter scientias artesque omnes liberales, nulla est, quæ aut plura, aut majora, aut longius dissita contemplatur objecta, quam Astronomia, sed nulla quoque est in qua pauciores adhuc restant resolvendi nodi, nulla in qua minores supersunt eximendi scrupuli, nulla ad perfectionis culmen propius perducta est, quam Divina hac scientia. — Astronomiæ Perfectio.

In reliquis plerisque disciplinis, quidam inextricabiles occurrunt Labyrinthi; eas non parvæ premunt difficultates, multæ *interjectæ reperiuntur nebulæ mentis aciem obtundentes, & densa caligine involventes, quæ ulteriorem investigationem prohibent. At corporum cælestium motus nunc certo cognoscuntur, motuumque causæ demonstrantur, Phænomenônque rationes percipiuntur.*

Minimarum quarumcunque stellarum, quarum distantia est immensa, tam Longitudines quam Latitudines, seu in cælis loca nunc dierum accurate habentur, & in Catalogis inseruntur. At Geographia interim nobis paucarum urbium Longitudines & Latitudines certo ostendit; adhuc restant multæ Terræ incognitæ, plurimæ inexploratæ regiones, & plurium earum, quæ majores appellantur Continentes, vix quicquam præter littora nobis innotescit, & quod mirum forte videbitur, locorum positiones, in exiguis, & maxime notis, utpote peragratis atque lustratis provinciis, incertæ admodum sunt, ut ex mappis, seu chartis Geographicis sibi invicem contradicentibus manifestum est.

Prædicunt Astronomi, in multa futura secula, Solis Lunæque defectus, Planetarum Conjunctiones, Oppositiones, atque Aspectus qualescunque mutuos, & quæ futuræ sunt stellarum omnium à Polo distantiæ, quamvis corpora hæc immenso à nobis & à se invicem locentur intervallo. In Meteorologicis interea peritissimus ne divinare quidem potest, qualis futurus sit crastino die nostræ Atmosphæræ status, quæ ad pauca tantum passuum millia extenditur; num scil. facies cæli serena aut pluviosa sit futura, aut ex qua regione spiraturus sit ventus; nec adhuc notum est, à quibus causis ejusmodi oriuntur effectus.

Philosophorum nemo figuras minutissimarum materiæ particularum hactenus perspexit; aut vulgatissimæ cujusvis herbæ texturam, formam internam, partiumve compositionem detexit; nec Medicus quisquis est, qui rationes virtutum, & operationum, quas in corpora humana exercent medicamenta indagavit. Immo in corporibus animatis & vegetabilibus, Fons & Principium motus inscrutabile esse videtur, & mysterii instar à nostro sensu & intellectu longissime disjunctum, nec fortasse ad ejus cognitionem plenam perfectamque sumus unquam perventuri. Sed longe alia est Astronomorum ratio, quibus id datur negotii, motus corporum cælestium, non eorum naturas contemplari, & Phænomenôn, quæ ex motu oriuntur rationem reddere. Hi non

tam

tantum determinant quales quantique sunt illi motus; Sed describunt semitas, per quas in immensis spatii regionibus, feruntur errantes Cometæ. Proprietates orbitarum Geometricas, & legem immutabilem cui in lineis peragrandis semper obsequuntur, declarant. Nec Astronomos latet, in qua spatii parte, & in quibus temporibus, Planetæ singuli longissime à Sole decedunt; minimamque caloris atque luminis partem ab eo recipiunt. Unde rursus digredientes, Sol ipsorum motus continuo accelerat, eosque versus se trahit, donec ipsos ad ea spatii puncta perduxerit, ubi maxime propinquos, maxime etiam perfundit luce, & gravitate ciet.

Hæc pleraque præcedentis Sæculi magistris innotuere; sed in nostra tandem ætate, & in nostra Britannia, exortus est vir plane Divinus Isaacus Newtonus, *qui præter alia inventa innumera, originem & fontem motuum cælestium reclusit, & legem illam Catholicam deprehendit, quam Omnipotens & Sapientissimus Creator per totum universæ Naturæ Systema diffudit. Scil. quod Corpora omnia se mutuo trahunt, in reciproca distantiarum à se invicem ratione duplicata.*

Hæc Lex quasi ligamentum Naturæ, & principium illius quæ universalem rerum Fabricam conservat unionis, tam Cometas, quam Planetas in propriis orbitis & intra limites datos detinet, prohibetque ne ulterius, à se invicem recedant, & in spatia infinita excurrant; uti foret si corpora vi tantum insitâ moverentur.

Eodem viro monstrante, nobis innotuit lex, quæ regit & temperat motus cælestes, orbitis limites ponit; Planetarum longissimos excursus, & accessus ad Solem maxime propinquos, determinat. Huic incomparabili viro debetur, quod novimus, unde fit, ut tam constans & regularis proportio semper observetur, inter Planetarum Periodos atque eorum à Sole distantias, & cur motus cælestes in tam pulchra, tamque mirabili Harmonia peraguntur & semper conservantur. Perpensis motuum legibus, & probe trutinatis; ex iis novam Lunæ Theoriam construxit Newtonus, *quæ omnibus ejus inæqualitatibus accurate satis respondet; qualem quidem antea sperare nemini licuerit; ex illa enim Theoria computatus Lunæ locus vix sen-*

sibili quantitate, plerumque ab observato differt; ut inde navigantibus nova emergere possit spes, inveniendi in mari Longitudinem loci ubi navis versatur, quod est Problema maxime desideratum.

Nihil est quod Humani intellectus vim atque penetrationem magis demonstrat, quam magna hæc & mirabilia inventa, nec alio certius modo, Mundanæ Machinæ portentosam molem, animo comprehendere possumus, aut opificii Divini stupendam pulchritudinem rectius æstimare, & sapientiam admirari valemus, quam per Divinas hasce leges nunc tandem repertas. Eæ nobis repræsentabunt magnificam & nobilem Mundani Systematis imaginem. Hinc discimus, Terram hanc, quam nos colimus, exiguam admodum esse, & vix notabilem totius splendidissimæ fabricæ partem; Cum fere infiniti sint mundi, Entis summi & omnipotentis operâ producti, qui nostro habitaculo sunt longe majores, in quibus disponendis & regendis, Potentiam & Sapientiam infinitam Ens illud supremum exercet.

Psalm. 148. Qui dixit, & facti sunt cæli, ipse mandavit & creati sunt. Statuit eos in æternum, iis legem dedit, quam transgredi nequeunt.

Astronomiæ usus in aliis artibus, *Sed nec Astronomiæ usus solummodo in excolendis animi viribus, & dulcissima rerum, quas speculatur cælestium contemplatione perspicitur, sed latius patet, & artibus & disciplinis maximo est adjumento; Quibus enim in tenebris errarent Geographus*

In Geographia & Chronologia. *& Chronologus, Astronomiæ luce destituti? Astronomiâ duce, Telluris figuram, & magnitudinem, locorum situm & distantias investigamus; illius auxilio certam anni mensuram, & res gestas secundum temporum seriem dispositas signamus. Ex hisce satis intelligitur, quam utilis humanis rebus sit Astronomia, sine qua nec* Geographiæ *nec* Chronologiæ, *& proinde nullus quoque esset Historiæ locus.*

In Navigandi Arte. *Sed inter omnes, quas promovet, Scientias Astronomia, nulla alia plus ex ea incrementi cepit quam* Navigatio, *cujus beneficio, per vastum Oceanum iter non devium tenentes, ultimas terrarum oras invisunt naves nostræ. Hinc mutui commercii exsurgunt commoda; & quicquid aliæ Terræ vel pretiosum vel delectabile ferunt, id omne sine eâ qua laborant illæ caloris aut frigoris in-*

tem-

tempore, nos domi manentes excipimus, Navigationis peritiæ debetur illud, quod sibi vendicat Britannia, Oceani Imperium, *nec ulla gens à littoribus nostris tam remota est, quam non ab injuria nostris hominibus inferenda, deterreat Armata* Britannica *Classis.*

Ut Ars navigandi magna ex parte pendet ab illa quam de astrorum motibus habemus, Scientia; Ita vehemens, quæ Reges & Principes incessit cupido, longinquas & ignotas explorandi regiones, eos impulit ad Astronomiam diligenter excolendam. Primus & Nautarum maximus fuit Neptunus, *qui ob artem suam, Oceani Deus celebratur; cujus filius* Belus *Astronomiæ peritus ejus ope incolas ex Lybia in Asiam traduxit. Ubi Collegia Astronomorum instituit. Nam* Diodorus Siculus *in Historiarum libro primo, parte secunda, ita scribit.* Tradunt, *inquit*, Ægyptii, Belum, Neptuni Lybiæque filium colonos traduxisse in Babyloniam, qui Sacerdotes (hos Babylonii Chaldæos vocant) instituit qui more Ægyptiorum astra observarunt. *Ante hunc vero vixit* Atlas Mauritaniæ *Rex, Astronomiæ scientissimus, qui de Sphæra primus inter homines disputavit; Unde in Æneide,* Virgilius *introducit Iopam canentem ea quæ tradidit Atlas.*

Astronomiæ antiquitas, & primi Astronomi.

Docuit quæ maximus Atlas,
Hic canit errantem Lunam, Solisque labores.

Sic Uranus quoque Rex istius populi (qui incolunt terras juxta littus oceani Atlantici sitas) ob peritiam in motibus cælestibus à Diis originem traxisse perhibetur. Zoroaster *apud Persas, Philosophus ut Astrorum scientissimus ab omni antiquitate celebratur. Talis enim apud antiquos fuit hujus Artis Honos, atque Dignitas, ut cum ea maxime delectarentur Reges, Regia Scientia appellabatur. Reges enim in* Africa *&* Syria *primi eam invenere, & excoluere; idque longe ante quam quidquam de ea,* Græcis *innotuit, ut agnoscit Plato in* Epinomide. Primus, *inquit*, harum rerum spectator Barbarus fuit. Antiqua enim Regio illos alluit, qui propter æstivi temporis serenitatem, primi hæc inspexerunt, talis Ægyptus & Syria fuit, ubi stellæ omnes clare cernuntur, quoniam cæli conspectum, nec pluviæ intercipiunt, nec nubes: Quoniam

niam vero magis quam Barbari ab æstiva distamus serenitate, horum siderum ordinem tardius intelleximus. *Sic etiam* Lucianus, *περὶ ἀστρολογίας narrat*, Æthiopes primos ad cælestes motus attendisse, qui luminarium causas scrutati, Lunam propriâ luce carere, & à Sole mutuari cognoverunt. *Hoc certum est, Astronomiam à primis fere mundi initiis, ab orientalibus terræ populis fuisse excultam: Nam si Porphyrio credendum sit. Captâ per Alexandrum Magnum Babylone, Calysthenes, rogatu Aristotelis, transtulit ex ea urbe in Græciam observationes fere duo millia annorum;* Plinius *etiam in Historia naturali scribit, quod Epigenes docet, fuisse apud Babylonios observationes septingentorum & viginti annorum, coctilibus laterculis inscriptas; Et* Achilles Tatius *in principio Isagoges ad Arati Phænomenon*, Ægyptios *primos omnium tam cælum quam terram esse dimensos, ejusque rei Scientiam, columnis incisam, ad posteros propagasse;* Chaldæi *tamen hujus inventi decus ad se transferunt; Idque Belo tribuunt. Ab* Ægypto *omnem doctrinam suam Astronomicam hauserunt* Græci. *Nam agnoscit Laertius, Thaletem, Pythagoram, Eudoxum & alios multos, illam adiisse regionem ut in Mysteriis Scientiæ Sideralis initiarentur; Hi non tantum inter Primos, sed & maximos Græciæ Philosophos extitere; & ab eodem discimus, quod qui in ea Regione diutius morabantur; post reditum in Patriam, celeberrimi fuere ob Geometriæ & Astronomiæ peritiam; Sic* Pythagoras, *qui septem annos in Sacerdotum consortio apud* Ægyptios *vixit, & in ipsorum Sacris fuit initiatus, præter multa Geometrica, domum secum attulit verum mundi Systema, primusque in* Græcia *docuit Tellurem atque Planetas circa Solem tanquam centrum revolvi, motum autem Solis & Stellarum fixarum diurnum non realem esse, sed apparentem, ortum ex motu Terræ circa Axem. Tum temporis nemo pro Philosopho habebatur, qui Mathematicis Scientiis non fuit optime instructus.*

Astronomia postea neglecta.

At cito neglectæ jacuerunt hæ Scientiæ; Philosophi enim posteriores à prioribus multum degeneres, tempus in tricis & nugis terebant: omisso quippe scientiarum sublimium studio, sophismata quærebant, quibus sibi & sensui hominum communi imponere

vole

volebant, verum etiamsi à Philosophorum vulgo, in exilium acta est Astronomia, à quibusdam tamen (paucissimis licet) recepta & exculta fuit, præcipue in Schola Pythagorica, quæ per multos annos in Italia *floruit, in qua extiterunt magni viri* Philolaus & Aristarchus Samius. *In Ægypto quoque Reges Ptolemæi, maximi Literarum Patroni, Scholam Astronomicam* Alexandriæ *fundaverunt; ex qua etiam prodierunt magni & celebres Astronomi, quorum Princeps fuit Hipparchus, qui referente Plinio*, ausus est etiam rem Deo improbam annumerare posteris stellas, cælo in hæreditatem cunctis relicto; *Hic utriusque sideris defectus in sexcentos annos præcinuit. Super Hipparchi observationibus, ædificata est magna illa & pretiosa Ptolemæi Syntaxis; nam ab iis deduxit Æquinoctiorum præcessionem, & Theorias motuum Planetarum.*

Ægypto per Arabes debellata, & Alexandria capta, Victores Astronomiam, aliasque Artes liberales in suum receperunt patrocinium, & quamplurimos scientiarum libros ex Græcia, in proprium sermonem verti curaverunt.

Ex Africa in Hispaniam transeuntes Arabes, ibique cum occidentalibus Europæis commercia exercentes, Astronomicæ quoque artis cognitionem iis tradiderunt; cum hæc ante in Europa fere obliterata latuisset. Jubente itaque Imperatore Frederico *secundo circa annum Christi* 1230., *Ptolemæi* Syntaxis magna *ex Arabica in linguam Latinam translata est.*

Post illud tempus à maximis viris, atque summis Philosophis exculta est Astronomia, inter quos eminent Alphonsus Castellæ Rex, *ob tabulas, ex ipsius nomine* Alphonsinas *dictas, semper celebrandus;* Nicolaus Copernicus *non tantum diligens observator, sed & Systematis Pythagorici antiqui Restaurator.* Willielmus Princeps, Hassiæ Landgravius, *qui Quadrantes & Sextantes prioribus longe majores ad altitudines & distantias syderum dimetiendas adhibuit. Hujus principis observationes editas à Snellio habemus. Dominus* Henricus Savilius *tam in Astronomia quam in Geometria peritissimus, vir à nobis maxime honorandus, qui professionem nostram Astronomicam, Sociamque Geometricam, in Academia* Oxoniensi *fun-*

davit, amplisque stipendiis donavit; cujus memoria ob hæc & alia plura in rem literariam collata beneficia, gratissimo animi affectu semper est celebranda. Tycho Braheus *nobilis* Danus, *seculi sui Atlas, qui observandi peritia, omnes qui ante ipsum extiterunt vicit; instrumentorum suppellectili Reges omnes & Principes longe superavit: Is Catalogum fixarum 770. quam diligentissime observatarum edidit.* Joannes Keplerus *Astronomus optimus, laboribus Tychonis fretus, Systema mundi, legesque motuum veras adinvenit, & Astronomiam in immensum auxit. Ejus opera orbi literato sunt notissima, & amplissimas auctoris laudes prædicant.* Gallilæus Gallilæi Lyncæus, *qui tubi optici beneficio, nobis plurima nova cæli Phænomena patefecit; Comites Jovis eorumque motus; Saturni phases varias; luminis incrementa & decrementa quæ Venus subiit; Lunæ superficiem inæqualem, & montibus asperam; Solares maculas, & Solis circa Axem revolutionem, primus demonstravit. Non dies integra sufficeret, si debitis cum laudibus nominarem* Hevelium, *qui Catalogum fixarum Tychoniano longe ampliorem ex propriis observationibus edidit; Illustrissimos viros* Hugenium & Cassinum, *qui primi Saturni Comites & annulum conspexere;* Gassendum, Horoxium, Bulialdum, Wardum, Ricciolum, *aliosque plures magni nominis Astronomos. Quos tamen ob maxima in rem Astronomicam merita, antecellit vir celeberrimus* Edmundus Halley, *hujus Academiæ Geometriæ Professor Savilianus, Collega meus amicissimus, cujus laboribus non parva debentur Astronomiæ incrementa. In hoc viro, quod nescio an alii mortalium ulli præterea contigerit, elucet summa in Astronomia Practica Habilitas, cum præcellenti rei Geometricæ Scientia conjuncta. Quod per Tabulas Astronomicas, quas brevi nobis daturus est manifesto patebit, hæ enim alias omnes ante editas, vel posthac forsan edendas, longe antecellunt.*

Alios quam plurimos nisi longum foret, possum commemorare nostrates, qui de Astronomia optime meriti sunt. Sed prætereundus non est Joannes Flamstedius *Astronomus Regius, qui indefesso labore, per triginta & plures annos continuato, cælo invigilavit, innumeras observationes de Sole, Luna &*

Pla-

Planetis, amplissimis instrumentis exquisita arte divisis, & tubo optico instructis, factas consignavit. Unde hujus Astronomi accuratis observationibus magis fidendum erit, quam aliorum ante illum, qui oculo inermi sidera intueri aggressi sunt. Composuit præterea Flamstedius, *Catalogum Fixarum* Britannicum, *in quo exhibentur ter mille Fixæ; hoc est, fere duplo plures quam quæ in Catalogo prostant* Hevelliano, *quibus singulis adjunxit propriam Longitudinem, Latitudinem, Ascensionem Rectam, Distantiam à Polo, cum Variatione Ascensionis Rectæ & Distantiæ à Polo, dum Longitudo uno gradu mutatur. Historiam Cælestem Britannicam, quæ utrumque Opus, observationes scil. & Catalogum complectitur, brevi, ut audio, editurus est ipse* Flamstedius.

Inter tot Astronomiæ adjumenta & lumina, desiderabatur adhuc Universa quædam & consummata Cælestium Phænomenôn Theoria, secundum rerum veritatem causasque Physicas explicata, & in unum corpus redacta; quam magno eruditorum omnium plausu absolvit tandem & in lucem edidit, Clarissimus Dominus Gregorius, *insigne nostræ Professionis decus, & Præceptor meus mihi ad extremum vitæ Spiritum gratissima usque memoria recolendus, cui si quid ego in hisce studiis profecerim id illi omne acceptum refero.*

Interim fatendum est, opus illud Gregorianum, *minus videri ad discentium captum accommodatum; multa enim complectitur quæ reconditioris Geometriæ cognitionem postulant, qualem in Tyronibus raro reperire licet, qui tamen in Astronomiæ elementis possunt instrui. Præterea ubique mixtim traduntur motus cælestes, cum ipsorum causis Physicis, quæ duæ res, simul à Tyronibus addiscendæ, eorum mentes nimium distrahunt, & doctrinam difficilem reddunt; unde ego satius duxi, motus primum explicare, & Phænomenon quæ ex iis oriuntur rationem reddere, quibus perspectis, facilior ad Physicam fit transitus.*

In hunc finem, sequentes composui Lectiones, quas in Schola Astronomica, prout officii mei ratio postulabat, habui, in quibus imprimis operam dabam, ut motus cælestes perspicue quantum possim explicentur, & Phænomenôn inde orientium *rationes reddantur; eorum maximè, quæ paucarum in Geometria propositionum subsidio intelligi possunt. Ideoque consulerim, ut Tyrones qui Astronomiam addiscere cupiunt,* Euclidem *ante oculos ponant, eumque adeant, quoties Propositiones aliquas à nobis citatas inveniunt. Sunt autem Propositiones numero perpaucæ, quales sunt Prop.* 13, 15, 27, 28, 29, 32, 47, *Elementi primi. Item* 16, 18, 20, 31, 35, 36, 37. *Elementi Tertii. Item* 4, 5, & 6, *Elementi sexti. Optamus quoque, ut Tyrones in Trigonometria Planâ, & Sphærica probe instructi sint; Quod si sint aliqui, qui principia Astronomica addiscere volunt, & tamen Trigonometriam nesciunt; quales futuri sunt, ut credo, plures, ab illis hæc postulamus concedi. Nempe, quoniam in omni triangulo tam Sphærico quam Plano sint tres anguli & tria latera: horum sex, datis tribus quibusvis, quorum in triangulo rectilineo unum sit latus, reliqua inveniri possunt; quod docet Trigonometria, cujus usus in Astronomia latissime patet, ejusque auxilium ubique conspicitur.*

Sunt præterea quædam in nostra Astronomia, quæ penitiorem in Geometria cognitionem desiderant; qualia sunt quæ de Theoriis Planetarum Ellpiticis, à Keplero *inventis, tradidimus. Sed Tyrones, qui de particularibus hisce, sunt minus solliciti, possunt ea præterire. Rogo etiam Tyrones, qui parum in Astronomia antea versati sunt, ut post explicatas in Lectionibus* XI. & XII. *generales Eclipsium causas, reliqua relinquant, & postquam rite satis instructi fuerunt in Doctrina Sphærica in Lect.* XIX. & XX. *à nobis tradita, denuo eadem repetant. Qui nostra hæc prius intellexerint, possunt optimo cum fructu eximium illud* Gregorianum *opus legere, & causas motuum Physicas exinde addiscere.*

In gratiam potissimum Juventutis Academicæ has Lectiones edendas curavi, qui per eas semel in Schola recitatas minus proficere valent. Unde mihi reservo potestatem easdem iterum, quoties visum fuerit, in Scholâ habendi, ubi si quid in illis obscurius dictum sit, dabo operam ut illud in clariore luce exponatur. Auditores autem nostri hoc pacto, ubi semel nostras Lectiones perlegerint, quotiescunque easdem denuo publice recitatas audiant, possint de locis difficilioribus & minus intellectis nos consulere, & dubia sua proponere, prout Statuta nostra Academia requirunt.

LE-

LECTIONES ASTRONOMICÆ.

LECTIO I.

De Motu visibili seu Apparente.

ASTronomiæ elementa traditurus, corporumque longissime dissitorum motus, motuumque Phænomena explicaturus, ut ea omnia à Tyronibus melius intelligantur, necessarium duxi quædam in genere de motu visibili seu apparenti præfari.

Et primo cum oculus ea corpora tanquam quiescentia spectat, quæ inter se eandem semper conservant distantiam visibilem, & quorum, oculi respectu, idem manet situs, eadem positio, atque invariata distantia; eorum tantum corporum motus nostro objicientur visui, quæ vel inter se, vel oculi respectu, situs, & positiones mutant. *Quæ corpora quiescere videntur.* *Quæ moveri.*

Vel ut paulo altiùs hanc rem ex propriis principiis deducamus, sciendum est apud Opticos demonstrari, Corpus omne quod videtur, imaginem suam depictam habere in fundo oculi, super tunica Retinæ, cujus superficies Sphærica est, idque fieri ope radiorum lucis à visibili prodeuntium. Porro cujuslibet puncti imaginem eum obtinere locum quem radii à puncto visibili prodeuntes & refractione convergentes in retinâ offendunt. Portio peripheriæ A B anteriorem oculi superficiem repræsentet, cujus fundus seu Retina sit D G, illa scil. tunica quam extremitates nervi optici componunt, atque oculi centrum sit C. imago puncti F erit in recta F C H atque ideo in puncto H. sicut imago puncti E erit in L; Radii enim lucis à pellucidis oculi tunicis atque humoribus ita refranguntur, ut qui ex F proveniunt ad H convergant, & qui à puncto E digrediuntur *Quomodo fit visio.* TAB. 13. *fig.* 1.

 in

in L conveniant, & in iis locis vellicatis nervis, sensationem visus excitabunt.

Hæc res experientiâ certa & explorata est. Nam si hominis recens defuncti, aut illius defectu bovis oculus è capite evellatur; ablatâ opacâ Choroidis membranâ, quæ cerebro obversa est, ut remaneat solum tenuis & pellucida satis Retinæ tunica, si hic oculus fenestræ vel objecto cuivis fortiter illustrato obvertatur, non sine voluptate aut forsan admiratione picturam quandam in eo videbimus, objectum extra positum scite satis imitantem. Eadem conspicientur phænomena si loco oculi capiatur lens vitrea convexa, ea enim fenestræ obversa, objectorum lucidorum imagines, chartâ albâ ad debitam distantiam pone locatâ, exhibebit.

Si itaque puncti F imago H in eadem retinæ parte maneat immota, oculo etiam immoto, punctum F ut quiescens habebitur. Quod si punctum illud F ad E deferatur, ejus imago in fundo oculi diversas retinæ partes successive percurrendo & spatium L H describendo sensationem motus excitabit. Et si punctum illud longinquum sit, motusque factus fuerit in plano trianguli F C E Spectator magnitudinem apparentis motus per angulum F C E æstimabit.

Quomodo motus oculis percipitur.

Si in linea C F aliud sit visibile M etiam longinquum, quod motu suo ad N deferatur, motus ejus visibilis idem erit qui fuit puncti F; cum imaginis utriusque eadem sit semita, idemque motûs vestigium in oculi fundo cernitur. Si visibile M per rectam M F ad F feratur motus ille spectatoris aciem fugiet, quoniam puncti istius imago in H, in eadem retinæ parte immota manet. Et quotiescunque corpora longinqua moveantur in rectâ aliquâ per oculi centrum transeunte, eorum motus non erunt visu observabiles; nec aliâ ratione de istiusmodi motibus constabit, quam ex aucto vel diminuto visibilium splendore, & magnitudine apparente. De objectis longinquis hic loquor, nam si propinqua sint, etsi in rectâ lineâ per oculum transeunte moveantur, possumus tamen de eorum motu judicare, per mutationem sitûs, & distantiæ ad alia corpora, quorum positiones & distantiæ sunt notæ. Quin etiam qualiscunque

que

que fuerit mobilis semita in plano E C F sive motus sit in recta F E sive in arcu circulari F P E sive in alia quacunque curva F Q E ad lineam E C deferatur idem semper conspicietur motus, eodem manente angulo F C E, aucto autem vel diminuto illo angulo augebitur vel minuetur motus visibilis qui proinde per angulum illum tantummodo mensurari potest.

Quo itaque motus corporum apparentes definiantur, Methodus tradenda est, quâ Geometræ & Astronomi angulorum mensuras investigant, quæ licet passim nota sit, nec Artifices vulgares latet, ne tamen quicquam omisisse videar, quo sequentia à Tyronibus facilius intelligantur, libet eam paucis exponere. *Angulorum mensura.*

Demonstravit Euclides angulos ad circuli alicujus centrum constitutos, proportionales esse peripheriis quibus insistunt, unde angulorum mensuræ ex peripheriis vel arcubus circulorum optime innotescunt. Quod ut fiat, totam Peripheriam circularem in partes 360 æquales dividunt Astronomi, has partes gradus appellant, singulosque gradus in 60 partes æquales secant, quas scrupulos seu minuta prima nominant. Rursusque unumquemque scrupulum Primum in 60 scrupulos Secundos, & Secundorum unumquemque in suos Tertios, & Tertios in Quartos, & ita deinceps subdividi mente intelligunt. Atque hâc ratione non plures numerant gradus seu partes in maximo quovis circulo quam in minimo, adeoque si idem angulus ad centrum à diversis arcubus subtendatur, partium sive scrupulorum numerus in omnibus arcubus subtendentibus erit æqualis; eandem quippe arcus isti ad peripherias suas totas rationem habent, v. gr. sit Angulus A C B & centro C describantur arcus duo A B, D E, tot erunt gradus & scrupuli in arcu A B, quot sunt in arcu D E, etiamsi Radius arcûs A B sit tantum unius pedis in longum & Radius alterius arcûs stellas fixas attingat, gradus tamen in peripheria A B in eâ ratione minor est gradu in Peripheria D E, quâ radius C B, minor est radio C E. Angulus C tot graduum, seu scrupulorum esse dicitur, quot arcus A B vel D E ejusmodi partes continent. *Gradus qui? Scrupuli.* *Tab. 13. fig. 2.*

 In-

Instrumentum, quo anguli vulgo observantur, est circularis peripheriæ data portio, in gradus, & minuta, divisa. Quadrans scil., Sextans, aut Octans, si Instrumentum sit circuli quadrans, Arcum in 90 partes æquales, si Sextans in 60., si Octans in 45. dividunt Artifices; quæ singulæ erunt æquales uni totius peripheriæ gradui, unumquemque rursus gradum in suos scrupulos primos, vel etiam secundos, si instrumenti amplitudo hoc permittat, partiuntur. Deinde instrumenti lateri Pinnacidia vel dioptras figunt; & Regulam suis quoque Dioptris instructam, circa centrum peripheriæ volubilem applicant. Observantur autem anguli hunc in modum.

Modus observandi angulos. TAB. 13 *fig.* 9.

Sint duo objecta longe à nobis dissita A & B sitque oculus in C, & mensurandus sit angulus ACB. Convertatur instrumentum donec per dioptras lateris CD, videatur punctum A; deinde circa latus CD, instrumenti planum & Regula circa centrum ita vertantur ut per regulæ dioptras conspici possit punctum B, Manifestum est ex dictis Arcum DE ostendere mensuram anguli ACB & etiam mensuram arcus AB, hoc est angulus ACB, & arcus AB tot erunt graduum & minutorum quot arcus DE per Regulam abscissus constat ejusmodi partibus.

Horizon.

Quin etiam Astronomi alias metas sibi proposuerunt à quibus eodem vel simili instrumento distantias stellarum arcuales numerarent. Eæ sunt cujuslibet loci *Horizon*, quem extensa quasi infinita Terræ planities efformat, totam Sphæram mundi in duo ad sensum hemisphæria æqualia dividens. Et Arcum verticalem inter stellam quamlibet & horizontis limbum interceptum, istius stellæ *Altitudinem* dicunt. Alia meta est *Horizontis Polus*, seu punctum quod vertici cujusque loci quocunque momento temporis imminet, quodque linea perpendiculi denotat, secundum quam, & omnia Gravia deorsum rapiuntur, & nos recti consistimus. Hoc pacto Naucleri solis Altitudinem inveniunt respectu arcus, seu anguli quem efficiunt in oculo Radii à sole, & ab Horizonte venientes. Ita Astronomi angulum quoque notant, quem Solis vel stellæ Radius format cum

Altitudo stellæ Horizontis Polus.

li-

linea in superficiem horizontis perpendiculari, Regulis & Quadrantibus in hunc usum constructis.

Dioptrarum loco nunc Telescopia vulgo adhibentur; quorum ope, objecta longinqua certius & exactius, quam per dioptras exactissimas visu attinguntur. Sed modum Telescopia adaptandi, omnemque illius Instrumenti apparatum hic describere, nos ad alia properantes nimis retardaret, hæc igitur nunc sufficiant.

Ex angulorum quoque mensuris, corporum longinquorum *Diametri apparentes* innotescunt; sit enim quævis linea AB ab oculo C directe visa, & ab ejus terminis A & B ad oculum C duci supponantur rectæ AC, BC, linea illa AB dicitur sub angulo ACB videri, qui apparens ejus diameter appellatur, & tot esse graduum, & minutorum, quot angulus ille, instrumento observatus, indicabit. Eodem modo objectum quodvis DE ab oculo ad F Spectatum dicitur apparere sub angulo DFE, & objectorum AB, DE, apparentes magnitudines erunt, ut anguli ACB, DFE. *Corporum diametri apparentes.* TAB. 13. fig. 4. TAB. 13. fig. 4. 5.

Quod si oculus objecto AB jam propinquior sit, illud ex dimidia distantia scil. ex G aspiciat, objectum illud sub duplo fere majori angulo videbitur. Si triplo propius accedat oculus, triplo fere major fit angulus sub quo apparet objectum, ejusque apparens diameter triplicabitur, modo anguli illi sint satis parvi, nimirum si gradum unum aut alterum non superant, eruntque ejusdem objecti magnitudines apparentes oculi appropinquationibus proportionales.

Atque hâc methodo si duorum corporum habeantur diametri apparentes, una cum distantiarum ab oculo ratione, exinde innotescet proportio, quam obtinent eorum diametri veræ. Nam si objectorum distantiæ sint æquales, diametri veræ erunt apparentibus proportionales; si anguli, sub quibus videntur objecta, sint æquales; magnitudines veræ diametrorum, erunt ut ipsarum distantiæ ab oculo ex. gr. si angulus ACB sit æqualis angulo DFE, at distantia CB sit tripla distantiæ FE erit Recta AB triplo major recta DE. Quin etiam si non tantum fit CB distantia tripla distantiæ fe, sed & angulus ACB duplus anguli dfe erit TAB. 13. fig. 4. 6.

AB sextuplo major quam de. Nam capiatur CM æqualis fe, & sit MN objectum sub angulo MCN aut ACB apparens, ob angulum illum duplo majorem angulo dfe erit linea MN duplo major quam de, sed ob AC triplo majorem quam CM erit AB triplo major quam MN, unde erit sextuplo major quam de. Hinc si Solis & Lunæ diametri apparentes sint æquales, & Solis distantia à Terra sit centies major quam Lunæ distantia ab eadem, erit vera Solis diameter centies major Lunari diametro. At Solis à nobis distantiam plusquam centies superare distantiam Lunæ, in sequentibus demonstrabitur, unde diameter Solis plusquam centies superabit diametrum Lunæ.

Diametri apparentes ad objecta accedendo majores fiunt.

Cum, uti dictum est, ad objecta longinqua accedendo eorum diametri apparentes majores fiunt, inque ea fere ratione augentur qua iis propius admovetur oculus. v. gr. si quis decies propius quam nos Lunam spectaret, is Lunam clariorem & secundum diametrum decies majorem cerneret. Si adhibeatur Telescopium quod decies tantum ampliat objectorum diametros; Luna per illud visa eandem phasim nobis ostendet, quam spectatori decies propius admoto ostenderet. Si Telescopia adhibeantur, quæ objectorum diametros centies vel etiam ducenties augeant, ea apparentias exhibebunt plane similes iis quæ ex distantia centies vel ducenties minore conspicerentur. Atque hinc novimus qualem quantamque oculis nostris se præberet Luna, ex distantiâ trium Telluris diametrorum spectata. Qualisque etiam ejus foret facies, si multo propius accedamus, & ad distantiam 8 tantum stadiorum millia ipsam contemplaremur. Ex eo enim intervallo, ingentes montium Lunarium Tractus, profundas valles, & latos campos intueri liceret. Quin etiam his Telescopiis altius in coelum invehimur, & Jovi & Saturno reliquisque errantibus, quin cometis quoque & fixis tam prope admovemur, ita ut tam longi itineris pars tantum centesima vel etiam ducentesima nobis restet. Præterea his Telescopiis Planetarum circa Axes Proprios conversiones, Jovis atque Saturni Lunas, & Eclipses hujusque posterioris Annulum, variasque phases conspicimus.

Telescopii beneficia.

tus. Hæc Telescopii beneficia silentio præterire in hoc loco haud æquum foret; cum illud potissimum sit instrumentum, quo non modo corporum magnitudines, sed apparentes motus observantur. Sed intermissum de motu visibili sermonem repetamus.

Cum corporum longinquorum motus non aliunde quam ex mutatione anguli qui ad oculum videntis est, innotescat, facile hinc constabit utcunque corpora æquabiliter moveantur & æqualia spatia æqualibus temporibus describant, fieri tamen posse, ut eorum motus inæquales admodum & irregulares ab oculo conspiciantur, quod per exemplum patebit. *Corporum longinquorum motus æquales inæquales videntur.*

Ponamus corpus aliquod in peripheria circuli ABDEGQ uniformiter revolvi, æquales arcus AB, BD, DE, &c. æqualibus temporibus percurrendo ejusque motum oculus alicubi in plano ejusdem circuli in O, v. gr. positus ex longinquo aspiciat. Cum igitur mobile ab A ad B pervenerit ejus motus apparens per angulum AOB seu per arcum HL quem descripsisse videtur, definietur; dein in æquali tempore, dum arcum BD percurrit, motus apparens ex angulo BOD dignoscetur; & videbitur mobile transiisse per arcum LM qui arcu HL multo minor est, & mobile in D in peripheriæ NHM puncto M conspicietur; Postquam vero descripserit arcum DE prioribus AB vel BD æqualem, & ad punctum E pervenerit, ab oculo in eodem puncto M spectabitur, ita ut eo tempore quo per arcum DE defertur corpus oculo fere ut immotum & quasi stationarium videbitur; At dum in peripheria proprii circuli per arcum EF progreditur, oculo ad O posito, per peripheriam ML regredi videbitur. Sic ubi ab E per F ad G pervenerit, oculus illud conspiciet in puncto H, in eo scil. situ quam prius in A habuit. Dum autem à G per I ad Q defertur, spectator ipsum videbit per arcum HKN moveri; at dum in orbita propria progrediens corpus arcum QP describit, oculus ipsum ad idem punctum N continuo referret, quo tempore rursus stationarium apparebit corpus, deinde post digressum ejus à puncto P cursum suum invertere & per arcum *Tab. 13. fig. 7.*

cum

cum NHLM motibus admodum inæqualibus ferri videbitur.

Inæqualitas Optica.

Hæc motuum Inæqualitas ab Astronomis *Optica* dicitur, eo quod non corporibus reverà competit, sed apparens tantum est, ex oculi positione orta, corpus enim eadem semper velocitate in propria orbita progredi supponitur, & si oculus in centro istius orbitæ constitutus fuerit, motum ejus æquabilem semper conspiceret.

Motus æquabilis in peripheria circuli à spectatore intra circulum locato inæquabilis videtur.

Tab. 14. fig. 1.

Sed nunquam retrogradus.

Si in quovis intra circulum puncto O quod centrum non est, immobilis locetur spectator, is motus corporis peripheriam ABCD percurrentis, in se quidem æquales, inæquales admodum videbit; & cum longissime distat corpus à spectatore ut in A, tardissime incedere videbitur, propinquius accedens corpus ut in C, velocius progredi apparebit, ob angulum COD majorem angulo AOB, licet arcus AB, CD sint æquales. At nunquam stare aut regredi conspicietur corpus. Adeoque si spectator intra circulum in quo defertur corpus locetur, illudque nunc progredi, nunc stare, nunc regredi videat concludendum erit spectatoris locum etiam mobilem esse.

LECTIO II.

De Motu apparenti qui ex Observatoris Motu oritur.

HUcusque supposuimus spectatorem loco immotum toto observationis tempore constitisse. At si Spectatoris locus etiam moveatur, diversæ tum nascentur rerum apparentiæ, & oculus ea corpora quiescere cernet, quæ celerrime progrediuntur, quiescentia autem corpora veloci impetu deferri conspiciet. Quin etiam fieri quoque potest ut motus corporum apparentes fiant veris & absolutis directe contrarii, & quæ corpora reverà ad orientem feruntur, ad occidentem tendere spectatori videantur. Quæ omnia ex motuum apparentiis, quæ se offerunt iis qui in nave vehuntur, satis apte illustrari possunt.

Qui in nave vehuntur motum navis non percipiunt.

Si navis aliqua motu utcunque veloci, sed uniformi, à ventis deferatur, nec motus navis nec corporum quorumlibet eun-

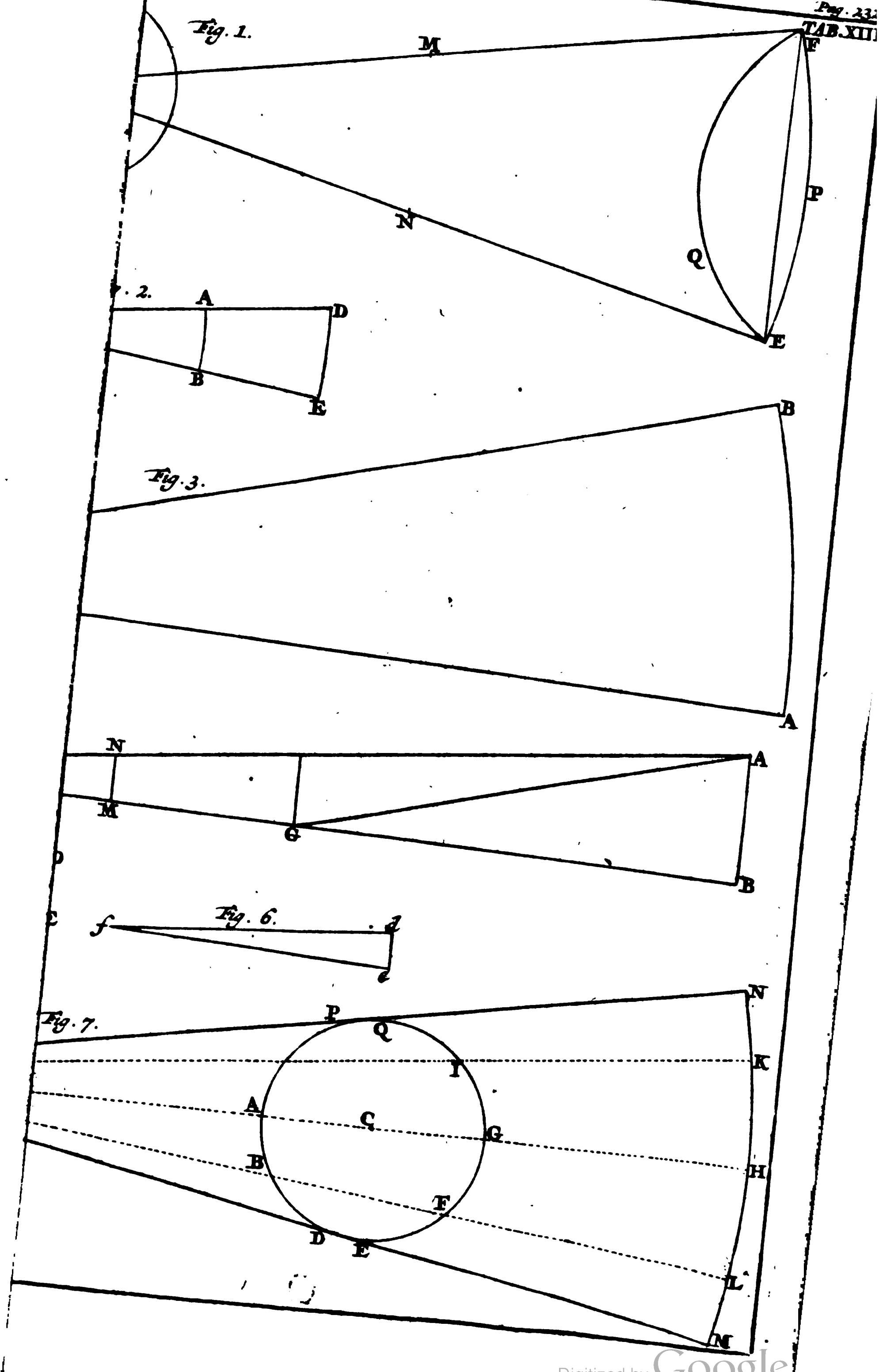


Fig. 1.
M
N
F
P
Q
E
2.
A
D
B
E
Fig. 3.
B
A
N
A
M
G
B
D
C
Fig. 6.
f
d
e
Fig. 7.
P
Q
N
K
I
A
C
G
B
H
F
D
E
L
M

eundem intra navem ſitum ſervantium & relative quieſcentium motus *vectorum* oculis percipitur; cum enim omnes navigii partes eundem ſemper inter ſe & etiam vectoris reſpectu, ſitum, & poſitionem conſervant, ipſorum imagines in oculi fundo depictæ, iiſdem ſemper retinæ partibus quaſi immotæ adhærebunt. Ex quo fiet ut quamvis omnia quæ intra navem locantur corpora unà cum ipſa celerrime progrediantur, eorum tamen motus, ſpectator ſimul cum iis in nave vectus non viſurus ſit. Idem tamen ad littora oculos vertens, ea cum aliis objectis extra poſitis, moveri conſpiciet, nam dum ipſa navis movetur & oculum ſpectatoris ſecum vehit, neceſſe eſt objecta externa ſitus ſuos oculi reſpectu mutare, & ipſorum imagines nunc has, nunc alias Retinæ partes ſucceſſive occupare, unde fit ut quieſcentia objecta externa moveri, & quæ intra navem ſimul cum ea progrediuntur quieſcere videant, in nave collocati vectores. *At objecta externa quieſcentia moveri videntur.*

Si dum navis celerrime progrediatur, globus plumbeus de ſummo malo demittatur, eum quaſi in perpendiculo cadentem aſpicient vectores. Qui quidem globus (quod idem faceret ſi navis omnino quieſceret) tabulatum navis juxta pedem mali percutiet, verus tamen ejus motus non fit in perpendiculari ad ſuperficiem globi terreſtris, ſed deflexo per aërem itinere fertur Globus, quam ejus ſemitam incurvatam facile deprehenſurus eſt quiſquis qui ex alia quieſcente nave motum ſpectaret. Hujus phænomeni cauſa facile oſtenditur. Nam juxta primariam Naturæ legem, corpus omne in incepto ſemel motu ſecundum eandem directionem ſemper perſeverare conatur, jam Globus dum in ſummo malo hærebat, unà cum malo progrediebatur, adeoque poſtquam dimittitur eandem progrediendi vim retinebit, & urgente gravitatis vi progredietur ſimulque deſcendet; neutra enim harum virium alteram deſtruet aut imminuet, (neque enim ſunt contrariæ) adeoque nec minus prorſum nec minus deorſum tendet globus, quam ſi viribus ſeparatis impelleretur; ſed hiſce conjunctis viribus ſolum impeditur rectitudo ſemitæ, quam ſeorſim haberent *Motus Globi in nave cadentis.*

 per-

perpendicularis & horizontalis impetus, motusque peragetur in linea curva iis simili quas describunt Gravia horizontaliter projecta, quæque simul prorsum & deorsum feruntur, & spectator in quiescente nave Globum ejusmodi percurrere curvam videbit. Porro cum Globus & malus eadem velocitate progrediuntur, eadem inter utrumque semper manebit distantia, & proinde Globus juxta pedem mali tabulatum feriet; Præterea motus Globi quo prorsum tendit, tam navi ejusque partibus quam *vectoribus* communis est. At motus ille communis uti ostensum est, ante casum Globi videri non potuit, quare nec postea in descensu erit observabilis. Sed Solus ille motus quo Globus vi gravitatis propriæ deorsum tendit, quique Globo peculiaris est visu percipitur; hoc est Globum quasi in perpendiculo cadentem aspicient *vectores*. Hæc omnia revèrà sic accidere experimenta sæpius facta adeo confirmant, ut dubitationi nullus relinquatur locus.

Motus Globi projecti intra navem. Si quis in prorâ sedens, Globum versus puppim eâ celeritate quâ navis fertur, projiciat, Globus ille nec prorsum, nec retrorsum, movebitur, sed sublatâ gravitatis vi in aëre immotus maneret, gravitate autem urgente, rectâ ad navem descendet, talemque esse ejus motum, in ripâ vel in quiescente nave sedentes agnoscent spectatores; vis enim à projiciente impressa, contrariam & æqualem destruet vim quam Globus à nave acceperat. At illi qui in nave vehuntur, Globum non quiescentem nec rectà cadentem, sed versus puppim ea velocitate latum conspicient, quam reverà haberet, si quiescente nave, eâdem vi projectus fuisset.

Si velocitas quâ projicitur Globus versus puppim sit minor velocitate navis, Globus in eo casu in eandem cum nave plagam sed tardius deferetur, nondum destructâ vi totâ quam à navis motu accipiebat. At in nave sedentes Globum non simul cum nave progredientem conspicient, sed in contrariam prorsus plagam tendentem ea celeritate quam haberet, si quiescente nave eadem vi projectus fuisset. Hinc liquet

liquet motum apparentem vero & abſoluto poſſe fieri directe contrarium.

At objiciat aliquis Globum è manu projicientis emiſſum, in ipſam puppim impingere, eique ictum imprimere; quod fieri non poteſt niſi reverà Globus verſus puppim moveretur. Qui nodus ſolutu non difficilis eſt, Globum enim ii qui intra navem verſantur in puppim irruere eamque percutere cernent. At ſi ponatur aliquis in ripa quieſcens, ille non Globum in puppim ſed puppim in Globum impingentem videbit & ictûs magnitudo in utrovis corpore recepti, eadem omnino erit ac ſi navis quieſceret & Globus reverà in puppim impelleretur ea celeritate qua puppis ad Globum accedebat. Si enim duo ſint corpora A & B utcunque æqualia vel inæqualia, eâdem erit percuſſionis vis, ſive B cum datâ celeritate in corpus A quieſcens impingeret, ſive quieſcat B, & A cum eadem celeritate in ipſum B irrueret, vel ſi utrumque corpus verſus eandem plagam moveretur, & ſubſequens A celerius motum in ipſum B impingat, eadem erit quantitas ictûs, ac ſi B omnino quieſceret & A latum eſſet ſolummodo differentiâ celeritatum quâ ſcil. ipſius celeritas ſuperat celeritatem corporis B. Vel denique ſi A & B in contrarias ferantur plagas, atque in ſe invicem impingant, ictûs magnitudo eadem erit ac ſi ipſorum unum quieſceret, alterum motum eſſet cum eâ celeritate quæ ſit utriuſque celeritatum ſummæ æqualis. Verbo dicam, eâdem ſemper manente velocitate corporum relativâ, qua ad ſe invicem accedant, eadem quoque manebit percuſſionis quantitas quomodocunque velocitates illæ partitæ fuerint. Atque hinc fit ut in nave quantumvis velociter latâ motus omnes noſtri rerumque à nobis mobilium eadem ratione peraguntur, iidemque apparent ac ſi navis reverà quieſceret. Et univerſaliter verum eſſe deprehendimus, quod corporum in dato loco incluſorum, iidem erunt motus inter ſe, iidem congreſſus, eadem percuſſionis vis, ſive locus ille quieſcat, ſive moveatur uniformiter indirectum.

Objectio

Tab 14. fig. 2.

Hæc adduxi exempla, ut vobis conſtaret quantum diſcriminis inter motus corporum reales, & apparentes, poſfit intercedere; & quàm difficile fit de illis, ex his, judicium facere.

Ex iisdem constabit, quod si in Jove vel Saturno vel alio quovis Planetarum locetur spectator, is loci sui motus proprios non magis visu percipiet, quam navigantes motum navis in qua vehuntur oculis discernere possunt. Et hi quidem ex subitaneis navis jactationibus quas sibi frequenter molestas experiuntur, motum ejus aliqualem dignoscunt. At Planetæ nullis fluctibus, nullis procellis sunt obnoxii sed placidissima latione in tranquillo quasi æquore natantes fruuntur, & in motibus suis absque omni impedimento perseverant.

LECTIO III.

De Systemate Mundi.

CUm ut ostensum est, pro vario oculi situ atque motu tot & tam variæ fiunt rerum apparentiæ, quo melius mundi fabrica innotescat, & Universi admiranda pulchritudo, motuumque Harmonia, animo concipiatur; convenit ut Divinum hoc & immensum opus non ex uno aliquo spectetur puncto seu angulo, sed ex pluribus locis debitis intervallis à se invicem distantibus lustrandum erit, ut diversos hos aspectus comtemplando, eosque comparando vera tandem, & justa, summoque Conditore digna universi opificii eliciatur cognitio.

Cælestia itaque corpora motuumque phænomena ut pernoscantur, fingamus nos non Terricolas esse, & uni sedi quasi puncto affixos, sed potestatem nobis dari libere quocunque libuerit, per spatia indefinita vagandi. Et ut diversitas aspectuum ex diversis locis habeatur, aliquando nosmet in spatio quodam immoto sistamus, aliquando in Sole, sæpius in planetarum aliquo & nonnunquam etiam in Stellis fixis vel in Cometa locari nos supponamus.

— — — — Juvat ire per alta
Astra. Juvat Terris & inerti sede relictis
Nube vehi, validique humeris insistere Atlantis.

Et

Et quamvis corpora noſtra utpote in Terram ſua gravitate depreſſa ad altiſſimas illas domos avolare non poſſunt; nihil tamen prohibet quo minus animo & imaginatione cæleſtes illas peragremus regiones. Nec deneganda eſt hæc quam noſmet nobis vindicamus licentiam, quippe quæ omnibus omnis ævi Aſtronomis ſemper conceſſa fuit; hi enim oculum à ſuperficie ad ipſum telluris centrum detulerunt, ut motuum æqualitas exinde ſpectaretur, quin & circulos & lineas rectas per Solem & Sidera traducunt, quæ licentia, ni peteretur ſemper, & concederetur, brevis admodum & imperfecta eſſet Aſtronomiæ Scientia, & irritus omnis Aſtronomorum labor.

Ut igitur Aſtronomis ſolenne fuit, oculum ad Terræ centrum detrudere, quò is motum apparentem diurnum conſpiceret æquabilem, nobis è contra, quo motus corporum reales & abſoluti, quantum fieri poteſt æquabiles videantur; liceat ſpectatorem in cælum invehere & in loco quodam immoto conſtituere. Nam omnes cujuſque ſectæ Aſtronomi facile agnoſcunt Planetarum motus eſſe in ſe ſimplices uniformes & regulares. At ex Terræ ſuperficie, aut ab ejus centro ſpectati Planetæ in motibus propriis inæquali admodum & minime regulari curſu deferri videntur, adeoque certum eſt Tellurem hanc non in illorum motuum centro locari. Motus itaque corporibus mundanis proprios qui contemplari velit ſpectator, primo vel in Solis centro vel etiam extra ſolaris corporis Globum, non tamen in loco ab illo nimis remoto ſe ſiſtat, & quales is ſit viſurus rerum apparentias hic perpendamus.

Planetæ è Terra ſpectati irregulari curſu moveri videntur.

Et hìc inprimis notandum eſt; quod in quocunque loco ponatur ſpectator, ſemper in centro proſpectus proprii ſe conſtitutum cernet. Nam corpora longinqua etiamſi magnis intervallis à ſe invicem diſtent, ſi tamen in eâdem fuerint linea per oculum tranſeunte, in eodem ſpatii puncto, & quaſi æque remota videntur; Unde fiet, ut ſpectator ea corpora quorum diſtantias viſu æſtimari nequit, ad ſuperficiem Sphæræ referet, cujus centrum ab oculo tenetur, motuſque omnes in ea ſuperficie peragi apparebunt. Hinc fit ut Solem,

Spectator eſt ſemper in centro proſpectus proprii.

lem, & Lunam, & reliqua omnia sidera, quæ diversissimis intervallis à nobis distant, unà cum nubibus quæ non ultra milliare unum aut alterum ascendunt, tanquam in eâdem superficie Sphæricâ concavâ locata intuemur; Qualiscunque igitur sit spectatoris habitatio sive in Sole, sive in Saturno Planetarum Extimo, vel etiam in stella quavis fixa, locus ille pro medio mundani spatii, seu pro centro Universi ab istius loci incola habebitur.

Prospectus è centro Solis.

Spectator itaque Solis centrum tenens, & cælum intuens, superficiem ejus Sphæricam concavam oculo concentricam innumerisque Stellis, quas fixas dicimus, undique refertam videbit; cumque Stellæ illæ è tellure spectatæ eundem inter se immutabilem situm atque ordinem servare deprehenduntur, sic etiam è Sole visæ, eandem quoad sensum quæ è Terra observatur à se invicem invariatam distantiam & positionem obtinebunt; tanta enim est ipsarum vel à Terra vel à Sole distantia, ut postea ostendetur, ut exigua illa loci mutatio, quæ fit spectatorem à tellure ad Solem deducendo, vix sensibilem mutationem in Stellarum situ visibili efficiet. Verum quamvis Stellæ fixæ è tellure visæ easdem semper à se invicem distantias & eosdem inter se situs conservare videantur, at oculi respectu positiones mutare, & nunc supra attolli, nunc infra deprimi, perpetuoque motu circa telluris Axem gyrare observantur, cum tamen interea qui è cælo Solari illos intuetur, omnino immobiles seu in eodem semper loco permanentes conspiciet. Nec profecto refert sive omnino quiescerent Stellæ, sive circa Tellurem cælum omne sidereum una cum sole esset volubile, semper enim è Sole eadem esset quietis apparentia, nam motus ille si quis fuerit gyrationis circa Terram sit spectatori Stellisque omnibus communis, adeoque non magis sensibus percipietur, quam navigantium oculis cursus navis, in qua vehuntur, sit observabilis.

Immensa Stellarum à Sole distantia.

Stellæ fixæ positionem respectu oculi mutant.

Planetæ seu Errones sex.

Præter Stellas innumeras quiescentes, sex alii in cœlo nitent circa Solem volubiles Globi, qui diversis omnino periodis gyros complent, adeoque varias & continuo mutabiles positiones tam à se invicem, quàm ab immotis Stellis

eas

eas sortiri necesse est. Stellas has errantes sive Planetas dicimus, quarum una est ipsissima Tellus nostra habitatio. Quin si Tellurem quiescere, Solemque circa ipsam motu annuo deferri supponamus; certum tamen est spectatorem in Sole, Tellurem eundem in cælo circulum & eodem tempore describentem videre, quem nos in Terra habitantes à Sole percurri observamus, uti in sequentibus demonstrabitur.

Planetarum nomina & Characteres sunt, Saturnus ♄, Jupiter ♃, Mars ♂, Tellus ♁, Venus ♀, Mercurius ☿ qui est Soli proximus.

Planetæ moventur circa Solem ab occidente in orientem.

Planetæ omnes Secundum eandem plagam, scil. ab occidente in orientem, circa Solem in orbitis in uno fere plano jacentibus seu non multum à se invicem dehiscentibus, feruntur; & orbitarum plana se mutuo secant in lineis quæ per Solis centrum transeunt; adeoque spectator in Solis centro locatus, in orbitarum omnium planis consistet, & Planetas in concava cœli superficie motus suos peragentes, circulosque circa se maximos describentes videbit, unde fit ut singulorum planetarum diversas a Sole distantias oculorum acies æstimare non potest. Quo itaque tam distantiæ quàm motus Planetarum videantur, convenit ut è Sole migremus, oculusque supra orbitarum plana ascendat, in recta quæ per Solem transeat, & ad orbitam Telluris perpendicularis sit, & quanta Terræ à Sole distantia est, tanta etiam sit spectatoris distantia, in hâc rectâ positi. Ex hoc loco cernere licebit Planetas diversis admodum intervallis à Sole removeri, & qui gyros citius conficiunt, ipsi propiores esse; qui tardius absolvunt circuitus, longius abesse. Eritque Planetarum talis ordo, qualis in annexâ figurâ repræsentatur. Ubi in orbitarum centro perstat Sol loco immobilis, circa quem volvuntur planetæ sex, Mercurius, Venus, Tellus, Mars, Jupiter & Saturnus, ab occidente in orientem. Secundum ordinem literarum ABCD; Mercurius Soli proximus, circulum suum peragrat, spatio temporis trimestri; deinde Venus paulo majori ambitu periodum absolvit mensibus fere octo. Ultra hanc Tellus circuitum conficit

TAB. 14. fig. 3.

Planetarum Ordo.

ficit ſpatio unius Anni. Deinde Mars biennio circulum proprium complet. At longius multo protenditur orbita Jovis, tardiuſque ille ſcil. duodecim annorum ſpatio circulationem perficit. Extimus denique atque omnium lentiſſimus Saturnus reliquas omnes orbitas gyro ſuo continet, & triginta annos ad periodum propriam complendam, poſtulat. Hoc eſt antiquiſſimum Mundi ſyſtema à Pythagora ejuſque ſequacibus in Græcia ab Orientis populis introductum, quamvis alterum illud apparens Syſtema, quod Terram immobilem, cælumque volubile ponit à vulgo fuit receptum. Quod etiam Ariſtoteles reliquique qui poſt illum in ſequentibus ſeculis vixerunt Philoſophi, à prioribus magnis viris multum degeneres amplexi ſunt, uſque ad Nicolaum Copernicum, qui verum veterum ſyſtema ab oblivione vindicavit, & reſuſcitavit, ſolidiſque argumentis confirmavit. Unde ab Aſtronomis ſyſtema hoc Copernicanum dicitur. Poſt inventum Teleſcopium nova ſpectacula non ante obſervata, cælum intuentibus manifeſtè ſe oſtentabant, quæ ſyſtema Antiquum mirifice auxerunt, invictiſque argumentis ſtabiliverunt.

Planetæ ſunt corpora Sphærica opaca.

Planetas Teleſcopio adjutus, diligentiùs luſtrans ſpectator, deprehendet eos Telluris inſtar, eſſe corpora Sphærica, & opaca, nam facies eorum quæ Soli obvertuntur illuminari, Soliſque luce reflexâ ſplendere, facies autem averſas tenebris obvolvi, eòſque umbras in plagam Soli oppoſitam projicere, conſpicimus. Lineaque illa quæ ſplendentem partem à tenebroſa diſterminat, aliquando recta apparet, aliquando curva, & nunc convexitate, nunc concavitate ſua lucentem partem reſpiciet, pro vario planetæ & oculi ſitu, reſpectu Solis illuminantis ſuperficiem planetæ ſphæricam. Quin etiam pro diverſo ſpectatoris ſitu nunc major nunc minor illuminatæ faciei cernitur portio; Ut in corporibus opacis Sphæricis lucenti Soli expoſitis, fieri oportet.

Planetæ ſecundarii.

Planetarum tres, nimirum Tellus, Jupiter, & Saturnus, aliis minoribus Planetis continuo ſtipari obſervantur; qui Planetæ ſecundarii, Lunæ, ſeu Satellites appellantur. Hi pri-

primarios in suis circa Solem circulationibus perpetuo comitantur, & interea etiam unusquisque circa Primarium proprium, gyros perficit. Tellus quidem unicâ tantum comitatur Lunâ, quam illa secum annuo circa Solem cursu vehit, & præterea circa se, tanquam centrum, menstruo itinere gyrare facit. *Tellus Lunâ stipatur.*

Quod autem Luna præ omnibus stellis tanta luce fulgeat & magnitudine Solem ipsum adæquare videatur, in causa est ejus Telluri proximitas, nam è Sole vix sine Telescopio erit observabilis, ac proinde si tantum à Terris distaret, quam Sol, opus esset Terricolis telescopio, quo videatur.

Jovem quatuor Lunæ tanquam Satellites perpetuo stipant, quæ diversis periodis atque distantiis circulationes circa ipsum perficiunt. Harum intima ad distantiam 2 ⅚ diametrorum Jovis periodum absolvit, die una cum tribus partibus quartis. Secunda 4 ½ diametris Jovis à Jove distat, & orbitam propriam describit spatio dierum trium, horis tredecim. Tertia diebus circiter septem, horis tribus septemque Jovis diametris cum parte sexta à Jove remota, circulum peragrat. Extima denique diebus sedecim, cum octodecim horis, ad distantiam duodecim circiter diametrorum Jovis revolutionem in orbita sua perficit. *Jupiter quatuor Lunis.*

Planetas hos Joviales primus mortalium conspexit magnus ille Galilæus, tubi optici seu Telescopii beneficio, hisque cælum sidereum adauxit, Stellas Mediceas eos appellans, quorum motibus observatis non pauca debentur Astronomiæ atque Geographiæ incrementa.

Saturnum in suo circa Solem itinere, non pauciores quam quinque comitantur Planetæ minores, horum plerique ob magnam vel à Terra, vel à Sole, distantiam; & exiguam corporum, molem, non nisi longissimis perquisiti Telescopiis se produnt, quorum tempora periodica, & distantiæ à Saturno ita se habent. Intimus revolutionem conficit die 1 ⅞ & distat à Saturni centro ejus semidiametris 4 ⅞. 2dus diebus 2 horis 17, ad distantiam 5 ⅝ semidiametris, Saturni periodum absolvit. Tertius 4 diebus, horis 13, ad distan- *Saturnum comitantur quinque planetæ secundarii.*

tiam octo semidiametrorum, integrum circulum describit. Quartus, diebus fere sedecim periodum absolvit, distans à Saturno octodecim semidiametris. Quintus & visorum extimus spatio dierum 79 ⅓ orbitam percurrit, distans à Saturno 54. semidiametros Saturni.

Saturni annulus. Exornat, præterea, Saturnum Annulus, qui eum medio cingens, nusquam contingit, sed undique ab ejus corpore distans, fornicis instar, pondere libratus suo, seipsum sustinet. Annuli hujus diameter plusquam dupla est diametri Saturni, & quamvis tenuis admodum sit superficiei convexæ crassities, tanta tamen est annuli latitudo, sive profunditas, ut pars circiter media istius spatii quod ab extima ejus superficie ad Saturnum porrigitur, ab ejus corpore occupetur, reliquo tantum spatio vacuo manente. Quibus usibus inservit admirabilis hic annulus, Terricolas & latet & perpetuo forsan latebit, cum nihil ei simile in rerum naturâ deprehendimus. Suspicienda tamen est infinita Majestas atque potentia Dei qui nostrâ hâc ætate, nova operum suorum specimina, nobis conspicienda deprompsit.

LECTIO IV.

In qua probatur Systema superius expositum esse verum Mundi Systema.

CONtra Mundi Systema in superiore lectione expositum, nobis fortasse objiciat aliquis; nos finxisse nosmet in cælum evectos, & ordinem atque motum planetarum supra traditum propriis lustrasse oculis, sed finximus tantum, & qui proinde ponitur corporum mundanorum ordo sive situs, erit figmentum. An non eâdem fingendi licentiâ, alius quivis Planetarum ordo supponi potest? possumus, accedente sensuum testimonio, Terram ponere immobilem, Solemque atque planetas circa illam motus suos describentes, atque ex illis positionibus possumus omnes apparentias & phænomena explicare. Respondeo quamvis finximus nos in altum sublatos, è cælo in Solem atque Planetas despexisse, qui tamen ex hâc hypothesi è cælo conspiciendus erit Planetarum situs atque ordo, figmentum non esse; sed ordo ille non

non minus verus, certus, & indubitatus erit, ac si reverà è cælo illum oculis contueri liceret. Nam in nostra Astronomia nihil omnino fingitur, quod non habet naturam ducem, & comitem observationem, quicquid in eâ asseritur, ex rationibus physicis, & demonstrationibus Geometricis certissime pendet. Veterum Astronomia sicut & Tychonica recte Hypotheses & figmenta dicuntur, cum ultrà suppositionem nudam nihil habeant, quo nitantur sed deformem Mundi fabricam exhibeant. At Nostra Astronomia quæ & antiquissima Pythagoreorum fuit, undique sibi consentiente compagine cohærens, mirandum in modum Mundi faciem ornat, & splendidissima Symmetria decorat. Nihil est in rerum natura quod magis monstrat acrem humani ingenii vim, summamque intellectûs perspicaciam, quam quod mens nostra ultra sensuum testimonia, imo repugnantibus sensibus, ausa sit se in sublime attollere, & subtilissimis suffulta rationibus, verum Mundi Systema partiumque dispositionem eruere. Quibus vero artibus has arces attigit igneas, paucis hic declarabo.

In vera Astronomia nullæ hypotheses aut figmenta.

Primo qualiscunque locus Soli concedatur, certissimum est Veneris orbitam illum cingere, nam aliquando supra Solem attollitur Venus, aliquando inferius descendit, & inter Solem, & Terram conspicitur. Quod supra Solem ascendit Venus, exinde patet quod in conjunctione cum Sole, hoc est cum juxta Solem è Terrâ videtur; plenâ & rotundâ facie *fulgentem* se Terricolis ostendit. Nam cum Venus, sicuti reliqui omnes Planetæ, lucem omnem à Sole accipiant, necesse est ut ea sola eorum facies splendescat quæ Soli obvertitur quæ vero aversa est, tenebris obvolvatur; adeoque cum Terricolis pleno fulget orbe, facies Soli obversa, & ab illo illuminata, Terræ quoque obvertitur; & proinde tunc temporis ultra Solem est. In Figura sit S Sol, T Terra, Venus in F, vel V locata, facie plenâ à Terricolis conspicietur, adeoque in illo casu Venus loca ultra Solem protensa, peragrat. Quod autem Venus infra Solem descendit, exinde constat, quod in conjunctione cum Sole, vel prorsus evanescit, vel corniculata Lunæ instar ap-

Demonstratur Planetas Solem circumire.

Tab. 14. fig. 4.

paret, adeoque ejus facies Solis luce illustrata, vel Terræ non obvertitur, ut in G, vel parva aliqua ejus pars à Terricolis conspicitur, ut in H. Unde necesse est ut inter Terram & Solem tunc temporis locetur. Semel quidem Venus visa est nigræ instar Maculæ Solis discum pertransire, quod unicum spectaculum nemini mortalium præter Horoxium nostrum contigit videre, Anno Christi 1639. nec iterum Stella Veneris subtercurret Solem usque ad annum 1761 Mensis Maji die 26 mane; quo tempore rursus in medio disci Solaris exspectanda erit. Præterea Veneris Stella nunquam à Sole digreditur ultra certum ac determinatum intervallum 43 circiter graduum, nec unquam Solis oppositionem attingit; sed neque ad quadratum aut sextilem aspectum pervenit, at tales aspectus necessario subiret, si circa terram periodum suam absolveret.

Similes quoque sunt & Mercurii motus.

Similiter Mercurius semper in viciniâ Solis commoratur, propius semper abest à Sole quam Venus, adeoque Veneris æmulus in orbita minore, intra Veneris orbitam conclusâ, & Solem ambiente necessario locandus erit. Præcipue vero cum eum Soli quam proximum esse, ostendit egregius illius splendor quo & Veneri cæterisque Planetis longe antecellit.

Martis orbita Solem ambit.

Mars cum veniat ad oppositionem Solis, ejus orbita complectitur terram. Sed & hoc necessarium est, ut amplectatur etiam Solem. Nam cùm venit ad conjunctionem cum Sole, si subter illum incederet, corniculatus appareret instar Veneris & Lunæ: Atqui semper ille rotundam speciem exhibet, nisi quod in quadrato cum Sole Aspectu, aliquantulum gibbosus apparet.

TAB. 14. *fig. 5.* *Et Terra non locatur in orbitæ centro.*

Referat S Solem, T Terram, circulus MNPR orbitam Martis. Patet Martem tam in M quàm in P Terricolis plena & rotunda facie splendere, quoniam in his positionibus facies Soli obversa Terræ quoque obvertitur, at in N & R paululum gibbosus apparebit. Præterea Mars Soli oppositus septies major videtur quam conjunctioni propinquus, adeoque in illo situ septies propius ad Terram accedit, quàm in conjunctione, ubi longissime à Terra distat. Hinc constat

ſtat non Terram, ſed Solem in centro orbitæ Martis locari, apparentiæ enim demonſtrant Terram longiſſime ab illo centro diſtare.

Eadem obſervantur Phænomena in Jove & Saturno.

Præterea cum eadem obſervantur Phænomena, in Jove & Saturno licet multo minore diſtantiarum diverſitate in Jove, quam in Marte, & adhuc minore in Saturno quam in Jove hos quoque Planetas in diverſis orbitis ultra Martis Sphæram circa Solem rotari neceſſe eſt. Præterea Planetæ omnes è Terrâ viſi, motus admodum inæquales, & irregulares peragere obſervantur, nam nunc progredi, nunc ſtare, mox regredi cernuntur. At qui è Sole illos conſpiceret, ſemper uniformi quadam legè unumquemque proprium circulum decurrere videbit.

Terra etiam in orbita circa Solem movetur.

Sol itaque, non Terra, in centro orbium Planetarum collocatur, Hanc enim demonſtravimus inter Veneris & Martis orbitas medium ſortiri locum, ſed & neceſſe erit, orbitis quieſcentibus, ut Terra quoque circa Solem moveatur, nam ſi immobilis conſiſteret, cum intra ambitum orbium quos ſuperiores Planetæ Mars, Jupiter, & Saturnus percurrunt, claudatur, nunquam illos ſtare, aut regredi, aſpiceret Terricola. Verum horum Planetarum ſtationes & regreſſus non minus quam progreſſus è Terra obſervantur; itaque Terram in medio partium mobilium, inter Veneris & Martis orbitas conſtitutam, circulum quoque reliquorum Planetarum ritu, circa Solem deſcribere concludendum eſt. Utque locus Terræ medius eſt inter Venerem & Martem; ita quoque periodus quâ curſum ſuum circa Solem perficit, media erit inter periodos Veneris & Martis. Venus enim octo menſibus; Terra ſpatio annuo, Mars biennio circuitus abſolvunt: His indubiis rationibus inducti, Tellurem in cælum inveximus, & inter Planetas poſuimus, Solemque ad centrum detruſimus. Atque ita ex indubitatis principiis, & invictis ratiociniis, verum Mundi ſyſtema, ordinem, ſitum, & motum corporum mundanorum declaravimus

Mira harmonia inter Planetarum à Sole diſtantias & eorum tempora periodica.

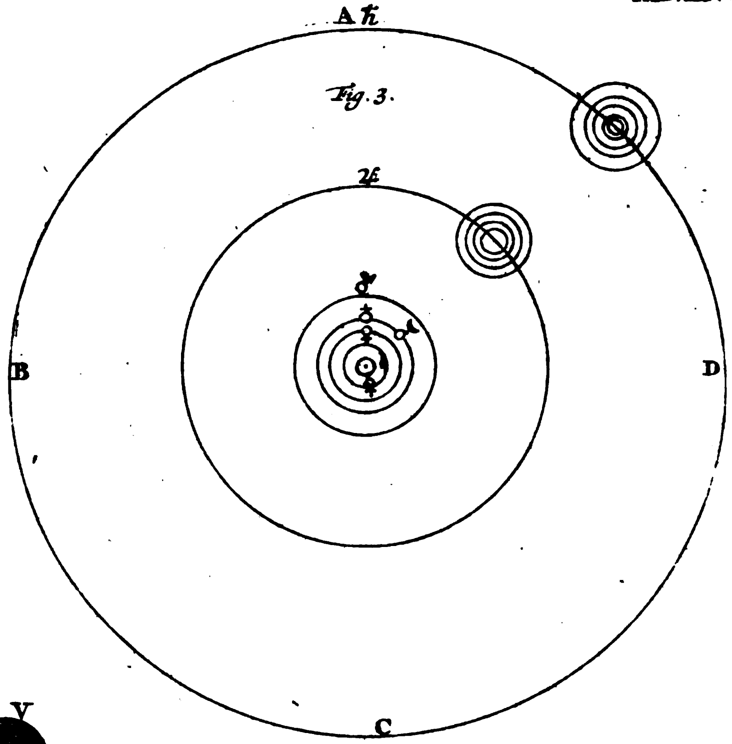
Comparatione factâ, miram quandam inter Planetarum Tempora, quibus circuitus ſuos circa Solem abſolvunt, & ipſorum à Sole diſtantias deprehendimus harmoniam, & Proportionem; nam quo quilibet Planeta Soli propior est, eo citius periodum absolvit, & celerius fertur, secundum datam & immutabilem legem, quam omnia corpora mundana constanter observant. Nempe *Quadrata Temporum Periodicorum sunt cubis distantiarum à Sole proportionalia.* Quod omnium primus detexit sagacissimus Keplerus in Planetis primariis. Postea deprehensum est Planetas omnes secundarios tam Saturnios quàm Joviales eandem quoque in motibus suis legem observare, eorum enim periodi ita temperantur, ut quadrata temporum periodicorum sint cubis distantiarum à centro Jovis, vel Saturni, proportionalia. Ita intimus Jovis Satelles distat à centro Jovis diametris Jovis 2 $\frac{5}{6}$ & periodum conficit horis 42. Extimus autem circulum proprium percurrit horis 402. Adeoque si fiat ut 1764 quadratum numeri 42 ad 161604 quadratum numeri 402 ita $\frac{4913}{216}$ cubus numeri 2 $\frac{5}{6}$ ad alium is erit $\frac{450091}{216}$ ex quo extracta Radice cubica dabitur $\frac{76}{6}$ = 12 $\frac{2}{3}$ qui numerus exprimet distantiam extimi satellitis Jovis, in diametris Jovis, talemque reverà esse ejus distantiam observationibus deprehensum est.

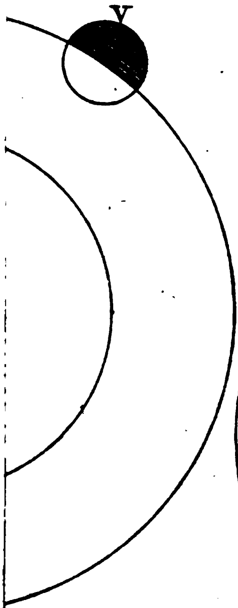
Hujus Regulæ causam Physicam Primus invenit Newtonus.

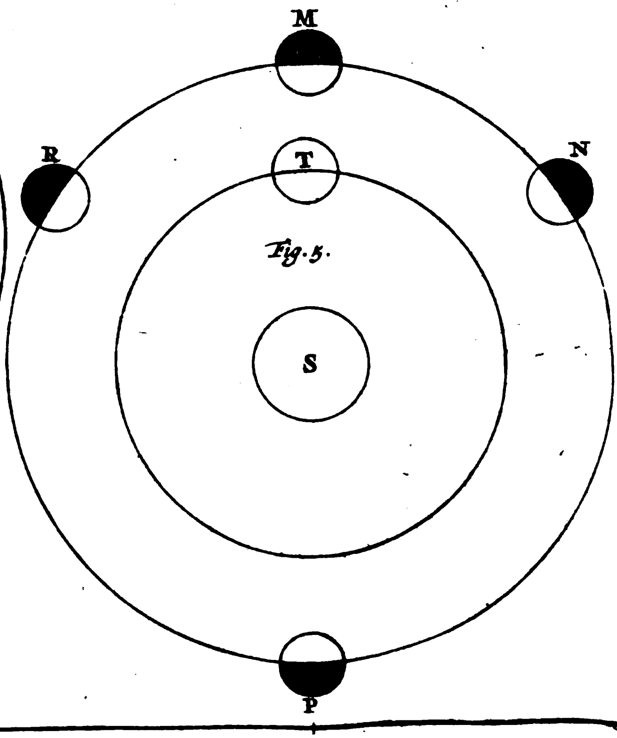
Hujus Regulæ causa Physica Keplerum latuit, qui solummodo eam invenit, comparando distantias Planetarum, cum ipsorum Periodis; at gloria illam à priore investigandi & illius causam ex necessitate Physica monstrandi, magno Neuwtono nostro reservata fuit, qui demonstravit salvis naturæ legibus, aliam regulam in mundo locum obtinere non posse: Quod nos quoque ostendemus cum de causis Physicis agendum erit.

Cum itaque omnes agnoscunt Astronomi, Legem superius traditam, constanter observari à quatuordecim corporibus mundanis, quorum plures circa commune centrum revolvuntur, nempe à quinque planetis primariis, & novem secundariis, & cum Luna circa Terram, tanquam centrum, gyros ducit; si Sol etiam circa ipsam, circulationem perficeret, congruum esset ut eadem Lex ipsorum motus regeret. Adeoque cum Luna diebus 27, Sol 365 diebus, circulos absolvunt, & Luna 60 semidiametris Terræ, à Terra removeatur, si fiat ut 729 quadratum numeri 27 ad 133225 qua-

TAB. XIV.







quadratum numeri 365, ita 216000 cubus numeri 60 ad alium, is erit 39460356 cujus Radix cubica est 340, & ille numerus distantiam Solis exhiberet, si modo in ejus motu locum obtineret eadem Regula qua reliqua omnia corpora mundana motus suos constanter temperant.

Verum omnes consentiunt Astronomi, & invictis rationibus demonstrari potest, Solem plusquam trigesies magis à Terra distare quam sunt 340 semidiametri Terrestres.

Ex quo liquet, si admittatur Solis motus circa Terram annuus, violari universalem jam traditam Naturæ legem, & concidere motuum proportiones, quæ ut integræ maneant, Terra in suo loco inter Planetas reponi debeat, Solemque cum iis circumire, quibus positis restituetur pulcherrima circulationum Harmonia, & sine omni exceptione, motuum ordo manebit immutabilis.

Sed non potest circa Terram moveri nisi tollatur motuum Harmonia.

Ut Planetarum omnium agnoscimus cognationem, similemque naturam, ex eo quod Telluris instar, sint corpora opaca, Sphærica, Solisque luce illustrata, circa quem etiam motibus omnino similibus continuo cientur; sic etiam cum Sol & reliqua omnia sidera propria luce splendeant, & sedibus suis immota conquiescant, simili ratione pro corporibus ejusdem naturæ haberi possunt. Quodque Sol præ reliquis omnibus stellis tantus Terricolis appareat, quodque tanta luce refulgeat, ut ejus præsentia omnes stellarum flammas splendore suo extinguat, in causa est quod Terra à reliquis omnibus sideribus immenso intervallo distans, in Solis viciniâ circa ipsum continuo gyrat. Nam qui fixam aliquam ex eodem intervallo, quo nos Solem aspiceret, se Solem nostro Soli per omnia similem intueri crederet; spectator etiam à Sole nostro æque remotus, ac nos ab aliqua fixâ, eum stellis annumeraret. Fixæ itaque omnes sunt Soles; estque Sol una ex fixis.

Sol & fixæ sunt corpora ejusdem naturæ.

Quamvis tanta sit Telluris à Sole distantia, ut ex hoc spectata Tellus, quasi ut minutum aliquod punctum videtur, ea tamen distantia, ad stellarum fixarum distantiam comparata, tam exigua habenda est, ut etiam si orbita in quâ diximus Terram circa Solem deferri è stellis fixis conspi-

Immensa est Fixarum distantia præ Terræ distantia à Sole.

ſpiciatur, ea etiam ut punctum apparebit angulusque ſub quo orbitæ diameter, ex fixâ videtur, tam exiguus eſt, ut ab Aſtronomis acutiſſimis vix obſervari hactenus potuit; certe qui in hoc angulo (quem paralaxim orbis annui dicunt) obſervando maxime invigilarunt, illum ſemper uno minuto primo minorem deprehenderunt, adeoque neceſſe eſt ut ſtellæ decies millies aut longius à nobis diſtent, quam nos à Sole diſtamus.

Hinc ſequitur, quod etiamſi Tellus ad aliquas ſtellas propius uno anni tempore accedat, quam in oppoſito, idque intervallo diametri orbitæ ſuæ, non tamen ſtellæ illæ majores apparebunt, neque ulla fiet apparentis intervalli inter duas quaſvis ſtellas ſenſibilis mutatio, propter diverſas ſpectatoris poſitiones.

Sint enim in Terrâ, duæ turres ſibi invicem propinquæ, à quibus tamen diſtet ſpectator ſpatio decem mille paſſuum, is ſi per unum tantum paſſum ſitum ſuum mutat, ad ipſas accedendo, tantillo ſpatio propius admotus, nec turres magnitudine auctas, nec à ſe invicem longius diſſitas conſpiciet. Itaque cum Tellus una anni tempeſtate tantum per decies milleſimam diſtantiæ ſuæ partem ad fixam aliquam accedit, quam aliâ; nulla tamen ſenſibilis orietur in ſtella, ſitûs aut magnitudinis reſpectu mutatio.

Angulus ſub quo Sol ex diſtantia fixarum apparet. Hinc etiam ſequitur quod ſi Sol tantum à nobis diſtaret, quantum proxima quævis fixa, angulus ſub quo videbitur, erit decies millies minor quam nunc eſt; cumque angulus ſub quo videtur Sol à Terricolis, ſit dimidii circiter gradus, ſeu triginta ſcrupulorum primorum, ex ſtellâ fixa ſpectatus Sol ſub angulo qui eſt milleſima pars trium ſcrupulorum hoc eſt ſub angulo decem circiter ſcrupulorum Tertiorum videbitur.

Objectio. Contra hanc poſitionem objiciunt aliqui; ſi tanta ſit fixarum diſtantia, oportet ut ſtellæ Solem noſtrum magnitudine multum ſuperent, nec minores poſſunt eſſe quam Sphæra, cujus diameter diametro orbitæ annuæ Telluris æqualis ſit; volunt enim ſtellas, ſaltem ordinis primi, ſub angulo non minore uno minuto videri: cumque orbitæ Telluris diameter

ter è fixis sub majori angulo non cernitur, stellarum diametri diametro orbitæ in qua fertur Tellus, magnitudine non cedunt. Cumque Sphæra illa cujus semidiameter distantiam Terræ à Sole adæquat, Solem nostrum centies centenis mille vicibus superat, toties quoque superabunt stellæ Solem nostrum, adeoque cum enorme intersit magnitudinis discrimen, non erunt Sol noster & Fixæ corpora cognata, neque proinde Sol pro fixâ habendus est.

Stellæ fixæ nullius magnitudinis sed ut mera puncta apparent.

Sed qui de magnitudine fixarum talia prædicant, multum falluntur, dùm tantas iis assignant diametros apparentes; eæ enim tam exiguæ apparent, si rite observentur, ut veluti puncta tantum lucentia sine visibili quâvis latitudine refulgeant; quo fit, ut observationibus nulla earum mensura deprehendi potest; cingit quidem flammea omnia corpora in tenebris visa irradiatio quædam seu capillitium, unde fit ut centies & pluribus vicibus majores conspiciuntur quam si sublato capillitio viderentur; multum autem minuitur capillitium, si per exiguum foramen aciculâ in charta factum conspiciantur, facilius vero & melius huic incommodo medetur, Telescopia adhibendo, quæ radios illos adventitios auferunt, & stellas, ut mera puncta lucentia spectandas præbent. At Telescopia quamvis multum augeant objectorum diametros, non tamen certas & definitas stellarum mensuras nobis exhibent, cum sidera ut lucida puncta, seu nullius magnitudinis per ea etiam visa appareant; Unde mirum est quod Ricciolus Syrii sive Canis majoris stellam posuit sub angulo 18″ videri. Nam si tantus Syrius nudo oculo appareret, per Telescopium visus, quod ducenties ampliat objecta quoad diametros, debet ille sub angulo 3600. scrupulorum secundorum seu angulo unius gradus videri; unde & ejus discus Solarem discum quater superare videbitur; cum tamen certum est Telescopium illud exhibere Syrium ut punctum tantum lucens, & stellâ Martis non majorem. Mars autem cum nobis proximus atque maximus adest, sub angulo 30 scrupulorum secundorum conspicitur. Unde diameter Syrii ducenties ampliata, non major erit 30 scrupulis secundis, adeoque angulus sub quo

Quod per Telescopium demonstratur.

nudo oculo apparere debet, non major erit ¼ unius scrupuli secundi, seu novem scrupulis tertiis: Hoc est Syrius Soli fere æqualis cernitur, si is tantum à nobis distaret quam Syrius. Mirum fortasse quibusdam videbitur, quod stellæ fixæ omnino conspiciantur, cum eorum diametri tantillos subtendunt ad oculum angulos. Sed flammea & ignita corpora ex maximis intervallis cerni possunt, iis scil. unde alia corpora æque exiguis angulis comprehensa, prorsus evanescunt. Quod comprobat candelæ flamma, quæ noctu ad distantiam duo millia passuum cernitur, cum tamen interdiu objectum opacum Solis luce illustratum, etiamsi decies & amplius flammam latitudine superat, ex ea distantia videri nequit. Lux enim quam ex se undique defundunt ignita corpora, vegetior multo est, fortiusque fibrillas Retinæ vellicat, quam ea quæ â corporibus opacis reflectitur, reflectionibus enim debilis redditur radiorum actio; & inde fit ut corpora lucida in species ampliores spargantur.

Fixæ sunt corpora ignea. Immota itaque cæli astra sunt corpora suâ naturâ ignea; instar Solis nostri, quæ huic nec magnitudini cedunt, nec multum superant, adeoque, pro totidem Solibus haberi possunt. *Fixæ sunt Soles.* Concipiendum porro est, Soles hos non in unâ eademque superficie hærere, sed per immensa mundi spatia, undique disseminari & longissimis intervallis à se invicem distare; ita ut tantùm inter duos quoslibet Soles proximos, interjaceat spatium quantum ad minimum inter Solem nostrum, & Syrium porrigitur. Hinc spectator qui alicui Soli propius adest, illum tantum ut Solem conspiciet, & reliquos omnes Soles ut micantia astra, in coelo seu firmamento proprio inhærentia videbit.

Porro non credibile est, Deum tot innumeros Soles in locis tam remotis solitarie locasse, & nulla juxta posuisse corpora quæ horum luce & calore foveantur; hoc certe sapientiæ divinæ minime congruum esse videtur; cum Deus nihil frustra creavit, sed contendum potius est, Solem unumquemque suo quoque Planetarum comitatu cingi, qui circa Soles hos, diversis periodis, ad diversas distantias, Lunis quoque suis stipati rotantur.

Quam

Quam admirabilis & magnifica hinc nobis oritur amplitudinis mundanæ Idea. Concipiendum enim est Indefinitum spatium mundanum, in quo innumerabiles locantur Soles, Solesque illi sunt stellæ quas vel nudo oculo, vel Telescopii ope detegimus; harum singuli propriis Planetis stipati totidem Mundos seu systemata constituunt. Et unusquisque Sol in proprio systemate idem munus obit, quod in hoc suo systemate Sol noster. *Idea amplitudinis Mundanæ.*

Hinc Mundus existet Divinæ Sapientiæ, Omnipotentiæ, & Bonitatis Theatrum, Gloriæque Immensæ, & Infinitæ Palatium.

LECTIO V.

De Maculis Solaribus, & Solis, & Planetarum, circa proprios Axes, vertigine, & de Stellis fixis.

OB maximam Telluris à Sole distantiam, Solis convexitas nostris oculis prorsus evanescit, nec mirum cum & Lunæ, quæ nobis multo propius adest, Sphærica superficies à sensibus non percipitur, & tam Lunæ quàm Solis orbes tanquam disci plani nobis appareant; quorum in medio punctum, quod reverà est in superficie centrum, seu centrum apparens, dicitur. Et si Solis facies æqualiter ubique luceret, ob uniformem ejus faciem quæ nullam varietatem oculo objiceret, poterit ille circa suum Axem rotari, & ejusmodi rotatio nobis non innotesceret; nunc vero cum in lucidissimo Solari disco, & purissimâ ejus flammâ, sæpe nigræ conspiciuntur maculæ ejus superficiei adhærentes, ex eorum motu nobis constat de Solis rotatione; nam hæ maculæ à margine Solis orientali, medium versus progredi cernuntur, deinde ulterius provectæ in opposita margine scil. occidentali margine occidere videntur. Et earum aliquæ postquam in oppositâ nobis Solis superficie per quatuordecim circiter dies delituerunt, in margine rursus oriri incipiunt. Circulus AGHD repræsentent Solarem superficiem nobis conspicuam; sæpe vidimus materias quasdam densas & obscuras nubibus circumterrestribus persimiles in margine A oriri, *Solis & Lunæ convexitas nostris oculis evanescet.* *In Solis superficie sunt maculæ.* *Sol circa axem suum vertitur.* *Tab. 15. fig. 1.*

 quæ

quæ paulatim verſus B repentes in medio tandem diſci conſpiciuntur, deinde per BC ad circumferentiam progredientes, poſt aliquam moram in D evaneſcunt.

Maculæ à puncto aliquo digreſſæ aliquando ad idem redeunt poſt 27 dies.

Aliquando macularum aliquæ, interjecto dierum viginti ſeptem circiter ſpatio, poſt digreſſum ab A rurſus in eodem puncto conſpiciuntur tantumque temporis per Solis ſuperficiem nobis averſam tranſcurrendo impendunt, quantum in obverſa Solis facie noſtro conſpectui ſubjiciuntur. Macularum motus in diſci peripheria A vel D tardiſſimus apparet, & verſus medium velocior: præterea earum figuræ, circa margines Solis arctiſſimæ, in medio latæ, & plena majeſtate ſeſe oſtendunt; & hæ apparentiæ reſpondent materiis quibuſdam denſis & obſcuris Solis ſuperficiei contiguis, & Solari vertigine abreptis. Quidam exiſtimaverunt maculas has non corpori Solari adhærere, ſed ab eodem aliquantulum diſtare, & circa Solem revolvi ad modum ſatellitum Jovis;

Maculæ in ſuperficie Solari exiſtunt.
TAB. 15. fig. 2.

ſed ii facile refelluntur, nam ſi maculæ in ſuperficie Solis non exiſterent, eadem macula non videretur per totum tempus ſemiperiodi in ſuperficie Solari. Sit enim Sol in A viſus ex Tellure B ſub angulo DBC 30. minutorum, ſi macula orbitam HEG extra Solis ſuperficiem percurreret, non videbitur Solis diſcum intrare, antequam ad E pervenerit, ubi recta BED ex terra ducta diſcumque tangens maculæ orbitam ſecat, & ductâ BCG Solem quoque tangere per Solis ſuperficiem tantummodo decurrere videtur, dum arcum EG deſcribit, qui arcus ſemiperipheriâ minor erit & tempore quod ſemiperiodo minus eſt percurretur. Sed ex obſervationibus conſtat maculas quæ integram revolutionem abſolvunt, (fuere enim nonnullæ, quæ duas aut tres periodos abſolverunt, ſingulas nempe viginti ſeptem dierum) illæ inquam $13\frac{1}{2}$. impendunt, ad hoc ut à limbo occidentali Solis ad limbum orientalem perveniant; adeoque cum dimidium periodi ſuæ tempus in tranſcurrendo Solis diſcum impendunt, ipſarum orbitæ in ipſa ſuperficie Solari extabunt.

Maculæ ſæpe diſſolvuntur ſæpe plures in unam confluunt.

Macularum plures in medio Solis diſco primo videri incipiunt, alias in eodem diſſolvi & evaneſcere cernimus; ſæ-

ſæpe plures in unum confluunt, ſæpius una in plures diffluit. Primus eas Teleſcopio ſuo detexit Galilæus, poſtea accuratius obſervavit Scheinerus qui magnum volumen de iis edidit, & tunc temporis plures quinquaginta in Sole viſæ ſunt. At ab anno 1653 uſque ad annum 1670. vix una aut altera viſa eſt, exinde ſæpe plures una conſpectæ ſunt, & nullâ conſtanti temporum lege apparent aut evaneſcunt.

Solem aliquando Pallidum per integrum annum apparuiſſe.

Narrant Hiſtorici Solem per integrum annum aliquando pallidum apparuiſſe, & ſine ſolito fulgore, calorem tenuem debilemque emiſiſſe, quod credibile eſt ex eo proveniſſe, quod plures ingentes maculæ non minimam Solaris ſuperficiei partem tunc temporis texerunt; & nunc aliquando videntur maculæ quæ non tantum *Aſiam*, aut *Africam*, ſed totius Telluris ſuperficiem latitudine ſuperat.

Axis Solis inclinatur ad planum Eclipticæ ſicuti Solis æquator.

Macularum motus eſt ab occidente in Orientem, & ex eo conſtat, Axem circa quem vertitur Sol non eſſe ad planum orbitæ Telluris perpendiculariter erectum, ſed ad illud inclinari, & facere cum Axe orbitæ qui per Solis centrum tranſit angulum ſeptem circiter graduum; & proinde Solis Æquator, ſeu circulus in medio inter duos polos, orbitæ planum ſecabit in linea recta quæ producta orbitæ ocurret in duobus punctis. Et cum Terra in hiſce duobus punctis invenitur, ſemitæ macularum rectæ lineæ apparebunt, cum ſcil. oculus ſpectatoris eſt in earum plano. At in alio quovis Telluris ſitu, cum ſcil. æquator Solaris ſupra oculum attollitur, aut infra illum deprimitur, veſtigia macularum erunt curvilineæ & Ellipſes.

In Planetis maculæ videntur.

Cum ſplendidiſſimum Solare corpus obſcuris maculis fœdatur, non cogitandum eſt corpora Planetarum opaca nævis carere; quibus eorum facies aſperguntur. Et reverà Jupiter Mars & Venus, ſi Teleſcopio ſpectentur, nobis maculas ſuas produnt, ex quarum motu conſtat has Planetas circa Axes rotari. Simili ſcil. argumento quo Solarem vertiginem probavimus. Venus ſcil. ſpatio 23 horarum gyrationem circa proprium Axem ab occidente in orientem perficit, Mars ſimilem rotationem horis 24 min. 40. abſolvit. Terra una die ab occidente in orientem etiam circa Axem

Planetæ circa axes ſuos rotantur.

 rota-

rotatur quod ex apparenti motu omnium Astrorum ab oriente in occidentem nobis constat.

In Jove præter maculas, plures sunt *fasciæ* sibi invicem parallelæ, at hæ neque eandem constantem magnitudinem, nec distantias conservant easdem, nunc crescunt, nunc diminuuntur, aliquando à se invicem longius discedunt, aliquando propius accedunt & plures unà cum maculis, subeunt mutationes. Anno 1665 D[nus] Cassini insignem detexit in Jove maculam, quam per duos annos observavit, Jovis corpori per totum illud tempus firmiter adhærentem, & ejus figura & positio *respectu Fasciarum* probe determinatæ fuere; evanuit tamen illa macula anno 1667, nec rursus usque ad annum 1672 visa fuit, post illud tempus per tres fere annos in conspectum assidue veniebat: sæpius deinde à nostris oculis se subduxit, & identidem se conspiciendam præbuit; & ut verbo dicam ab anno 1665 quo primo visa est, usque ad annum 1708 octies apparuit & evanuit. Ejus revolutionibus sæpius observatis D[nus] Cassini comperuit periodum Jovis circa proprium Axem esse horarum 9 minutorum 56.

Verisimile quidem est, quod Terra stabili magis & tranquillâ fruatur conditione quam Jupiter, in cujus facie majores cernuntur mutationes, quam Telluri obtingerent, si Oceanus alveo suo relicto per Terras undique se diffunderet, novas continentes, nova maria exhiberet, permutato invicem Soli Salique vultu.

Mercurius prope Solem continuo commorans, tantâque luce cum videtur, perfunditur cælum, ut observationes non admittat, quibus ejus maculæ dignoscantur, & Saturni maxima à nobis præ reliquis Planetis distantia macularum visum oculis adimit. Credibile tamen est illos, prædictorum instar, circa Axem quendam revolvi, nempe ut sæpius quam semel in unâ revolutione circa Solem, cujusque Planetæ pars quælibet radiis Solaribus exposita & iis rursus subducta, vicissitudines patiatur naturæ suæ congruas.

LE-

Lectio VI.

De Magnitudine & Ordine Fixarum, De Constellationibus, Stellarum Catalogis, & Mutationibus quæ fixis accidere visæ sunt.

QUod fixæ dispari inter se magnitudine appareant inde evenit, quod non omnes pari à nobis distent intervallo, sed quæ propius absunt reliquis tum magnitudine tum luce præcellere videntur; illæ interea quæ longius distant minore & mole & splendore conspiciuntur. Hinc oritur stellarum illa in classes distributio, quarum Classium Prima stellas primæ magnitudinis, 2^da^ secundæ, 3^tia^ tertiæ, & ita porro usque ad sextum stellarum ordinem, quæ minimæ sunt omnium, quæ nudis oculis videri queunt. Nam cæteræ stellæ, quas non nisi Telescopii ope detegimus, his classibus non continentur. Licet vero antiquum & vulgo receptum sit sex tantum esse fixarum classes & magnitudines, non tamen existimandum est unamquamque stellam ad harum aliquam præcise referri posse, quin potius tot constituendi sunt magnitudinum ordines, quot fere sunt stellæ, nam raro admodum duæ fixæ cernuntur ejusdem splendoris; & istarum stellarum, quas inter primas numerant Astronomi, apparet magnitudinis diversitas, clarior enim est Syrius, aut Arcturus, quam Aldebaram, aut Spica, omnes tamen magnitudinis primæ habentur; sunt quoque nonnullæ magnitudinis intermediæ, adeo ut alii hujus, alii illius æstimant, v. gr. Canicula quæ Tychoni est magnitudinis 2^dæ^ Ptolemeo fuit primæ, quod indicio esse potest, nec esse primæ, nec secundæ, sed ordinis intermedii. *Stellarum ordo.*

Verum stellas non tantum magnitudine suâ designant Astronomi, sed quo melius in ordinem referant, eas per situm & positionem ad se invicem distinguunt, & in Asterismos seu Constellationes distribuunt, plures stellas uni constellationi assignando, estque Constellatio plurium stellarum sibi juxta jacentium systema. Præterea ut stellas omnes facilius in cœlo notent & observent, constellationes ad formas animantium & rerum quarundam imagines reducunt. Pleras- *Constellationes.*

que

que has imagines ex fabulis, seu religione suâ in cælum transtulerunt veteres, & recentioribus Astronomis easdem retinere placuit; ut perturbationis periculum evitetur, cum observationes antiquæ cum nostris conferantur.

Distinctio stellarum in imagines longe antiquissima fuit, ipsi scil. Astronomiæ seu Philosophiæ cooeva. Nam in vetustissimo libro Job memorantur Orion, Arcturus atque Pleiades, & multa constellationum occurrunt nomina apud Homerum atque Hesiodum Poëtarum antiquissimos, necesse enim fuit sic ab initio stellas per partes distinguere, & ordine quodam designare.

Eadem cœli stellati facies ex omnibus Planetis spectatur.

Cum immensa admodum sit stellarum distantia, nihil refert in quo Solaris nostri systematis loco resideat spectator, sive is sit in ipso Sole, sive in Tellure, vel etiam in Saturno Planetarum extimo; ex omnibus enim nostri systematis partibus eadem videbitur cæli facies, eadem stellarum positio atque invariata magnitudo. Planeticolis omnibus eadem spectantur Astra; commune cælum est, idem eos omnes involvit mundus.

Cæli Regiones.

Cælum stellatum in tres Regiones partiuntur Astronomi, quarum media eas continet stellas, quæ circa plana orbitarum in quibus deferuntur planetæ jacent, & hoc cæli spatium Zodiaci nomine insignitur, ob constellationes ibi positas, & animalia referentes, & extra quod nunquam videntur vagari Planetæ. Zonam hanc ex utroque latere claudunt duæ reliquæ cæli regiones, quarum una comprehendit Borealem cæli plagam, altera Australem.

Veterum imagines XLVIII.

Veteres cælum ipsis visibile XLVIII. imaginibus distinxerunt, quarum duodecim Zodiacum occupant, ejusque *Dodecatemoriis* nomina imponunt sua, suntque Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Sagittarius, Capricornus, Aquarius, Pisces.

In septentrionali regione numerantur Imagines XXI. nempe Ursa minor, Ursa major, Draco, Cepheus, Bootes, Corona Septentrionalis, Hercules, Lyra, Cygnus, Cassiopeia, Perseus, Andromeda, Triangulum, Auriga, Pegasus, Equuleus, Delphin, Sagitta, Aquila, Serpentarius, &

& Serpens. Hisce postea adjectæ sunt constellationes Antinoi ex *informibus* prope Aquilam, & Comæ Berenices, ex informibus prope Caudam Leonis.

Ad Australem Zodiaci partem sunt Asterismi XV veteribus cogniti, nempe Cetus, Eridanus, Lepus, Orion, Canis major, Canis minor, Argo navis, Hydra, Crater, Corvus, Centaurus, Lupus, Ara, Corona australis, & Piscis Austrinus. Hisce nuper adduntur constellationes XII circa polum Austrinum, quæ nobis Borealem Telluris partem habitantibus, ob gibbositatem Terræ sunt inconspicuæ, scil. Phænix, Grus, Pavo, Indus, Apus, Triangulum Australe, Musca, Chamæleon, Piscis volans, Tauçan sive Anser Americanus, Hydrus, Xiphias sive Dorado.

Stellæ informes. Extra depictarum imaginum limites sunt stellæ quædam ad illas irreducibiles, quas ideo informes vocant; ex quibus insigniores Astronomi novos aliquando asterismos conficiunt.

Galaxia. Ad Asterismos etiam pertinet Galaxia, seu Via Lactea, quæ est circulus latus candore lactis perfusus, nonnunquam duplici tramite, plerumque simplici totum cælum ambiens. Hunc cæli tractum innumeris minutissimis stellis refertum esse, Telescopio suo deprehendit Galilæus; & quamvis singulæ stellæ nudo oculo sint imperceptibiles; conjunctis tamen luminibus eam cæli regionem illustrant, & candore suo perfundunt

Imaginum ope, uti diximus, stellas omnes distinguere & in cælo notare valuerunt vetustissimi Astronomi, & catalogos fixarum mirâ solertiâ & curâ exinde condiderunt; Hi catalogi recentiorum observationibus adaucti & correcti omnes continent stellas visu perceptibiles, imo plures in iis nunc notantur stellæ quæ non sine Telescopio videri possunt.

Hipparchus primus fixarum catalogum composuit. Hipparchus Rhodius annis circiter ante Christum natum 120. primus inter Græcos stellas fixas in Catalogum reduxit, *ausus* ex sententiâ Plinii (*rem etiam Deo improbam*) *annumerare posteris stellas, ac sidera ad normam expangere, organis excogitatis, per quæ singularum loca atque magnitudines* *signaret: Uti facile discerni posset ex eo, non modo an obirent nascerenturve stellæ, sed an omnino aliqua transirent moverenturve, item an crescerent, minuerenturque, cælo in hæreditate cunctis relicto, siquisquam qui rationem eam caperet inventus esset.*

Hipparchus ex propriis & antiquorum observationibus 1022 stellas in Catalogum retulit, & unicuique propriam latitudinem & longitudinem tunc temporis competentem adscripsit.

Ptolomeus Hipparchi catalogum quatuor stellis adauxit.

Ptolomeus Hipparchi Catalogum quatuor stellis adauxit 1026 numerando. Post Ptolomeum, Ulug Beighi magni Tamerlani Nepos sidera observavit & 1017 stellas catalogo suo intulit. Sæculo decimo sexto & sequente, plures Urania nacta fuit cultores, inter quos eminebant Regiomontanus & Copernicus. At omnium conatus superavit nobilissimus ille Astronomus Danicus Tycho Brahe, qui magna & exquisitâ arte facta instrumenta comparavit, quibus cœlum denuo lustraret. Is loca 777 fixarum propriis observationibus ex cælo deduxit, & in Catalogum retulit. Keplerus quidem in Tabulis suis Rodolphinis stellarum catalogum exhibet, quem Tychonicum vocat, in quo numerantur 1163 stellæ, at reliquas præter illas 777 à Tychone observatas, partim ex Ptolomeo, partim ex aliis diversis authoribus hausit, nihil enim Tycho in proprium catalogum retulit, quod non ipse suis instrumentis calculoque investigaverat.

Tycho Brahe 777 stellas observavit & in catalogum retulit.

Gulielmus Hassiæ princeps 400 stellas observavit.

Tychoni coævus Serenissimus Hassiæ Princeps Gulielmus sidera contemplari aggressus est, & cum Mathematicis suis Rothmanno & Byrgio, indefesso per 30 annos labore, 400 stellas observavit, & catalogo inclusit, adjunctis stellarum locis secundum longitudinem ex propriis observationibus computatis.

Ricciolus Catalogum edidit, sed paucas ipse observavit stellas.

Ricciolus Jesuita Kepleri catalogum 305 stellis locupletavit, & exinde earum numerus ad 1468 excrevit, sed hunc catalogum ex propriis observationibus haud construxit, sed tantum 101 stellas propriis instrumentis cum Socio Grimaldi observavit: & earum loca supputavit; reliquas ex Tychone, Keplero & aliis auctoribus deprompsit. Mirum est quod

quod Ricciolus plures stellas, quæ tempore Tychonis in oculos omnium incurrebant, quæque ab ipso Tychone rite sunt observatæ, tempore verò Riccioli plane evanuerunt, etiam adhuc, licet non amplius conspiciuntur, in catalogo suo retineat, quasi ipse illas observasset.

Bartschius in Globo suo quadrupedali, anno 1635 Argentorati in 4to edito meminit Bayerum in sua Uranometria 1725 stellas delineasse; gloriatur etiam quod ipse in suo Globo 1762 stellas designaverat, sed quis eas observavit, aut quo anno, non prodit.

Edmundus Hallejus primus rite observavit stellas ad polum Antarcticum sitas.

Stellas ad polum Antarcticum sitas, & nostræ Zonæ inconspicuas, primus rectè observavit Cl. meus Collega Edmundus Halley qui magno Sidereæ scientiæ amore percitus, longam & periculosam ad Insulam Stæ Helenæ suscepit navigationem, ut situs stellarum sub polo Antarctico nos latentium exquireret, edidit is Catalogum 373 Fixarum australium, quarum loca supputavit ad annum 1677.

Hevelius 1553 stellas observavit & catalogus ejus continet stellas 1888.

Illustris Joannes Hevelius Dantiscanus vir maxime Industrius & indefessus astrorum cultor, exquisitissimis instrumentis & omni apparatu Astronomico instructus, fixas majori quam antea curâ observavit, loca 1553 stellarum ex propriis observationibus supputavit, & novum omnino condidit stellarum catalogum, qui continet stellas 1888, nimirum 950 veteribus cognitas, & supra Horizontem Gedanensem conspicuas; 603 alias quas ante ipsum nemo rite debitis instrumentis determinavit, & 335 circa polum Antarcticum, & infra Horizontem Gedanensem semper depressas ex Catalogo Halleano transtulit.

Flamstedii Catalogus longe amplissimus.

At Catalogum longe amplissimum & correctissimum, brevi, ut spero, nobis dabit Joannes Flamstedius Astronomus Regius Greenovicensis, in hoc catalogo numerus stellarum ad 3000 excurrit. Et sicut Hevelius duplo plures stellas observavit quam Tycho, sic Astronomus noster Britannicus numerum stellarum ab ipso observatarum duplo auctiorem reddidit quam est numerus earum quæ ab Hevelio observatæ fuerunt. Tantum Urania hujus Astronomi debet laboribus, ut ne minima quævis conspicitur stella, cujus locus in cælis non melius innotescit, quam plurimarum urbium & civitatum situs & positiones, per quas quotidie itinera faciunt viatores. Non mirum est quod Astronomi tot pertinaces vigilias, tam Herculeos labores in stellis observandis sustinuerunt, cum non alio potuerunt modo investigare Planetarum vias, & orbitas in cœlo notare, nisi per cognita prius fixarum loca, quibus, tanquam columnis firmissimis, omnis innititur Astronomia.

Stellæ inermi oculo visibiles numero non multæ sunt.

Ex tribus millibus stellis à Flamstedio in catalogum relatis, plures sunt quæ non sine Telescopio videri possunt, adeoque non plures in hemisphærio visibili oculo inermi simul conspici possunt, quam mille. Mirum hoc plerisque videbitur, cum hyeme, illuni & serenâ nocte, primo intuitu innumerabiles videntur conspici stellæ. Sed apparentia illa est visus hallucinatio, ex vehemente stellarum micatione profecta, dum oculus confuse & sine ordine omnes simul intueatur; at qui distinctè ad singulas attendit spectator, nullas inveniet stellas, quæ ab Astronomis non notantur; Quod si quis Globum cælestem majoris formæ, qualis est Blavianus, adhibeat, eumque cum cælo comparet, quantumvis acri oculo cælum rimetur, non facile tamen stellam inveniet vel minimam, cujus imago in superficie istius Globi non depingitur.

Est tamen stellarum numerus immensus.

Interim fateor stellarum numerum esse immensum & tantum non infinitum, nam qui Telescopio cælum vult intueri, ingentem ubique fixarum multitudinem inveniet, quæ nudis oculis se minime produnt, præsertim in viâ Lacteâ tam confertim reperiuntur fixæ, ut illum cæli tractum singulæ licet imperceptibiles, luce sua, seu candore quodam perfundant.

Cl. Hookius Telescopium duodecim pedum versus Pleiades dirigens, (quæ olim septem sunt visæ, at nunc tantùm sex, inermi oculo visuntur,) septuaginta & octo stellas notavit, & longiora adhibens Telescopia longe plures diversæ admodum magnitudinis detexit: vide Micrographia pag. 241. Et *Antonius Maria de Rheita in Radio suo sidereomystico* pag. 197. affirmat à se per tubum opticum numerameratas fuisse in solâ constellatione Orionis stellas quasi bis mille.

Ex dictis in præcedenti Lectione constat, quam falsa & vana fuit veterum Philosophorum opinio, qui cælis nimium faventes quædam iis privilegia sine ratione indulserunt; eos quippe ab omni mutatione immunes statuebant; materiamque cæli à Terrestri specie diversam esse pronunciabant, hanc corruptibilem esse, & in varias formas mutabilem; illam non item, sed sub eadem formâ & facie semper permanentem nullique mutationi obnoxiam prædicabant. Vidimus in Sole atque Planetis quotidie nova corpora generari, rursusque corrumpi, & Planetarum facies varias mutationes subire. Nec solum in Terrâ nostrâ, aut in nostri systematis corporibus locum obtinent mutationes Verum longe ulterius porrigitur Generationis & corruptionis Principium; inter stellas enim immotas longissime à nobis dissitas dominatur & nullum corpus est quod ejus imperium non patitur. Perierunt enim stellæ plures à veteribus conspectæ, novæ renascuntur, ipsæ etiam aliquando perituræ. Quin etiam quorundam siderum extinguuntur flammæ, quæ post statam periodum rursus resplendescent. Inter stellas has maxime celebris est illa, quæ in collo Cæti videtur, quæ octo vel novem anni mensibus inconspicua, reliquis quatuor vel tribus mensibus variâ magnitudine se videndam præbet; hujus stellæ superficies corporibus opacis seu maculis maximâ parte tegi videtur, aliquâ tamen ejus portione lucidâ manente, quæ dum circa suum axem convolvitur, modo hanc, modo illam partem nobis obvertit, sed & hujus stellæ maculæ quasdam mutationes subire videntur; non enim singulis annis eandem obtinet stella magnitudinem, quandoque secundi ordinis fixas superat magnitudine, aliquando inter tertium ordinem vix consistere videtur; nec eodem semper temporis spatio sui copiam facit, nam sæpe non ultra tres menses continuos, sæpe etiam per quatuor integros & amplius conspicitur, neque æquis temporum intervallis incrementa sumit.

Materia cæli non est incorruptibilis.

Principium Generationis & corruptionis ad stellas fixas pertingit.

Stellæ quæ periodice apparent & evanescunt.

Præterea ex Astronomorum observationibus constat, sæpius

Stellæ novæ.

pius novas aliquas prius latentes emicuisse stellas, quæ per aliquod tempus insignes & maxime conspicuæ apparuere; sed deinde paulatim decrescentes, tandem evanuere quasi exstinctæ fuissent. Harum stellarum una ab Hipparcho Astronomorum principe notata & observata fuit, eumque impulit ut fixarum catalogum adornaret, posterisque traderet, ut ex eo facile discerni possit an obirent inciperentve stellæ.

Stella nova in Cassiopeia.

Post plura deinde sæcula, alia etiam nova Tychoni Braheo, ejusque temporis Astronomis, in constellatione Cassiopejæ apparuit; quæ non secus ac Hipparchea illa Tychonem admonuit, opus esse ut novum conderet stellarum Catalogum: visa est hæc stella circa Novembris medium Anno 1572; permansit eodem inter fixas loco, toto apparitionis tempore, quod per menses circiter sedecim duravit, tandemque paulatim extincta fuit; magnitudo ejus apparens Lyram aut Syrium inerrantium splendidissimas superabat, Veneris *Perigeæ* fere æmula, in meridie à non paucis visa est. Sed tandem sensim imminuta evanuit, nec ex eo tempore in cælis est conspicienda. Leovicius ex historiis istius temporis tradit anno 945 regnante Othone imperatore, stellam novam in Cassiopeja apparuisse, similem ei quæ suo tempore visa est anno 1572. aliud quoque adducit testimonium perantiquum, quod anno 1264. visa est in septentrionali cæli parte, circa constellationem Cassiopejam nova & maxima stella quæ nullum habebat motum proprium, credibile est hanc & supra memoratam quæ anno 945 apparuit eandem fuisse stellam cum eâ quæ a Tychone visa fuit.

Stella nova in pectore Cygni.

Anno 1600. & sequenti deprehendit Keplerus aliam novam stellam in pectore Cygni quæ multos annos ibidem perstitit, & Hevelio apparuit tertiæ magnitudinis; evanuit tamen anno 1660 indeque ad annum 1666 latuit, donec in mense Septembri eam denuo conspexit Hevelius nudo oculo, ut stellam sextæ magnitudinis, & quidem in eodem loco quo fuerit ab anno 1601 ad usque 1662.

Ex catalogis fixarum liquet plures stellas fuisse à veteribus & etiam à Tychone observatas quæ nunc non amplius

con

conſpiciuntur. Et ſpeciatim Pleiádes vulgo habentur numero ſeptem, at nunc in ſerena nocte, non plures quam ſex cerni poſſunt. Unde Ovidius lib. 3*tio* Faſtorum.

Quæ ſeptem dici, ſex tamen eſſe ſolent.

Clariſſimus Montanerus profeſſor Mathematum Bononiæ literis ad Societatem Regiam datis, Apr. 30. 1670. ſic ſcribit. *Deſunt in cælo duæ ſtellæ 2dæ magnitudinis in puppi navis, ejuſque tranſtris, Bayero β & γ prope canem majorem à me & aliis, occaſione præſertim Cometæ Anni* 1664 *obſervatæ & recognitæ; earum diſparitionem cui anno debeam non novi, hoc indubium eſt quod à die* 10. *Apr.* 1668. *ne veſtigium quidem illarum adeſſe amplius obſervo, cæteris circa eas etiam tertiæ & quartæ magnitudinis immotis, plura de aliarum ſtellarum mutationibus pluſquam centenis at non tanti ponderis notavi.*

Credibile eſt ſtellas has maculis, & corporibus opacis, penitus obſitas & obrutas fuiſſe; & lucem exinde omnem amiſiſſe, quarum proinde Planetarum cohortes tenui admodum reliquarum fixarum luce tantum illuſtrantur.

LECTIO VII.

De Motu Telluris annuo circa Solem & circa proprium Axem, & de Motu Apparente Solis & cæli inde orto

PErluſtratâ curſorie Univerſali Mundi materialis Fabricâ, traditiſque quæ de ſtellis fixis comperta habuimus, ad noſtrum Solare accedamus Syſtema, cujus partes omnes accuratiore intuitu ſunt contemplandæ, nam circa corporum in eo contentorum motus, motuumque phænomena præcipue verſatur noſtra Aſtronomia.

Et primo à Motu Terræ, domicilii noſtri, ſcil. à nobis ipſis convenit ut incipiamus, nam ex noſtro motu oritur motus Solis apparens, ſine quo reliquorum Planetarum phænomena, nec explicari, nec computari poſſunt. *Exordium à motu Terræ.*

Oſtenſum eſt in præcedentibus, Solem noſtri ſyſtematis corpus maximum & nobiliſſimum, ſuique generis unicum, cen- *Sed noſtri Syſtematis centrum occupat.*

centrum occupare, à quo ille undique diffundens radios; Planetarum corpora opaca luce suâ illustrat, & calore fovet, atque vivificat, circa hunc aguntur in orbem diversis periodis & distantiis Planetæ omnes, inter quos Tellus numeratur, quæ periodum absolvit spatio unius anni, & interea circa suum axem vertitur spatio viginti quatuor horarum. Cumque distantia Fixarum à Terra vel Sole sit admodum immensa, respectu distantiæ Terræ à Sole, eadem apparebit cæli stellati facies, idem manebit situs, atque ordo fixarum ad se invicem, sive è Sole, sive è Terrâ, aspiciantur astra. Sed cum corpora omnia longinqua ad cælum referantur, Spectator in Sole locatus, videbit Tellurem circulum in cæli stellati superficie maximum, inter fixas describere.

Tellus circa Solem movetur & interea circa suum Axem.

Idem stellarum aspectus è Sole qui est è Terrâ.

Motus Terræ è Sole spectatus.

TAB. 15. *fig.* 3.

Repræsentet S Solem, ABCD Telluris orbitam in quâ movetur Tellus ab Occidente in Orientem. scil. ab A per BCD. Spectator in S Terram in A positam ad stellam ♈ referet; cum Terra pervenerit in B, illam juxta stellam in ♋ aspiciet & cum ad C progressa fuerit in ♎ videbit, in D vero delatâ Tellure è Sole in ♑ eam spectabit. Et in A periodum perficiens rursus in ♈ videbit eam.

Hinc si planum orbitæ Telluris ad fixas usque protendatur, efficiet in superficie cæli sphærica concava, circulum quem inter fixas peragrare videbitur Tellus, quolibet anno. Circulus hic *Ecliptica* dicitur, & ab Astronomis in duodecim æquales partes, quæ signa appellantur dividitur; quarum unaquæque nomen sortitur à constellatione quæ tunc temporis, quando nomina imposita fuere juxta illam partem visa fuit. Partes illæ sunt *Aries* ♈, *Taurus* ♉, *Gemini* ♊, *Cancer* ♋, *Leo* ♌, *Virgo* ♍, *Libra* ♎, *Scorpio* ♏, *Sagittarius* ♐, *Capricornus* ♑, *Aquarius* ♒, *Pisces* ♓.

Ecliptica.

Eclipticæ partes duodecim.

Motus Solis apparens è Terrâ.

E Sole ad Terram transferatur spectator, & ponamus Terram in C locatam, è quâ Terricola Solem observet, is quoque Solem ad cælum referet, & cum Tellus est in orbitæ puncto C Sol in cælis videbitur in ♈. spectatorque ille motus annui particeps, Terræ partes omnes in eodem ad se invicem situ, & in eadem ab oculo distantiâ manere videbit; & proinde motum illum sensibus percipere non potest;

at

at Solem aſpiciens, cum ad D pervenerit Terra, Solem juxta ſtellam in ♋ videbit, & eum inter fixas locum mutaſſe deprehendet, & ab ♈ per ♉ & ♊ ad ♋ pertranſiſſe; ex D vero ad A progrediens Terra, Sol ex eâ conſpicietur ſigna ♋ ♌ & ♍ percurriſſe; & rurſus dum ſemicirculum ABC deſcribit Terra, Sol per ſex ſigna ♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓ in ſuperficie cæli ſphærica deferri videbitur. Terricola igitur Solem loco reverà immotum, eundem in cœlo circulum deſcribere videbit, quem ſpectator in Sole Terram deprehendet percurrere.

Hinc oritur motus ille apparens Solis verſus ſtellas orientaliores. Ut ſi ſtella obſervetur prope Eclipticam, una cum Sole oriri; aliquod interjectis diebus, Sol magis verſus orientem promotus videbitur, & ſtella ante Solem orietur, citiuſque occidet; ſic etiam quæ nunc poſt Solis occaſum videtur ſtella, in Ecliptica notabili ſatis intervallo à Sole diſtans, poſt aliquod interjectum tempus, unà cum Sole occidet, nec amplius noctu conſpicietur: Hunc motum motui diurno contrarium, realem eſſe & Soli revera competentem ſtatuebant Ptolomei ſectatores; at illum apparentem tantum eſſe, & ex motu Terræ ortum hic oſtenſum eſt.

Similes Solis motus è reliquis Planetis ſpectantur.

Similes quoque motus reliquorum Planetarum Incolæ in Sole obſervabunt, & unuſquiſque Planeticola Solem circa ſe eundem circulum inter fixas, & eodem tempore, deſcribentem aſpiciet, quem idem Planeta, è Sole Spectatus, in cælo deſcribere videtur, v. gr. Jovis Incola obſervabit Solem circa Jovem in orbem agi, & circulum diverſum quidem à noſtra Ecliptica, & per diverſas ſtellas tranſeuntem percurrere, ſpatio duodecim annorum.

Eadem ratione & ob ſimiles cauſas, Sol videbitur ex Saturno alium diverſum circulum circa ipſum abſolvere, ſpatio triginta annorum, qui tempus periodicum Saturni complent. Cumque impoſſibile ſit, ut omnes hi motus ſimul ſint in Sole, nec ratio excogitari poteſt, cur unus eorum potius quam reliqui Soli tribuatur; dicendum eſt, omnes eſſe tantum apparentes & ex veris motibus Planetarum ortos.

Gyratio Terræ circa suum Axem. Telluris Poli.

Præter motum hunc Circulationis annuum, Terra etiam circa suum Axem rotatur, ab occidente in orientem, & puncta illa duo in quibus Telluris Axis ejus superficiei occurrit, Telluris Poli dicuntur; & si Axis utrinque ad cælum producatur, signabit quoque in cælo duo puncta, qui poli cælestes nominantur: unumquodque autem punctum in Telluris superficie, polis exceptis, ex hujus rotationis natura, describet circumferentiam circuli majorem vel minorem, prout punctum signatum plus minusve fuerit à polis remotum & poli erunt soli loci in superficie Telluris, omnis rotationis expertes. Locus autem ille qui designatur à puncto, æqualiter ab utroque polo remoto, maximum circulum describit, & is Telluris *Æquator* seu *circulus Æquinoctialis* dicitur; reliqui circuli minores paralleli appellantur.

Telluris Æquator & Paralleli.

Horizon circulus.

Porro si per punctum, in quo insistit spectator, duci intelligatur planum Tellurem tangens, ad cælum usque protensum, hoc planum in duas partes cælum dividet, & circulum in illo efficiet qui *Horizon* dicitur, cæli partem conspicuam & visu patentem, ab illa infra depressam, & propter Telluris opacitatem, latentem distinguens. Hic Horizon est proprie Horizon sensibilis, à quo differt rationalis qui transit per centrum Terræ, sensibili parallelus. Hi duo circuli in cælo coincidere censendi sunt, evanescente in tanta distantia ipsorum intervallo, seu Telluris semidiametro.

Sensibilis.

Rationalis TAB. 15. *fig.* 4.

Rotatio Terræ efficit motum diurnum apparentem cæli ab oriente in occidentem

Cum Terra circa suum Axem rotetur, huic insistentem spectatorem unà cum horizonte suo simul in eandem plagam (scil. Orientem) rotari necesse est, unde versus ortum posita prius inconspicua, retegentur, propter Horizontem infra illa subsidentem, & alia versus occasum abscondentur, Horizonte supra illa elevato; & ideo spectator illa supra Horizontem ascendere sive oriri videbit, hæc infra eundem descendere; unde & Plagis istis, talia nomina sunt imposita. Hinc provenit motus ille apparens omnium corporum mundanorum, Terræ non adhærentium; quo cælum omne sidereum & unumquodque in eo punctum præter Polos circa Axem Telluris ad cælum productum ab oriente in occidentem rapi, & circulos describere videntur, majores aut mi-

minores, pro majore aut minore ipsorum distantia à polis, qui soli ut puncta immota spectantur.

Licet superficiei Terrestris locus quilibet à qualibet stellâ *Quando fit dies.* supra Horizontem conspicuâ illuminetur, illustratio tamen à Sole facta, tanta est, ut Sol præsentiâ suâ reliquas omnes stellarum flammas extinguat, & diem efficiat; absentia autem Solis, ubi is infra horizontem deprimitur, vel quod verius est, ubi Horizon supra illum attollitur, noctem efficit. *Quando nox.* Cumque Terra figuram Sphæricam & substantiam opacam obtineat, & à Sole secundum medietatem superficiei suæ illuminetur, alterâ medietate tenebris opertâ manente; circulus ille in Terrâ maximus illuminatam Terræ faciem à tenebrosa distinguens, *lucis & Umbræ Terminator* dici potest, *Circulus Lucis & umbræ Terminator.* ejusque planum erit ad rectam jungentem centra Solis & Telluris normale.

Si Telluris Axis ad planum Eclipticæ esset normalis, *Telluris Axis non est ad planum Eclipticæ normalis.* coincideret æquatoris planum cum plano Eclipticæ, & circulus lucis Terminator in eo casu semper per polos transiret, & æquatorem omnesque ejus parallelos in partes æquales secaret; adeoque in eo casu astra omnia unà cum Sole tantundem temporis supra Horizontem fierent conspicua, quantum infra eum depressa laterent, diesque noctibus per totum Terrarum orbem perpetuo forent æquales. Verum Axis Terræ non est ad Eclipticæ planum perpendiculariter erectus, sed ad illud inclinatur angulo $66\frac{1}{2}$ graduum; nec proinde coincidet planum Æquatoris cum plano Eclipticæ.

Et si planum æquatoris ad cælum usque protendatur, efficiet in cælo circulum, qui Æquator seu Æquinoctialis cælestis nominatur, & hi duo circuli, Æquinoctialis nimirum & Ecliptica angulum constituunt $23\frac{1}{2}$ graduum.

Ita verò in suâ orbitâ progreditur Tellus, ut Axem suum retineat sibi semper parallelum; hoc est, si ducatur linea quævis, axi in quovis ejus situ parallela, Axis ille in omnibus aliis orbitæ suæ punctis eidem lineæ parallelus manebit: nec unquam directionem variabit, sed versus eandem mundi plagam continuò dirigetur. Atque hoc necessario fiet, ſi Terra nullo alio motu præter progreſſivum in orbita propria, & rotatione circa Axem ciatur. Sit enim corpus cujus centrum in linea AB feratur, & in A notetur quælibet diameter CD, utcumque ad lineam AB inclinata, ſi corpus nullum alium præter progreſſivum motum habeat, cum ad B pervenerit Diameter C D in ſitu *c d* priori C D parallelo invenietur, quod ſi eidem corpori circa Axem C D rotatio imprimatur, omnes ejuſdem corporis diametri præter Axem, ſitus ſuos conſtanter mutabunt. At Axis per rotationem illam è ſtatu ſuo non turbabitur, adeoque parallelus, ut prius ſibi ſemper manebit.

Tab. 15. fig. 5.

Hinc conſtat non opus eſſe, ut tertius quidam motus Terram exerceat, quo parallelismum Axis ſui conſervaret, ut quidam ſomniarunt: ad hoc enim nihil aliud requiritur, quàm ut ſoli prædicti duo motus Terræ imprimantur, nam ſi tertius nullus eidem inſit, Axis neceſſario erit perpetuo eidem rectæ parallelus, cui ſemel parallelus erat.

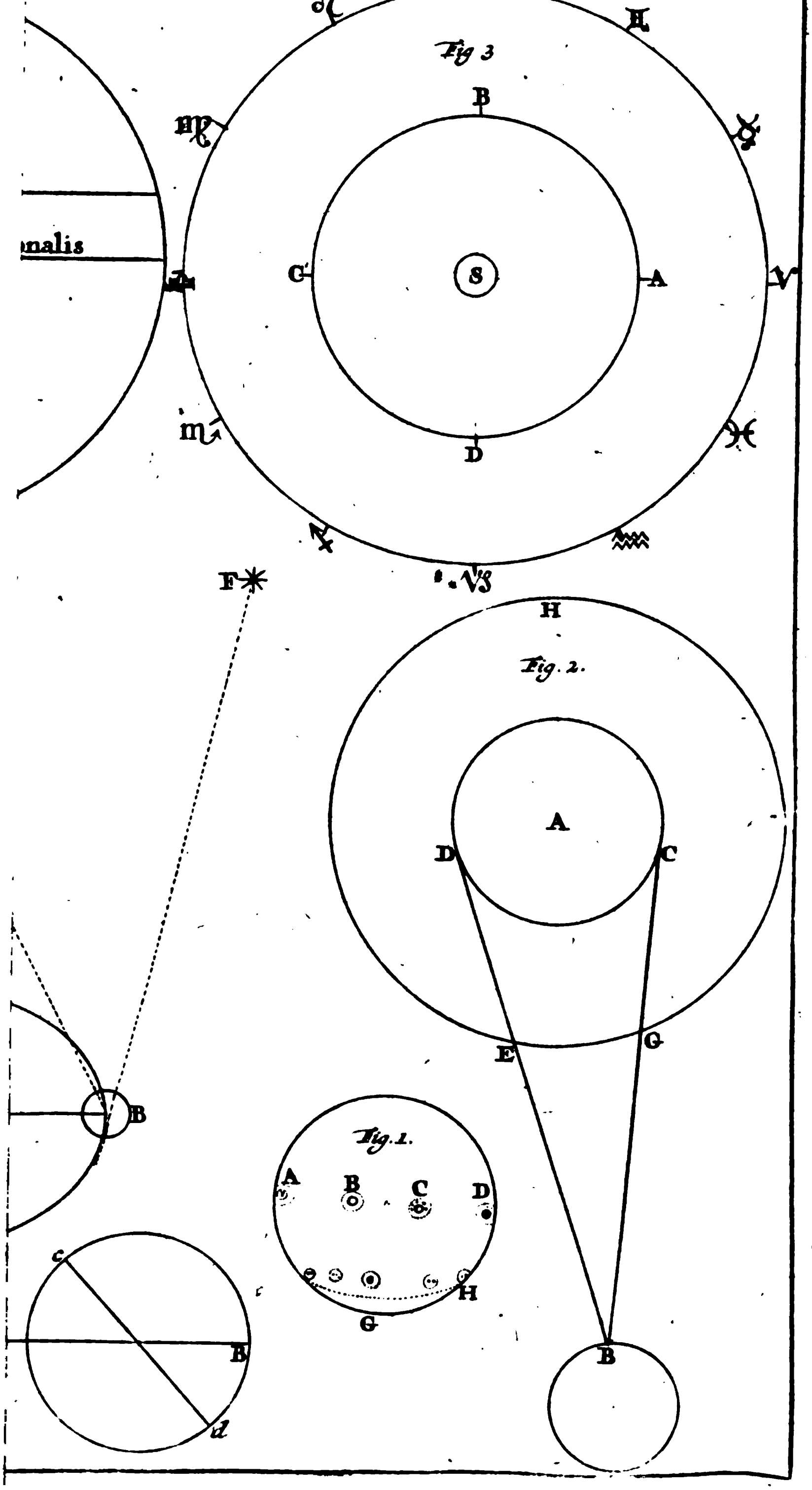
Cum planum Æquatoris non coincidat cum plano Eclipticæ, hæc duo plana ſe mutuo in rectâ lineâ ſecabunt, & communis eorum ſectio ſibi ſemper parallela manebit; ob eandem ſcil. cauſam, quâ Axis Terræ parallelismum conſervare oſtenſus eſt. Sectio itaque illa ad duo oppoſita Eclipticæ puncta ſemper dirigitur eaſdemque ſemper Univerſi partes reſpicit.

Et circulus in cælo maximus per Polum Æquatoris & communem illam interſectionem tranſiens dicitur *Colurus æquinoctiorum*; ſicut alter, húnc ad rectos angulos in polo ſecans, dicitur *Colurus Solſtitiorum*; qui tranſit per puncta, ubi Ecliptica ab æquatore maxime diſtat, & tam æquatorem quam Eclipticam ad rectos angulos ſecat, adeoque per utriuſque circuli polum tranſit. Quatuor puncta, in quibus hi duo coluri Eclipticæ occurrunt, *Puncta Cardinalia* appellantur, quod Sole in iis exiſtente, quatuor anni Cardines ſeu tempeſtates determinant. Et duæ interſectiones coluri Æquinoctiorum cum Ecliptica dicuntur puncta Æquinoctialia, aliæ duæ in quibus colurus Solſtitiorum occurrit Eclipticæ, dicuntur puncta Solſtitialia.

Colurus æquinoctiorum. Colurus Solſtitiorum.

Aſpi-

TAB. XV.



Aspiciat jam ex obliquo oculus orbitam Terræ, cujus repræsentatio secundum leges Artis perspectivæ erit figura Ovalis seu Ellipsis, in quâ medium tenet Sol S, per Solis centrum ducatur recta ♈ S ♎ communi Sectioni æquatoris & Eclipticæ parallela, Eclipticæ in duobus punctis ♈ & ♎ occurrens; & cum Tellus in utrovis horum punctorum invenitur, recta illa ♈ ♎ quæ Solis & Terræ centra conjungit cum communi planorum sectione coincidit, eritque perpendicularis ad Axem Terræ, utpote est in plano æquatoris, sed & eadem recta est perpendicularis ad Planum circuli terminatoris lucis & umbræ; adeoque Terræ Axis, erit in plano ejusdem circuli & circulus terminator per polos Terræ transibit, & æquatoris parallelos omnes in partes æquales secabit. Terra igitur *Initium* ♎ tenente, Sol videbitur in ♈ communi sectione plani æquatoris cum plano Eclipticæ, adeoque videbitur in circulo æquinoctiali cælesti, neque declinabit ad polum Boreum aut Austrium sed inter utrumque medius æquinoctialem circulum motu diurno apparente describet, & in hoc situ illustratio Terræ à Sole facta ad utrumque polum A & B pertinget, & parallelos omnes, uti dictum est, æqualiter dividet, locusque Terræ quilibet qui motu diurno æqualiter circumvectus parallelum describit, tamdiu in tenebris quam in luce manebit, hoc est, per totum Terrarum orbem dies noctibus æquantur. Unde circulus quem illo die Sol describere videtur, æquinoctialis nomen est adeptus.

Tab 6. fig. 1.

Apparentiæ cum Terra est in ♎ & Sol videtur in ♈.

Terrâ motu annuo paulatim versus ♏ ♐ ad ♑ delatâ, sectio planorum æquatoris & Eclipticæ sibi semper parallela manens non amplius versus Solem dirigitur, sed in ♑ facit cum linea S P jungente Solis & Terræ centra angulum rectum. Cumque linea illa S P non sit in æquatoris, sed in Eclipticæ plano, Angulus BPS, quem cum eo facit Axis Terræ non erit rectus sed acutus $66\frac{1}{2}$ graduum æqualis, scil. inclinationi Axis Terræ ad Planum Eclipticæ. Fiat angulus SPL rectus, & circulus lucis Terminator per punctum L transibit, & arcus BL, seu angulus BPL, erit $23\frac{1}{2}$ graduum, æqualis scil. complemento anguli BPS ad rectum. Fiat angulus BPE rectus, & recta PE erit in æquatoris plano, unde ob arcum BE æqualem arcui LT, æquali quadranti, erit ablato communi BT, arcus TE æqualis

Apparentiæ cum Terra est in ♑ & Sol videtur in ♋ scil. puncto Solstitiali æstivo.

LB, æqualis 23½ gradibus. Fiat EM æqualis ET, & deſcribantur per T&M paralleli æquatoris duo MN, TC. Hic dicitur *Tropicus Cancri* ♋, ille *Tropicus Capricorni* ♑, & Terrâ in hoc ſitu exiſtente, Sol ſuper punctum Terræ T perpendiculariter eminet; ubi maxime ad Boream ad æquatore declinat, & circulus, quem tunc temporis motu diurno deſcribere videbitur, ſuper circulum TC directe eminet & proinde Tropicus ♋ cæleſtis dicitur. Et propter revolutionem diurnam circa Axem ſtabilem omnia paralleli TC puncta per idem punctum T tranſibunt, & Soli directe obvertentur, tunc Sol in meridie fiet verticalis omnibus habitatoribus paralleli TC. Dumque Tellus hanc poſitionem obtinet, manifeſtum eſt, circulum lucis terminatorem ultra Polum Borealem B pertingere in L, & citra Auſtrinum A deſinere in F; Per L & F deſcribantur circuli æquatori paralleli, circuli illi *Polares* dicuntur, ille *Arcticus* hic *Antarcticus:* & Telluris Tractus polari Arctico KL incluſus, non obſtanti revolutione diurna, continua in luce verſabitur perpetuoque die fruetur; è contrario, quæ circulo Antarctico concluditur Terræ portio, continuis tenebris & nocte involvetur. Patet porro, cujuſlibet circuli æquatori paralleli, inter hunc & polarem Arcticum interjecti, partem majorem in luce verſari, cujuſvis autem qui æquatorem & polarem Antarcticum interjacet, partem majorem tenebris obvolvi, & quidem partes illæ majores erunt aut minores, prout circuli ab æquatore magis minuſve diſtant. Itaque in illo Telluris ſitu, cum Sol in ♋ apparet, Borealis hemiſphærii incolis longiſſimi fiunt dies, noctes breviſſimæ, adeoque illis erit æſtas. Auſtralis autem Hemiſphærii incolæ noctes habebunt longiſſimas, dies breviſſimos, & Hyemis frigora ſentient.

Tropici duo.

Circuli Polares.

Quibus dies ſunt longiſſimi Quibus breviſſimi.

Et quidem cujuſque loci longiores erunt dies longiſſimi; & breviores noctes breviſſimæ, prout locus ille ab æquatore remotior eſt. Vidimus etiam ex omnibus parallelis ſolum æquatorem circulum utpote maximum, ſecari in partes æquales à terminatore lucis, adeoque incolæ, qui in æquatore degunt, ſoli habebunt per totum annum dies noctibus æquales.

Pro-

Procedente Terra à ♑ per ♒♓ ad ♈, quo tempore Sol signa ♋ ♌ & ♍ peragrare videtur, Sol paulatim versus æquatorem revertitur, & cum ad ♈ pervenerit Terra, Sol videtur in ♎ ubi communis interſectio æquatoris & Eclipticæ ſibi parallela manens per Solem tranſibit, & Sol in Æquatore cæleſti conſpicietur, ubi rurſus dies noctibus æquales efficiet, pari modo quo factum eſt dum Terra erat in ♎, & in eo denuo ſitu circulus lucis terminator per polos tranſibit, adeo ut polo B quo Tellus ♎ reliquit, nimirum per ſemeſtre ſpatium perpetua fuit dies, quippe qui in luce verſabatur, ſicut A polus ſemeſtri premebatur noctu.

Apparentiæ cum Sol videtur in ♎ puncto æquinoctiali Autumnali.

Terrâ porro per ſigna ♈ ♉ & ♊ motâ Sol interim per ♎ ♏ & ♐ apparenter incedens paulatim ab æquatore verſus auſtrum declinare videbitur, & Terra reverà in ♋ exiſtente Sol inter fixas in ♑ videbitur. Et cum Axis BA non mutaverit inclinationem, ſed ſibi parallelus, manſerit, aſpectum & poſitionem reſpectu Solis, Terra habebit, omnino ſimilem ei, quem obtinebat dum ♑ occupabat. Sed cum hâc differentiâ, quod cum circulus KL, dum Terra ♑ tenebat, una cum tractu Terræ intus contento totus fuit in luce, jam Terra in ♋ exiſtente totus tenebris tegitur. Et oppoſitus FG jam totus eſt in luce qui prius tenebris fuit involutus.

Apparentiæ quando Sol videtur in ♑ puncto Solſtitiali Hyberno.

Ex parallelis inter æquatorem & polum B, arcus illuminati ſeu diurni minores ſunt tenebroſis ſeu nocturnis, cujus contrarium prius acciderat; ex alteris verſus polum A jacentibus parallelis, arcus diurni jam ſunt majores nocturnis, cujus oppoſitum accidebat in priori Terræ poſitione. Sol quoque verticalis factus erit Tropici MN habitatoribus, & deſcendet verſus auſtrum à parallelo TC ad parallelum MN per arcum CQN 47 graduum. Hinc Sol in quolibet ultra tropicos verſus alterutrum polum loco altius obſervabitur in meridiano, ſeu propius ad verticem accedit per 47 integros gradus una anni tempeſtate quam in oppoſitâ, atque hæc omnis mutatio non proficiſcitur ex eo, quod Terra deprimitur aut elevatur, ſed contra ex eo quod nuſquam deprimitur, nuſquam elevatur; ſed eundem ſemper retinet ſitum

Sol propius accedit ad verticem habitatoribus ultra Tropicos per 47. integros gradus unâ anni tempeſtate quàm aliâ.

&

& ſtatum reſpectu Univerſi, Solem tantummodo circumiens, qui poſitus eſt in medio fere iſtius orbitæ quem deſcribit Terræ centrum motu annuo.

Quomodo hæc omnia oculis repræſententur.

Hæc omnia oculis fient manifeſta, ſi in loco obſcuro accendatur candela, quæ Solem repræſentet, & Globus comparetur, cujus diametet ſit duorum aut trium digitorum in quo ſignentur poli, æquator, ejuſque paralleli aliquot, & meridiani; deinde ita teneatur Globus, ut ejus Axis non fiat ad Horizontem (qui hic loci Eclipticæ planum refert) perpendicularis, ſed ad illum aliquantulum inclinatus; deinde primò in eo ſitu ponatur Globus, ut Polorum unus plagam cæli Boream reſpiciat & lumen candelæ ad utrumque Polum exacte pertingat, hoc eſt circulus lucis & Umbræ terminator per Polos tranſeat; & probe notetur Axis poſitio, ſeu plaga mundi ad quam dirigitur; tandem circa candelam in circulo horizonti parallelo, ita feratur Globus, ut Axis ejus eandem plagam ſcil. boream ſemper reſpiciat; & tunc videre licebit flammam candelæ eodem prorſus modo illuminare Globum, Polos, æquatorem ejuſque parallelos, quo Terra à Sole reverà illuſtratur, & eadem prorſus conſpicientur Phænomena, quæ prius de Sole & Terra declaravimus.

Phænomenis ex vertigine Terræ ortis, ſimilia obſervari poſſunt ex alio quovis Planeta circa Axem ratato. *v. gr.* cum Jupiter circa Axem ſuum vertitur ſpatio decem horarum; Jovis incola videbit cælum omne ſidereum & Terram noſtram una cum Sole circa ipſum eodem tempore motu rapidiſſimo revolvi. At cum Jovis Axis ad planum ſuæ orbitæ ſit normalis, circulus lucis Terminator ſemper & ubique per polos tranſibit, unde in Jove dies noctibus ſunt perpetuò æquales, & Jovis incola uniformem per totam periodum ſentiet temperiem, nec æſtatis calores aut Hyemis frigora pertimeſcet.

Si per Telluris, Soliſve centrum (perinde enim eſt, cum hæc duo puncta è cælo ſtellato ſpectata coincidere videntur) erigatur recta ad planum Eclipticæ perpendicularis, & ad cælum uſque producatur; dicitur hæc linea *Axis Eclipticæ*, punctumque quod in cælo offendit erit *Eclipticæ Polus.*

Axis Eclipticæ. Polus Eclipticæ.

Quod

Quod ſi per hunc Polum, & quaſlibet ſtellas, traducantur circuli maximi, erunt ex natura ſphæræ omnes ad Eclipticam perpendiculares. Et ſecundarii Eclipticæ ſeu Latitudinum circuli nominantur. Et Arcus ejuſmodi circuli inter ſtellam quamvis & Eclipticam interceptus, dicitur iſtius ſtellæ Latitudo, ſeu diſtantia ab Ecliptica. Sicut Arcus Eclipticæ inter initium ♈ & ejus interſectionem cum Secundario per ſtellam tranſeunte dicitur Longitudo ſtellæ.

Secundarii Eclipticæ. *Stellæ Latitudo.* *Longitudo ſtellæ.*

Similiter ſi per polum Telluris ſeu Æquatoris & quælibet loca in ſuperficie Telluris traducantur circuli, erunt omnes ad Æquatorem perpendiculares, & ſecundarii Æquatoris nominantur; Locorum verò reſpectu Meridiani dicuntur, quia cum Sol in Plano alicujus Meridiani videtur, incolis ſub illo Meridiano degentibus fit Meridies. Arcus ſecundarii inter locum quemlibet & Æquatorem interceptus dicitur *loci Latitudo* quæ eſt diſtantia ejus ab Æquatore. Et arcus Æquatoris interceptus inter ſectionem ejus cum Æquatore, & punctum aliquod in Æquatore fixum dicitur loci Longitudo.

Loci latitudo. *Loci longitudo.*

LECTIO VIII.

De Variis aliis Phænomenis ex motu Terræ Pendentibus.

Cum Terra circa Solem ita feratur, ut ejus Axis ſibi ſemper parallelus maneat, neceſſe erit ut Axis ille diverſis anni temporibus, ad diverſas fixas dirigatur; & ſtella ſeu punctum cæli quod directè ſupra Polum terreſtrem imminet in æſtate, in hyeme non directè eidem Polo incumbet; ſed punctum, cui hyeme dirigitur Axis, à priore diſtabit intervallo diametri orbitæ Terræ.

Terræ Axis debet ad diverſas Fixas diverſis anni temporibus dirigi.

Sit enim ACBD orbita Terræ, in cujus centro ſit Sol S, cum Terra eſt in A, axis ejus dirigitur ad ſtellam E, quæ directè ſupra Polum imminet, at cum ad oppoſitum orbitæ punctum B pervenerit Terra, Axis in poſitione priori parallela, non ad E dirigitur ſed ad aliam ſtellam F, quæ duæ fixæ diſtabunt à ſe invicem intervallo æquali AB diametro orbitæ Telluris, Angularis autem ſeu obſervabilis ſtel-

TAB. 15. fig. 6.

larum distantia erit angulus E B F, cui æqualis est angulus A E B per 29. El. 1. qui est angulus sub quo videtur diameter orbitæ quam orbem Magnum appellant Astronomi, è Fixa E conspecta. Angulus ille EBF vel AEB *Parallaxis orbis magni* dicitur; & si is observari poterit, daretur fixæ E distantia à Terra, respectu Solis distantiæ ab eadem. Nam in triangulo E A B datur angulus E, æqualis E B F observatione scil. noto; datur etiam angulus E A B, qui in æquinoctiis est rectus, in Solstitiis autem est æqualis inclinationi Axis Terræ ad planum Eclipticæ, & universaliter est ubique æqualis complemento declinationis Solis. Unde dabuntur omnes anguli & latus AB, & proinde per Trigonometriam innotescet latus A E distantia Fixæ.

Parallaxis orbis magni Quid?

Verum tanta est fixarum distantia ut angulus ille E B F exquisitissimis instrumentis vix deprehendi potest; & qui ei investigando quam maxime insudârunt, semper uno minuto primo minorem invenerunt; Et cum in tam parvis angulis capiendis, error facile admitti potest, qui error in computo maximas distantiarum differentias producet, istiusmodi observationibus vix tutò fidendum erit. Nam si cum Flamstedio Parallaxis observata 42 secundorum statuatur, & error in observando admissus sit 25 secundorum in excessu peccans, qualis error haud facile vitari potest, distantia fixarum plusquam dupla erit ejus quæ ex observatione prodit. Et si minus accurate factæ fuerint observationes, ita ut intra minutum primum non consistant (quales pleræque sunt) in immensum à se invicem, & a veritate discedent distantiæ, ex talibus observationibus computatæ.

Parallaxis orbis magni vix observabilis.

Incerta est fixarum distantia.

Huc usque posuimus, Axem Telluris positionem stabilem & perfectum parallelismum semper tenuisse, neque alium habuisse motum quàm illum quo circa Solem in orbem motu annuo defertur. At ex plurium annorum observationibus deprehenderunt Astronomi, Axem illum à parallelismo paululum deflectere, motu quidem lentissimo, ita ut aberratio à parallelismo intra duos tresve annos facta vix sensibilis evadat; plurium tamen annorum decursu satis notabilis invenitur. Adeoque dum Phænomena unius anni

Axis Terræ non conservat exactum parallelismum.

Expli-

explicanda erant, de tantillâ aberratione omnino tacendum fuit, utpote quæ Phænomena tradita minime turbaret, quæ tamen temporis progressu sensibilis invenitur, & directionem Axis mutari vidimus quamvis ejus inclinatio ad planum Eclipticæ immutabilis maneat. Unde Telluris Axi necessario competit alius quidam motus cujus modus hic exponendus est.

Sit linea DCH portio orbitæ Telluris, sitque centrum Terræ in C, & ex C erigatur recta CE ad planum Eclipticæ normalis, superficiei cæli occurrens in E, recta CE est Eclipticæ Axis & punctum E Polus Eclipticæ. Sit C p Axis Terræ, qui ad cælum productus signabit in superficie cæli punctum P Polum cælestem seu Polum mundi, circa quem sidera omnia motu diurno revolvi videntur. Per E & P traducatur circulus maximus EPA, Eclipticæ occurrens in A; hic circulus cum transit tam per Polum Æquatoris quam Eclipticæ Polum, erit ad utrumque circulum rectus & arcus PA metitur angulum PCH inclinationem Axis Terræ ad planum Eclipticæ quæ est $66\frac{1}{2}$ grad. unde erit arcus EP ejus complementum ad quadrantem $23\frac{1}{2}$ graduum, & arcus ille metitur angulum ECP, quem Axis Terræ facit cum axe Eclipticæ. Polo E per P describatur circulus minor PFG qui erit Eclipticæ parallelus, & cum Axis Terræ eundem semper facit cum Axe Eclipticæ immutabilem angulum scil. $23\frac{1}{2}$ graduum; Polum mundi P in peripheria circuli PFG semper locari necesse est. Quinetiam si eandem quoque directionem immutabilem retineret Axis, quoties Terra in orbitæ suæ puncto C invenitur, Polus Mundi in puncto immoto P semper conspiceretur; verum observatum est Polum in peripheria PFG locum continuo mutare; & Axis Terræ qui prius ad P dirigebatur, post septuaginta & duos annos ad punctum Q dirigitur uno gradu à P versus anteriora remotus, ita ut Axis Telluris sive mundi motu conico feratur seu describat superficiem Coni cujus vertex est Terræ centrum C & basis circulus PFG; Et Polus P semper fertur in peripheria PFG motu lentissimo, & retrogrado, sive ab oriente in occidentem, & periodum

Tab. 16. fig. 2.

Eclipticæ Axis.

Polus mundi regreditur in circulo minore parallelo Eclipticæ.

riodum absolvit in peripheria PFG non nisi post 25920 annos, post quod tempus Polus à stella in P digressus ad eundem rursus dirigitur. Atque hinc sequitur stellam in P quæ hodie cum Polo coincidit, post 12960 annos (semiperiodum nempe motus Poli) per integros gradus 47 ab eodem Polo dimotam ire scil. cum Polus est in G.

Circulus EPA est colurus Solstitiorum.

Circulus maximus EPA, cum transit per Polos tam Eclipticæ quam æquatoris, erit ad utrumque circulum perpendicularis. Ac proinde est colurus Solstitiorum, & Eclipticæ punctum A erit Solstitium seu punctum Eclipticæ omnium maxime ab æquatore declinans; cum Axis Terræ productus pervenerit ad situm CQ, si per Polos Eclipticæ E & æquatoris Q ducatur circulus maximus EQB, hic circulus erit ad utrumque circulorum, Eclipticæ nimirum & Æquinoctialis, perpendicularis; adeoque Axe Terræ hunc situm tenente, erit circulus ille EQB colurus Solstitiorum, & B erit Solstitii punctum, adeoque semper una cum Polo regredientur Solstitia, & quidem æqualiter. Nam cum motus Poli in peripheria PFG fuerit PQ unius v. gr. gradus, erit AB regressus Solstitii unius quoque gradus, sunt enim arcus QP, BA (cum sint paralleli) similes.

Puncta Solstitialia regrediuntur.

Puncta æquinoctialia simili & æquali motu retrocedunt.

Hinc Solstitii puncta à stellis fixis continuo recedunt, adeo ut si punctum Eclipticæ Solstitiale sit hodie juxta stellam A, post septuaginta & duos annos Solstitium erit in B uno gradu à stella versus occidentem dimotum. Cum itaque puncta Solstitiorum continuo regrediuntur, necesse erit ut puncta æquinoctialia omniaque reliqua Eclipticæ puncta simili & æquali motu retrocedant, quippe quæ à Solstitiis dato intervallo distant. Nempe cum inter puncta æquinoctialia & Solstitia 90 gradus semper interjacent, quando Solstitia per unum gradum regressa fuerint, necesse erit ut tantundem retrorsum ferantur æquinoctialia puncta; alioquin non maneret eadem semper distantia eorundem à se invicem.

Motus in Antecedentia quid.

Puncta itaque æquinoctialia cum omnibus reliquis Eclipticæ punctis continuo regrediuntur, qui motus dicitur fieri in *Antecedentia*, seu ad occidentem & contra seriem signorum,

gnorum, ſicut alter motus, quo Terra & Planetæ omnes feruntur circa Solem ab occidente in orientem dicitur fieri in *Conſequentia*, ſive juxta ordinem ſignorum ab ♈ ad ♉ ♊, &c. Motus ille Æquinoctiorum retrorſum dicitur eorum *Præceſſio* qua in præcedentia ſeu antecedentia ſignorum feruntur.

Motus in Conſequentia.

Præceſſio æquinoctiorum.

Cum ſtellæ fixæ immobiles maneant, & retrocedat communis ſectio Æquatoris & Eclipticæ, neceſſe eſt ut fixarum diſtantia à punctis æquinoctialibus continuo mutetur, & ſtellæ ab iiſdem punctis verſus orientem magis quotidie promoveri videantur; unde ipſarum longitudines quæ in Eclipticâ ab initio Arietis ſive interſectione Eclipticæ & Æquatoris vernali computantur, continuo creſcant; & fixæ omnes videntur ferri in conſequentiâ ſignorum, non quod reverà in orientem moventur, ſed quod contrario motu regreditur punctum æquinoctii vernalis, à quo ſtellarum longitudines initium ducunt.

Punctorum æquinoctialium motus in antecedentia, efficit motum Fixarum apparentem in conſequentia.

Hinc fit, quod conſtellationes omnes mutaverunt loca, quæ tenebant dum à primis Aſtronomis obſervatæ fuerunt; & conſtellatio Arietis, quæ tempore Hipparchi prope interſectionem Eclipticæ & Æquatoris vernalem viſa fuit, eidemque Eclipticæ portioni nomen ſuum communicavit; nunc ab eâdem digreſſa in ſigno Tauri commoratur; ſicut & Tauri conſtellatio Geminorum ſedem occupat, Geminique in Cancrum promoti ſunt, & Cancer Leonem ex ſede expulit, & hic Virginem e loco detruſit. Ita ut unaquæque conſtellatio ex illo tempore è ſuo in proximæ tranſivit locum. Quamvis autem Conſtellationes è locis migrârunt, Eclipticæ tamen portiones ſeu *Dodecatamoriæ* quas tempore Hipparchi tenebant ſidera, nomina ab iiſdem ſideribus deſignata adhuc retinent; at ut diſtinguantur, Portiones Eclipticæ vocantur ſigna *Anaſtra*; Conſtellationes vocantur ſigna *ſtellata*.

Conſtellationes Eclipticæ mutaverunt Loca.

Veteres quidam Aſtronomi ſectiones Eclipticæ & Æquatoris fixas & immobiles ſtatuebant; at quoniam ſtellas ab hiſce punctis diſtantias continuo mutare obſervarunt, Fixarum ſphæram ſupra Polos Eclipticæ lentiſſimo motu volubilem posuerunt. Ita ut stellæ omnes circuitus in Ecliptica aut ejus parallelis absolvant spatio 25920 annorum, post quod tempus Fixæ ad pristinas sedes restituentur. Quod Temporis spatium, quod ætatem Mundi quinquies superat, Annum magnum vocabant, quo demum finito res omnes eodem ordine renasci voluerunt.

Annus Magnus Quid?

Præcessionum æquinoctiorum Causam Physicam ante Neuwtonum Astronomorum nemo vel conjecturâ assequi potuerit; at ille perpensis motûs & Gravitatis legibus, è figura Telluris spæroidicâ motum illum oriri demonstravit. Et figura sphæroidica ex vertigine Terræ ortum ducit.

Motus Terræ æquabilis non est.

Quamvis Terra ita circa Solem motu annuo feratur, ut æqualibus semper temporibus periodos absolvat, motus tamen ejus in suâ orbitâ per totam periodum, æquabilis non est; sed nunc gradum accelerat, nunc remittit; in aliquibus orbitæ suæ locis velocius incitatur, in aliis remissius; adeoque motus apparens Solis in Eclipticâ uniformis non erit; neque ille quidem conspicitur æquam Eclipticæ portionem singulis diebus describere; æstate nostrâ segnius incedit, hyeme incitatius ferri videtur: & tanta quidem est motuum differentia, ut locus ejus in Eclipticâ aliquando antecedat duos fere gradus, locum quem teneret, si æquabili motu latus esset, aliquando per tantidem spatium ab eo deficiat; Præterea Sol observatur in sex signis Borealibus diutius commorari, per octo integros dies quam in sex Australibus, adeo ut ab Æquinoctio vernali ad autumnale sunt dies 186½, quo tempore unam Eclipticæ semissem motu apparente describere videtur; at ab Æquinoctio autumnali sunt tantum dies 178½, quo tempore alteram Eclipticæ semissem & signa Australia Sol videtur percurrere. Observationes quoque ostendunt diametrum Solis apparentem tempore Hyberno, ubi motus ejus est velocissimus, majorem esse quam in æstate, ubi Sol tardissimus incedit. Et differentia quidem tanta est, ut Hyeme ubi Sol maximus apparet, videtur sub angulo 32′ & 47″, at æstate ubi minimus, ejus diameter est

Æstas octo diebus longior Hyeme.

Apparens Solis diameter, major Hyeme quam æstate.

31′.

31′. 40″, quæ differentia minuto major est, adeoque longius debet abesse æstate quam Hyeme.

His Phænomenis ut satisfacerent quidam Astronomi, orbitis circularibus pertinaciter nimium adhærentes; statuebant quidem Tellurem in peripheriâ circuli æqualiter moveri, & æquales angulos circa centrum æqualibus temporibus describere; at Solem non in istius circuli centro locari supponebant, sed extra in determinatâ à centro distantia statuebant.

Motus Terræ in circulo excentrico.

Sit Circulus ABCD orbita Terræ, cujus centrum E atque Sol sit in S. Cum Terra est in A, Sol videtur in puncto ♈, & cum ad B pervenerit Terra, Sol in ♋ conspicietur; ad C autem delatâ Tellure, Sol signum ♎ tenere aspicietur; & dum Tellus ab A ad C pervenerit, Sol unam tantum Eclipticæ medietatem motu apparente peragrasse videbitur; alterum autem Eclipticæ dimidium motu apparente percurret Sol, dum Terra orbitæ suæ portionem CDA describet. Et cum arcus ABC arcu CDA major sit, liquet Solem plus temporis impendere debere in percurrendo Eclipticæ semissem ♈♋♎ quam alteram illam ♎♑♈. Præterea cum Terra in B longius à Sole distet quam in D, & si motus ejus foret æquabilis, è Sole tamen illius motus conspectus inæquabilis apparebit, in B tardissimus, in D velocissimus, sed huic motui æqualis est Solis motus apparens è Tellure visus, Unde causam reddere facile est, cur Sol æstate nostrâ lentius incedere, in Hyeme autem gradum accelerare videtur. Atque ita motum Solis vel Terræ inæquabilem observatum non realem esse & Physicum, sed opticum tantum & apparentem statuebant, & exinde oriri quod Sol non in centro orbitæ in E, sed extra in S locatur, & contendebant spectatorem in E Terram uniformi motu semper deferri visurum.

TAB. 16. fig. 3.

Motus Planetarum veri nec æquabiles nec eorum orbitæ perfectæ circulares sunt.

Hæc quidem Hypothesis, simplex satis, primo intuitu Phænomenis bene respondere, & apparentias explicare visa fuit; & Astronomi plerique ante Keplerum ut veram amplectebantur. Apud eos enim tanquam indubitatum invaluit Axioma, motus omnes cælestes in se æquabiles esse, & orbitas perfecte circulares. At cum accuratiori examini cælelestes motus subjecit Magnus Keplerus, observationibus Tychonis Brahei innixus; Axioma hoc motibus Planetarum veris non congruere deprehendit. Et certissimis rationibus ab eo ostensum fuit, motus Planetarum veros nec esse in se æquabiles, nec eorum orbitas esse perfecte circulares. Observationes enim testantur, idque ultra omnem disputationem, Figuram orbitæ Planetariæ esse Ellipsin, sive ovalem, & a circulo deficientem, motumque Planetæ in hac Ellipsi inæqualem esse & pro distantiâ suâ à Sole intendi, & remitti.

Planetarum orbitæ sunt Ellipses.

Ellipsis descriptio.

Ellipsis autem est linea curva, quam Geometræ transverse Conum vel Cylindrum secando repræsentare solent. At ejus natura sequenti descriptione tyronibus melius innotescet, quam ex cylindri aut coni sectione. Concipiantur duo pali seu paxilli plano defigi, alterum in puncto H, alterum in puncto G, & filum capiatur, quod duplicatum nexis extremitatibus, longitudinem quamvis distantia paxillorum HG majorem adæquet; illudque filum paxillis circumponatur, & in fili duplicaturâ immisso stylo palosque circum eundo & filum semper eadem vi adducendo ut scil. illud æqualiter intendatur, linea curva D K B in plano designabitur, quæ erit Ellipsis. Et si non mutatâ longitudine fili pali tantum H G aliquanto propius ad se invicem adducantur, alia denuo Ellipsis describetur, sed alterius speciei quam prior, & ad circuli formam magis accedens, & si adhuc propius admoveantur Pali, alia itidem habebitur Ellipsis; postremo si conjungantur paxilli, Ellipsis in circulum migrabit. Puncta H & G, ubi Pali figuntur, dicuntur Ellipseos *Foci* seu *umbilici*. & Bisecta H G in C, punctum C erit centrum Ellipsis recta D K per focos & centrum transiens & utrinque in Ellipsi terminata, dicitur Axis Ellipseos. Hinc apparet si ex aliquo puncto in Ellipsi pro arbitrio electo verbi gr. B, agantur ad focos duæ lineæ B H, B G, has duas lineas simul junctas Ellipseos Axi æquales fore, seu longitudine fili, dempta H G distantia focorum.

Tab. 16. fig. 4.

Foci seu Umbilici Ellipseos.

Sol non in Ellipseos centro seu puncto Axis medio, sed in focorum alterutro, locatur, & Axis Ellipseos AP dicitur li-

linea *Apsidum*, A *summa Apsis* seu *Aphelium*, P *ima Apsis* seu *Perihelium*; & SC distantia inter Solem & centrum Ellipseos, *Excentricitas* dicitur: si ex centro ad axem erigatur CE Ellipsi occurrens in E & ducatur SE, hæc linea dicitur *Distantia Planetæ media* à Sole; æqualis scil. semiaxi majori CA vel CP, quæ est media Arithmetica inter maximam & minimam Planetæ a Sole distantiam; verum in orbitis planetariis Ellipsium formæ à circularibus parum recedunt, ita ut in orbita Terræ forma Ellipseos talis est, ut Excentricitas SC sit tantum partium fere 17 qualium distantia media SE est 1000, estque excentricitas dimidia tantum pars istius quam posuere Astronomi, qui Terram in circulari orbita deferri contendebant.

Linea Apsidum. Aphelium Perihelium. Excentricitas. Distantia media. Excentricitas orbitæ Terræ qualis.

Planeta in Ellipseos perimetro fertur, non quidem motu æquabili, sed eâ ratione, ut radius à centro Solis immobili ad planetam ductus, & motu angulari latus verrat, seu describat, Aream Ellipticam tempori proportionalem: *v. gr.* sit Planeta in A, ex quo in quavis temporis particulâ ad B perveniat, & Area quam verrat radius è Sole ad Planetam ductus sit ASB; si deinde Planeta sit in P & ducatur recta SD talis, ut Area PSD sit æqualis Areæ ASB; æqualibus temporibus percurret Planeta arcus Ellipticos AB, PD, qui quidem erunt inæquales; & in initio motus quam proximè in ratione distantiarum à Sole reciprocâ; Nam ob æquales areas tanto minor erit arcus AB arcu PD, quanto AS altitudo Areæ ASB est major PS, altitudine Areæ PSD. Hæc omnia à Sagacissimo Keplero in Commentariis de motibus stellæ Martis abunde demonstrata sunt, atque huic ejus sententiæ omnes jam subscribunt Astronomi, cum alia nulla sit quæ phænomenis satisfacit. Circuli arcus, vel angulus, vel Area ASG tempori proportionalis dicitur *Anamolia* Planetæ *media.* Sicuti Angulus ASG cum Planeta est in G, dicitur ejus *Anamolia vera*: at si Planetæ motus ab æquinoctio vernali computetur, seu ab initio Arietis; *Motus ejus in Longitudinem* dicitur, estque vel medius, qualis esset si Planeta motu æquabili orbitam circularem percurreret, vel verus, qui est motus Planetæ reverà competens, & nunc accelera-

Motus Planetæ in Ellipsi qualis. Areæ Ellipticæ æqualiter crescunt. Anamolia Media. Anamolia vera. Motus in Longitudinem.

tur, nunc retardatur, pro variâ distantiâ Planetæ à Sole.

Determinatio loci Planetæ in suâ orbitâ.

Hâc ratione determinare licet locum Planetæ in suâ orbitâ pro quolibet tempore ex quo Aphelium reliquit. Nempe ita dividatur Area Ellipseos rectâ SG, ut fiat tempus Periodicum Planetæ ad tempus datum, ita Area totius Ellipseos ad Aream ASG, & erit G locus Planetæ quæsitus. Methodos autem varias tradiderunt Geometræ, quibus Ellipsis Area in datâ ratione secanda est, de quibus in proprio loco erit dicendum.

Quare recedente Terrâ à Sole calor major fit.

Cum in æstate Terra longius à Sole distat, Hyeme propius ipsi accedat, mirum fortasse videtur recedente Sole, Terram magis incalescere, Hyeme autem, cum propius Soli adstamus, ingravescere frigora. At sciendum est, quod caloris & frigoris incrementa non tota pendent ex distantia Solis, sed aliæ potentiores concurrunt causæ, ad harum qualitatum mutationes producendas. Nam primo directi radiorum impetus fortiores sunt quam obliqui; Hyeme autem oblique admodum Solis lucem recipimus, ejusque potentia non tantum ideo debilitatur, sed etiam quia pauciores in datam superficiem agunt Radii, quo magis oblique ipsis objicitur superficies. Præterea Hyeme, radii Solares obliquius incidentes magis crassum aëris corpus pervadunt, & longiore itinere per aera feruntur quam æstate, quando directius incidunt; unde radiorum vires plures aëris particulas offendendo, magis franguntur quam in æstate. Atque hinc ratio patet cur Solem in Horizonte possumus sine oculorum damno contueri; quem cum altius ascendit oculi ferre non possunt.

Dies noctibus longiores augent calorem.

Est & alia potentior causa quæ tempestatum varietates inducit: nempe, notum est quo diutius corpus aliquod durum & solidum, igni objicitur, eo magis id incalescere; at in æstate per sedecim continuas horas Solis ardori objicimur, & per octo tantum horas ejus absentiam persentimus; cujus contrarium Hyeme experimur, unde non mirum erit tantas his tempestatibus oriri caloris & frigoris differentias.

Cum Solis potentia maxima sit quando ejus radii sunt directissimi atque dies longissimi, videtur nos debere maximos calo-

calores sentire cum Sol Tropicum ♋ occupat, quo tempore propius ad verticem accedit, ejusque radii directius, atque diutius nos feriunt; quotannis tamen experimur calorem æstivum post digressum Solis à Tropico crescere, & annum maxime fervere circa finem mensis Julii, cum integro fere signo à Tropico distat Sol.

Quare calor noster maximus est, quando Sol tropicum tenet.

Ut hujus rei causa reddatur, observandum est actionem Solis, qua corpora calefacit, non esse transeuntem, qualis est ejus illuminatio, sed permanentem, ita ut corpus semel à Sole calefactum, post ejus absentiam per aliquod tempus calidum maneat, scil. particulæ calorificæ è Sole in corpus calefactum continuo recipiuntur, quæ per aliquod tempus eidem inhærent, & in ipsum agendo calorem excitant, aufugientibus autem istiusmodi particulis frigescit corpus, unde si plures recipiantur in corpore particulæ calorificæ quam aufugiunt, istius corporis calorem continuo crescere necesse erit. Verum in præsenti casu, post adventum Solis ad Tropicum, numerus particularum aerem & Terram nostram calefacientium continuo crescit, adeoque augebitur simul calor. Ponamus *v. gr.* die, lucente Sole, centum tantum particulas calorificas intra corpus aliquod admitti, & nocte, cum ea sit die brevior, istarum tantum quinquaginta avolare, aliis quinquaginta manentibus; proxima die eadem fere vi agens Sol alias centum particulas eidem corpori immittet, quarum non plures fere quam dimidia pars nocte evadunt, adeoque initio tertii diei numerus particularum calefacientium centenario augebitur; dum itaque plures die recipiuntur particulæ, quam nocte aufugiunt, calor necessario crescet; at decrescentibus diebus, & noctibus crescentibus, fiet tandem, ut plures absente Sole effugiant particulæ quam die recipiuntur, quo fit ut calor continuo minuetur, frigescetque Terra.

LECTIO IX.

De Luna ejusque Phasibus & Motu.

LUna corporum cælestium omnium, si Solem excipias, splendidissime lucens, ad Terram nostram proprie pertinet,

tinet, cujus est assecla & indivulsa Comes. Adeo quidem in viciniâ Terræ semper commoratur, ut è Sole spectata, nunquam arcu decem Minutis primis majore à Tellure discedere videretur. Sed terræ perpetuo juncta, ipsique quasi satelles data, una cum eâ revolutionem annuam circa Solem perficit, & interea etiam in orbita circa Tellurem spatio menstruo periodum absolvit. Planetæ primarii Solem ut Centrum Motus atque Rectorem respiciunt, & nunc longissime à Terra digrediuntur, nunc ad eam propius accedunt. Luna tanquam terrestre corpus in nostra viciniâ propriâ propensione seu gravitate detinetur; ejusque vi à motu rectilineo continuo retrahitur, & circa terram revolutionem perficere cogitur, spatio viginti septem dierum, horarum circiter septem. Varias continuo Luna subit Phases, Varias induit formas, adeo ut multiformi ambage semper torqueat contemplantium ingenia, crescens semper, aut senescens, modo curvata in cornua, modo æquâ portione divisa, modo sinuata in orbem, mox fulgens orbe pleno, ac deinde repente nulla; alias pernox, alias sera, deficiens, & in defectu tamen aliquando conspicua, uti Plinius notavit, jam vero fit humilis, jam excelsa, nunc in Aquilonem elata, nunc in Austros dejecta, quæ singula deprehendit primus *Endymion*, ob quod eum amore Lunæ captum fuisse fama traditur.

Est autem Luna corpus sphæricum, Terræ instar, scabrum, opacum, & densum; Solis luce, non sua, resplendens; Sol quippe Fons luminis, perpetuo dimidiam corporis Lunaris partem, quæ ipsi obvertitur, illuminat, dum altera aversa à Sole medietas, tenebris obvolvitur; Lunæ autem superficies à Terricolis spectabilis, est ea quæ Terræ obvertitur, adeoque pro vario Lunæ respectu Solis Terræque situ, variæ videntur Lunæ illuminationes, & Luminis vicissitudines; & nunc major, nunc minor, aliquando nulla illustratæ faciei pars, ex Terra videtur, & aliquando etiam tota Terræ obvertitur, quæ ut melius intelligantur, libet Diagrammate declarare. Sit S Sol, T Terra, RTS portio
TAB. 17. fig. 1. orbitæ Telluris, quam motu annuo circa Solem describit;

ABC

TAB. XVI.

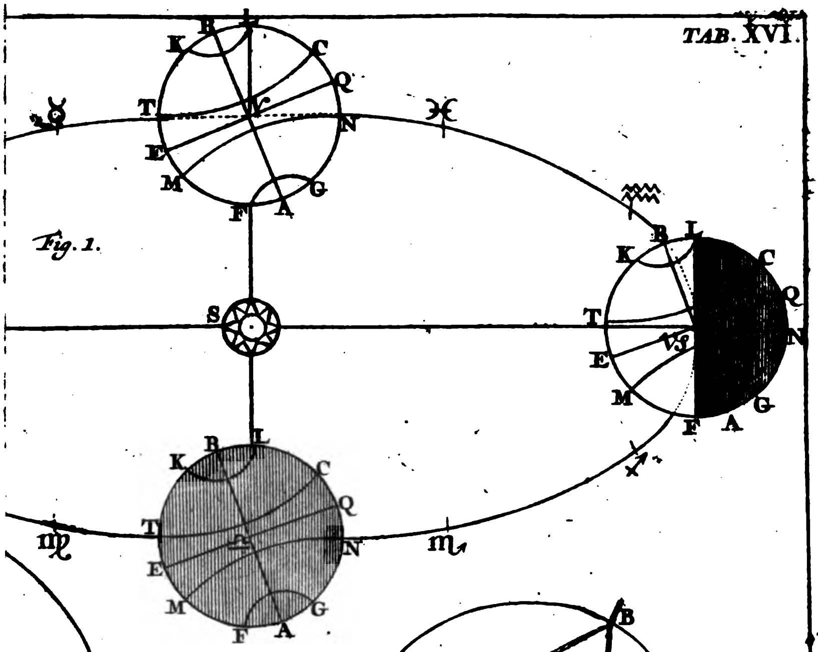
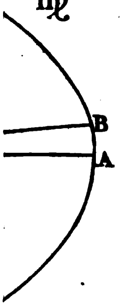


Fig. 1.



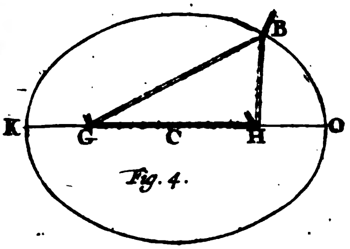


Fig. 4.

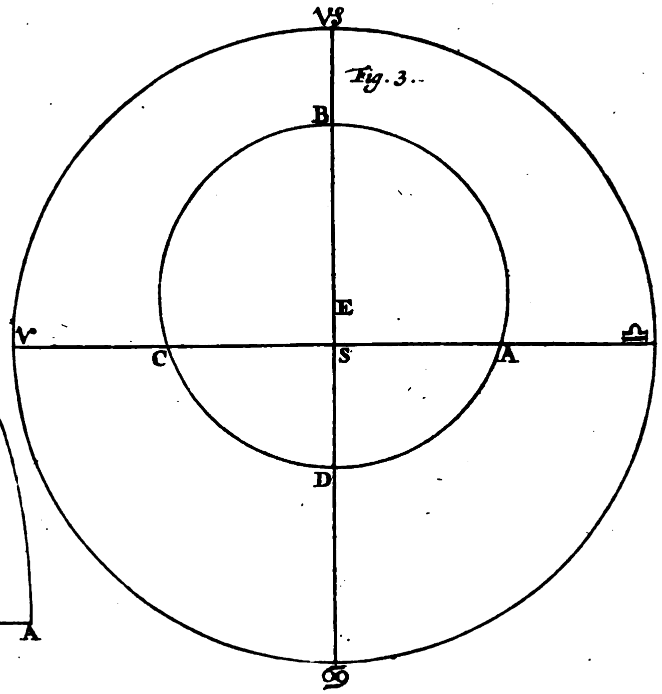
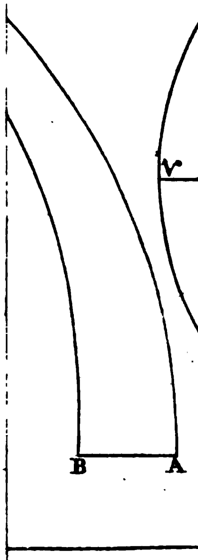


Fig. 3.



ABCDEFGH orbita Lunæ in qua ſcilicet circa Tellurem fertur ſpatio menſtruo ab Occidente in Orientem; qui motus manifeſte oculis obſervari poteſt, ſi enim Luna una cum Stella aliqua ad Meridianum appellat, poſtero die ſerius quam Stella Meridianum attinget, minutis temporis circiter 47, & à Stella Orientem verſus 13. gradibus receſſit; connectantur Solis & Lunæ centra rectis SL, & per Lunæ centrum tranſeat planum MLN, cui recta SL ſit normalis; planum illud efficiet in ſuperficie Lunari circulum, qui erit *Lucis & Umbræ finitor*, illuminatam ſcilicet faciem â Tenebroſâ diſtinguens; eodem modo jungantur centra Terræ & Lunæ rectis TL, quæ ſint normales ad aliud planum PLO, etiam per Lunæ centrum tranſiens. Planum illud efficiet in Lunæ ſuperficie circulum, qui Lunæ Superficiem â Terra ſpectabilem ab averſa & inconſpicua dividet, qui itaque *circulus viſionis* dici poteſt.

Motus Lunæ ab oriente in occidentem.

In Luna circulus lucis finitor.

Hinc patet primò, cum Luna eſt in ſitu A, puncto ſuæ orbitæ Soli oppoſito, quod coincidat circulus Lucis finitor cum circulo viſionis, & tota Lunæ illuſtratæ facies Terræ obvertitur, & à Terricolis videtur, in quo caſu *Luna plena, pernox, Plenilunium* nominatur, & reſpectu ſitus ad Solem dicitur eſſe in oppoſitione; cum ſcilicet è Terra, Sol & Luna in oppoſitis cæli punctis videntur. Cum ad B pervenerit Luna, illuminatus ſemicirculus MPN totus Terræ non obvertitur, ſed pars MP è conſpectu noſtro ſubducitur, adeoque illuminatio ſpectabilis à circulo deficiet, & Luna gibboſa apparebit, Phaſiſque erit ea, quæ in figura 2. Tab. XVII. per B notatur: Luna ad C perventa, augulus CTS eſt rectus, & illuminati diſci MPN, pars media à Terra videtur, & Luna dimidiata apparet, ut in C, fig. 2. & *Biſecta* ſeu *Dichotoma* nominatur: in hoc ſitu Sol & Luna quadrante circuli à ſe invicem diſtant, diciturque Luna eſſe in Aſpectu Quadrato ſeu in Quadratura: Procedente Lunâ ad D faciei illuminatæ MPN, pars parva PN Terræ obvertitur; & Diſci ONP qui Terræ obvertitur, pars maxima ON tenebroſa manet, & proinde ob Lunæ figuram ſphæricam & apparenter planam, illuſtrata pars veluti in cornua cur-

Circulus viſionis. Tab. 17. fig. 2.

Luna Phaſes deſcribuntur.

Luna gibboſa.

Luna Biſecta.

Lunæ cornua.

curvata videbitur ubi circulus lucis finitor, & circulus visionis in angulos coeunt, ejusque Phasis è Terrâ spectata apparebit ut in D. Tandem Lunâ ad situm F progressâ, nulla illustratæ faciei pars è Terra videbitur, sed obscura & tenebrosa tota Terræ obvertitur, tunc Luna dicitur esse in *conjunctione* cum Sole, cum scilicet Sol & Luna in eodem Eclipticæ puncto videntur, in quo fit *Novilunium*, *Neomenia* seu *Interlunium*: Ubi Luna ulterius ad F promovetur, corniculatam seu falcatam figuram rursus induit, & ante quidem novilunium, cornua in occasum spectabant, & nunc post novilunium, in ortum tendunt: cum Luna ad G provehitur, & in aspectu cum Sole quadrato venit, bisecta & dimidiata apparet, & in H Gibbosa, & ubi ad A denuo pervenerit, rursus pleno fulget orbe.

Novilunium.

Arcus EL, seu angulus STL, contentus rectis ductis è centris Solis & Lunæ ad Terræ, centrum dicitur *Elongatio* Lunæ à Sole, & arcus MO illuminati semicirculi MON pars illa, quæ Terræ obvertitur, quique est mensura anguli quem circulus Lucis finitor & circulus visionis efficiunt, est ubique quam proxime similis arcui EL Elongationi Lunæ â Sole, seu quod idem est angulus STL est quam proxime æqualis angulo MLO, quod sic demonstro; producatur SL utcunque in X, & erunt anguli TLP, MLS æquales, utpote uterque rectus est; sed anguli OLS & PLX sunt æquales, ad verticem enim sunt, quare demptis æqualibus, erit angulus MLO æqualis angulo TLX, sed angulus TLX externus est & æqualis duobus internis & oppositis trianguli STL, scilicet angulus STL & TSL; erunt igitur hi duo anguli æquales angulo MLO sed angulus TSL exiguus admodum est, & cum maximus, hoc est in quadraturis non decem minutis primis major; nam tantilla est distantia Lunæ à Terra præ Solis ab eadem distantia, ut angulus ille ad Solem evanescat, & pro nullo haberi possit; est itaque angulus MLO æqualis angulo STL & arcus MO similis est arcui EL.

Elongatio Lunæ à Sole.

Vide situm Lunæ F.

Semicirculus OMP, cum ejus planum per oculum transit, in rectam OP projicitur, seu in Lunæ disco, ut recta OP apparet, at circulus Lucis finitor, cum obliquè è Terrâ vide-detur, in Ellipsin projicitur; atque hinc data Elongatione Lunæ à Sole, facile exhibetur Phasis, sub qua Luna tunc temporis apparet. Repræsentet circulus COBP Lunæ discum è Terra spectabilem, OP rectam in quam projicitur semicirculus OMP, hanc ad rectos angulos secet alia diameter BC, & posito LP radio, capiatur LF æqualis cosinui elongationis Lunæ à Sole, & axe Majore BC, & semiaxe minore æquali LF, describatur semiellipsis BFC, abscindet illa ex lunari disco partem illuminatam BFCPB è Terra spectabilem.

Delineatio Phasis Lunæ pro datâ Elongatione à Sole. TAB. 17. *fig.* 3.

Cum posito LP radio, LF sit cosinus Elongationis Lunæ à Sole, erit PF sinus versus ejusdem Elongationis; Estque BFC linea (quæ tenebrosam Lunaris disci partem ab illuminata dividit) semiellipsis, cujus axis major æqualis est Lunæ diametro, semiaxis autem minor æqualis est Lunæ semidiametro diminutæ sinu verso Elongationis Lunæ à Sole. Sit jam OBPC Lunæ discus Terræ obversus, BFC semiellipsis illuminatam disci partem à tenebrosa dividens; ducatur quævis recta GHN Axi minori Parallela, & axi majori occurrens in M; Ex natura Ellipsis & circuli, erit LP, ad LF; ut MG, ad MH; adeoque per divisionem rationis LP ad PF ut GM ad GH, & duplicando antecedentes PO ad PF ut GN ad GH; idem de alia quavis recta GN Axi minori parallela demonstrabitur, adeoque per 12 Elementi 5^{ti}, ut PO ad PF, ita omnes GN ad omnes GH. Sed omnes GN faciunt Lunæ discum Terræ obversum, & omnes GH faciunt partem disci illuminatam, adeoque erit PO ad PF seu diameter circuli ad sinum versum elongationis Lunæ à Sole, ut totus Lunæ discus ad partem ejus illuminatam. Hinc illustratio quolibet tempore à Luna facta est ad ejus illustrationem maximam tempore plenilunii, ut sinus versus elongationis Lunæ ad circuli diametrum.

Quantitas illustrationis determinatur. TAB. 17. *fig.* 4.

Sicut Luna luce Solis reflexa Terram illuminat, sic & Terra plus quàm par pari referens, vicissim solarem lucem reflectendo, Lunæ superficiem multò majore luce perfundit; siquidem cum Terræ superficies sit quindecies circiter major lunari, si Luna & Terra æque in reflectendo polleant, hæc quin-

Terra luce reflexâ Lunam illuminat.

quindecies plus lucis ad Lunam remittet, quam ab illa accipit. Et Lunicolis quindecies major apparet Terra, quam nobis Luna videtur. In noviluniis illustrata Terræ facies tota Lunæ obvertitur, & tenebrosam Lunæ superficiem luce illustrans Lunicolis *Pleniterreum* efficit. Hinc oritur lucula illa, quæ in Lunâ nova veterique præter argentea cornua apparet, reliquum Lunæ discum, tenebrosum licet, conspicuum exhibens. Cum autem Luna ad oppositum Solis pervenerit, Terra è Lunâ in conjunctione cum Sole videtur, ejusque tenebrosa facies Lunæ obvertitur, in quo situ è Lunâ videri nequit, sicuti in noviluniis nos non videmus Lunam, & ut verbo dicam, Phases Terræ è Lunâ conspicuæ per omnia sunt similes iis quæ à nobis in Luna observantur.

Mensis Periodicus. *Mensis synodicus.* Quamvis Luna Terram circumeundo, orbitam suam describat spatio dierum 27. horis circiter septem, quod tempus *Mensis periodicus* appellatur, tempus tamen quod impendit Luna, dum ab unâ conjunctione cum Sole ad proximam pervenit, quod *Mensis synodicus*, seu Lunatio dicitur, mense Periodico majus est. Nam dum Luna in propriâ orbitâ periodum absolvit, interea Tellus ejusque comes Luna, cum suâ orbita circa Solem eundo, integro fere signo versus Orientem promotæ sunt, & punctum Orbitæ quod in priore situ, in recta centra Terræ & Solis jungente jacebat, nunc Sole paulo Occidentalior est, adeoque cum Luna ad illud punctum pervenerit, nondum in conjunctione cum Sole invenitur.

Tab. 20. fig. 1. Sit enim AB portio orbitæ Telluris, Terra T, S Sol, ACL orbita Lunæ, & cum Terra est in T sit Luna in L in conjunctione cum Sole, & dum Luna ab L digreditur, orbitamque propriam LACD describit, Tellus interea per arcum T*t* defertur, & cum ad *t* venit, orbita Lunæ situm *lacd* obtinet, punctumque orbitæ L erit in recta *tl*, priori TL parallela, unde patet ad *l* diventâ Lunâ, eam totam orbitam percurrisse, sed nondum ad conjunctionem cum Sole pervenisse, sed opus esse, ut ulterius progrediatur Luna, & arcum *lm* describat, priusquam Solem assequatur; & cum Luna orbitam absolvat diebus viginti septem, horis circiter

se-

ſeptem, Terra hoc tempore deſcribet arcum T *t* viginti ſeptem circiter graduum, cui ſimilis eſt arcus *l* M, ob angulum *l t* M æqualem angulo M S L; at verò opus eſt ut majore arcu quam *l* M Luna deſcribat, (ob motum Terræ interea factum) priuſquam ad conjunctionem cum Sole perveniat, inde fit ut Lunatio tota ſeu Tempus ab uno novilunio ad proximum, non niſi diebus 29, horis circiter duodecim compleatur, & ſeparetur Luna à Sole dietim angulo graduum 12 & aliquot minutorum, qui *motus à Sole diurnus* nuncupatur. *Motus Lunæ à Sole diurnus.*

Si planum orbitæ Lunaris coincideret cum plano Eclipticæ, hoc eſt, ſi orbita Lunæ circa Terram, & orbita Terræ circa Solem, in eodem jacerent plano, ſemita motûs Lunæ in cælis è terrâ viſa eadem eſſet, quæ eſt motus Solis apparens, ſeu eundem omnino circulum, Eclipticam nempe, quem Sol ſpatio unius anni conficere apparet, Luna menſe quolibet percurrere videretur; verùm orbitæ Lunaris planum non coincidit cum plano Eclipticæ, ſed ſe mutuò interſecant hæc duo plana, in linea per centrum Terræ tranſeunte, eorumque inclinatio angulum quinque circiter graduum conſtituit. *Luna in Ecliptica non movetur.*

Sit A B portio orbitæ Telluris, T Terra, circulus CDEF Lunaris orbita, cujus centrum eſt centrum Terræ T, eodem centro T deſcribatur in plano orbitæ Telluris, circulus CGH, cujus diameter æqualis ſit diametro orbitæ Lunæ: Hi duo circuli cum idem habeant centrum, in recta per Terram tranſeunte ſe interſecabunt, & Lunaris orbitæ medietas una CED ſupra planum circuli C G H attolletur in Boream; altera medietas D F C deprimetur in Auſtrum, recta CD communis circulorum interſectio *Linea nodorum* dicitur, & anguli C & D *Nodi* dicuntur; & quidem nodus C, ubi Luna aſcendit ſupra planum Eclipticæ verſus, Boream *nodus aſcendens* & *caput Draconis* nuncupatur, & brevitatis cauſa ſic ☊ notatur; alter nodus D, ubi Luna in Auſtrum deſcendit, *Nodus deſcendens* & *cauda Draconis* nominatur, cujus ſignum eſt ☋ & ſi Linea nodorum immobilis eſſet, hoc eſt non alium haberet motum, præter illum quo circa Solem *Tab. 17. fig. 5.* *Linea nodorum.* *Nodus aſcendens.*

Oo fer-

fertur, ad idem Eclipticæ punctum semper dirigetur, utpote sibi semper parallela manens, sed linea Nodorum continuo situm mutare deprehenditur, & ab Oriente in Occidentem contra seriem signorum motu retrogrado fertur, circulumque absolvit spatio annorum fere novemdecim, post quod tempus nodus utervis ab aliquo Eclipticæ puncto digressus, ad idem redit, seu in eodem quo prius Eclipticæ gradu è Terra videtur.

Nodi moventur motu retrogrado.

Ex dictis constat Lunam non nisi bis in qualibet periodo in Eclipticâ videri, scilicet cum in nodis versatur, in aliis orbitæ suæ locis nunc magis nunc minus ab Eclipticâ distare, prout nodorum alicui remotiorem aut propriorem esse contigerit; maxime autem ab Ecliptica distat Luna cum est in E vel F, quæ media sunt à nodis puncta; & *Limites* vocantur. Distantia Lunæ ab Ecliptica ejus Latitudo vocatur, hanc metitur arcus circuli per locum Lunæ in cælo transeuntis, & ad Eclipticam perpendicularis, arcus inquam ille inter Lunam & Eclipticam interceptus, metitur Lunæ ab Ecliptica distantiam; seu Latitudinem, & idcirco tales Circuli ad Eclipticam perpendiculares *Circuli Latitudinum* dicuntur, & Latitudo Lunæ, cum maxima est, ut in E vel F, æqualis est quinque gradibus cum octodecim minutis primis, estque illa Latitudo mensura angulorum ad nodos.

Latitudo Lunæ.

Circuli Latitudinum qui?

LECTIO X.

De Inæqualitate motuum Lunarium, de Lunæ facie; ejusque Montibus & Vallibus.

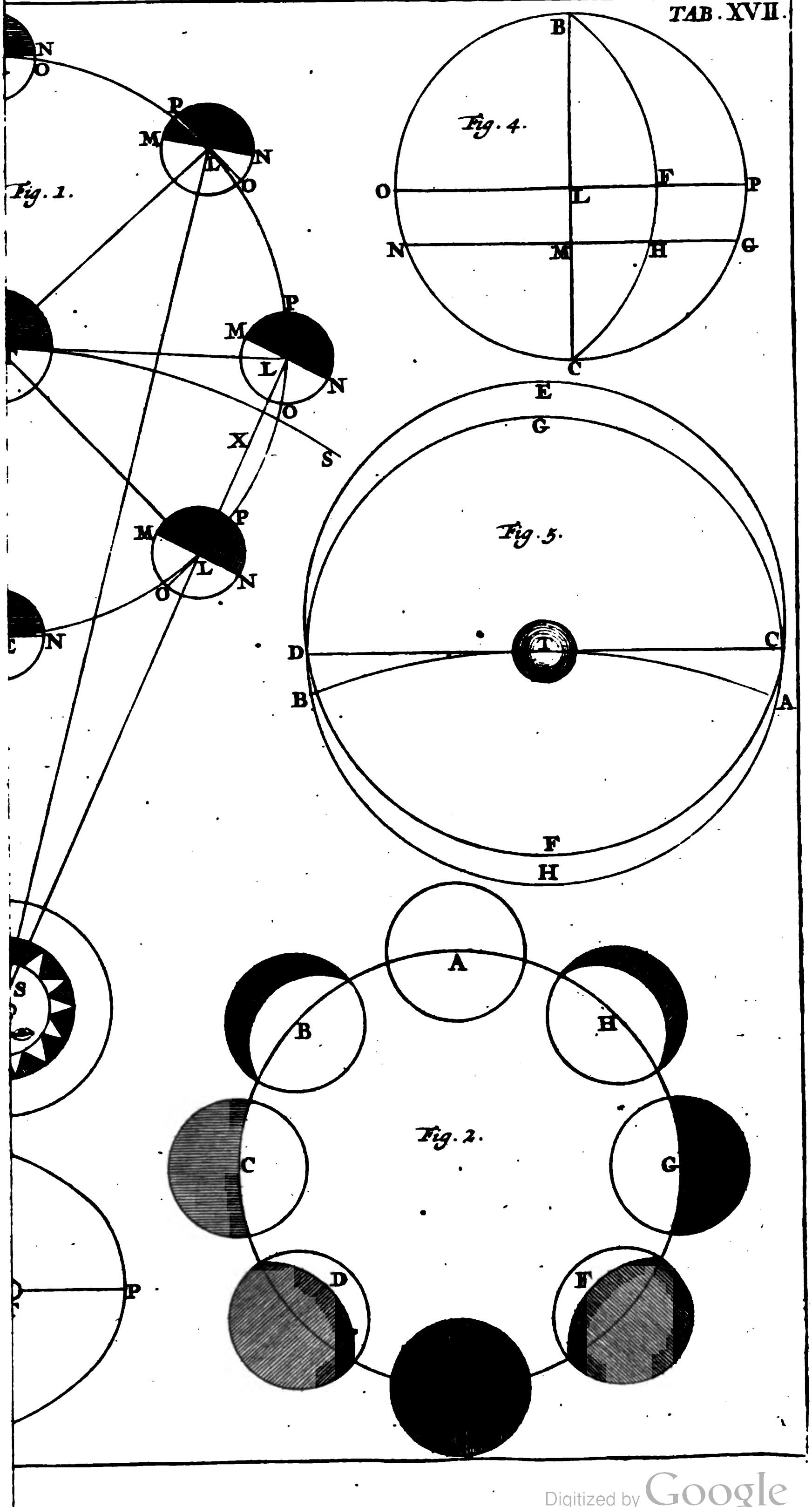
Astronomorum observationes testantur, Lunæ distantiam à Terra multum variari, & nunc propius nobis accedere Lunam, nunc longius recedere; hoc ideo fit quod Luna non in Orbita circulari, circa Terram fertur, sed in Ellipticâ, qualem repræsentat figura ABPD, cujus focorum alterum tenet Terra, & Axis Ellipseos major AP est linea Apsidum; TC Excentricitas, Punctum A summa Apsis vocatur *Apogeon* Lunæ, ubi scilicet maximè à Terrâ distat, Punctum P ima Apsis, ubi maximè ad Terram accedit, *Perigeon* nominatur. Et si orbita Lunæ non alium haberet motum

Luna in orbitâ Elliptica movetur.

TAB. 17. fig. 6.

Apogeon Lunæ. Perigeon.

TAB. XVII.



tum præter illum, quo circa Solem fertur, Axis Ellipſeos ſibi ſemper Parallelus maneret, & ad idem cæli punctum ſemper dirigeretur, ad quod cum pervenerit Luna eandem ſemper à Terrâ diſtantiam obtineret; ſed Linea Apſidum eſt etiam mobilis ſicut Linea Nodorum, & motu Angulari circa Terram fertur, ſecundum ſeriem ſignorum ſeu ab Occidente in Orientem, circulum abſolvit hæc linea, & ad eundem ſitum redit annis fere novem.

Motus Lunæ ejuſque orbitæ multiplici afficiuntur inæqualitate; nam *Primò* cum Tellus Aphelion tenet, ubi unà cum Luna longiſſimè à Sole diſtat, motus Lunæ aliquantulum acceleratur; Tellure autem ad Perihelion delatâ, ubi proxime ad Solem accedit Luna, aliquantulum retardatur ejus motus; unde fit ut minore tempore Luna ſuam orbitam percurret, breviuſque fit tempus Periodicum Terra Aphelion tenente, quàm cum eadem in Perihelio verſatur, & menſes Periodici neutiquam ſint inter ſe æquales: 2do Luna in Syzigiis id eſt, cum eſt in linea quæ jungit centra Solis & Terræ, cæteris paribus celerrimè movetur; in Quadraturis tardiſſimè. *Tertiò* pro varia diſtantiâ Lunæ à Syzigiis, hoc eſt ab conjunctione ſeu oppoſitione, ejus motus inæquabilis redditur, motus enim in primo menſis quadrante, ſive pergente Lunâ à conjunctione ad quadraturam proximam retardatur, in ſecundo acceleratur dum tendit à Quadratura ad oppoſitionem; in tertio retardatur rurſus; & in quarto iterum acceleratur; hanc inæqualitatem in motu Lunæ, primus deprehendit Tycho, & *Variationem* Lunæ appellavit. *Inæqualitates in motu Lunæ.* *Variatio Quæ?*

4to. Cum Luna in Ellipſi moveatur, cujus umbilicum tenet Terra, circa quam Areas deſcribit temporibus proportionales, oportet Planetarum primariorum more, ut in Apogeo ſuo tardius incedat, in Perigeo velocius feratur.

5to. Orbita etiam Lunæ eſt continuo mutabilis, & ejuſdem non eadem manet ſpecies, aut figura, ſed excentricitas nunc augetur, nunc minuitur, & maxima quidem eſt cum linea Apſidum eſt in Syzigiis, hoc eſt cum coincidit cum rectâ quæ centra Solis & Terræ conjungit; minima autem cum hanc rectam normaliter ſecat; & differentia inter maximam & mi- *Orbita Lunæ ejuſque excentricitas ſemper mutabilis.*

 nimam

nimiam excentricitatem tanta est, ut illa semissem Excentricitatis minimæ superet.

Apogeum inæquabili motu fertur. 6to. Ipsum Apogeum Lunare inæquabili fertur motu; quando enim est in Syzigiis cum Sole progreditur, in quadraturis regreditur, & progressus & regressus illi non sunt æquabiles, sed Lunâ in quadraturis versante tardius progreditur, vel forsan etiam regreditur, in Syzigiis versante Luna, Apogeum celerius progreditur. *Septimo* Nodorum motus retrorsum est minime æquabilis, nam nodi in Syzigiis positi penitus quiescunt, dum vero quadratum ad Solem obtinent aspectum, velocissime in Antecedentia feruntur.

Harum omnium inæqualitatum causas, primus & solus detexit sagacissimus Neuwtonus, easque secundum leges Mechanicas ex Theoriâ Gravitatis oriri demonstravit. Mirum videtur, quod etsi Luna sit corporum cælestium omnium nobis maxime propinqua, ad eam tamen accessus patet maxime difficilis, cum non sine multo labore & longis annorum observationibus illius irregulares excursus investigari possunt.

Luna æqualiter circa axem suum rotatur. Solus in Lunâ motus æquabilis est ille, quo circa Axem suum rotatur, in eodem præcise tempore, quo circa tellurem periodum absolvit, unde fit ut eandem fere sui faciem Terræ ostendat, sed ea ipsa æquabilitas causa est apparentis inæqualitatis quod Luna videtur è Terra super Axem suum nunc ab ortu in occasum, nunc ab occasu ad ortum paululum librari, & partes quædam in limbo occidentali Lunæ per quoddam spatium modo recedunt, modo accedunt, quædam antea visæ occultantur, ac deinde rursus in conspectum veniunt, talisque motus *Libratio* dicitur; oriturque ex motu Lunæ inæquali *Libratio.* in perimetro Ellipseos; nam si Luna in circulo moveretur, cujus centrum teneret Terra, & circa axem spatio temporis Periodici rotaretur, ejusdem meridiani Lunaris planum semper per Terram transiret, & eadem ubique Lunæ facies Terræ obverteretur; at cum Luna in Ellipsi feratur, in cujus umbilico seu foco locatur Terra, & conversio Lunæ circa Axem æquabilis est, seu quod idem est, datum quodlibet Lunare meridianum angulos temporibus proportionales describit, illud planum non ubique per Terram transibit.

Sit

Sit enim ALP orbita Lunæ, cujus focum tenet Terra in T, & cum Luna est in A ejus meridianus MN productus per Terram transeat; si Luna in orbita absque conversione lata esset, idem meridianus MN sibi semper Parallelus maneret, & cum Luna ad L pervenerit, meridianus MN esset in situ PQ, ad MN Parallelo, verum per rotationem æquabilem, Meridianus MN situm mutat, angulosque describit temporibus proportionales, & tempore Periodico quatuor rectos absolvit, unde erit in situ *m*L*n* tali, ut angulus QL*n* sit ad rectum, ut tempus quo Luna confecit arcum AL ad quartam partem temporis periodici, sed tempus quo Luna confecit arcum AL, est ad quartam partem temporis periodici, ut area ATL ad aream ACL, scilicet quartam partem Areæ Ellipseos, unde erit angulus QL*n* ad rectum angulum, in eadem ratione; est autem area ATL major area ACL, unde angulus QL*n* recto major erit, sed est angulus QLT acutus, major itaque est angulus QL*n* angulo QLT, adeoque Meridianus MN, cujus planum cum Luna fuit in A, per Terram transibat, nunc Lunâ ad L delatâ versus Terram non dirigitur, unde constat Lunæ Hemisphærium in L è Tellure visum aliquanto esse diversum ab hemisphærio, quod è Terra videtur cum Luna fuit in A, partesque ultra Q nunc retegi, quæ prius Luna in A existente fuerunt inconspicuæ. At cum Luna ad Perigeum P pervenerit, in eo tempore Meridianus MN semicirculum absolvit, rursusque ejus planum per Terram transibit, ut eadem Lunæ facies è Tellure conspiciatur, quæ prius in A visa fuit; hinc patet hanc Lunæ librationem bis in quovis mense periodico restitui, scilicet cum Luna est in Apogeo & Perigeo. *Tab. 20. fig. 2.*

Si Lunæ superficies tersa & polita esset, ut in speculis, illa non lucem undequaque reflecteret, sed Solis imaginem exiguam admodum instar puncti splendidissimè micantis, tantum ostenderet, verum sicut in corporibus terrestribus, sic in Luna Aspera & scabra est ejus superficies, qua fit ut lucem solarem undequaque diffundat & corpora Terrestria illuminet. *Lunæ superficies aspera.*

At non tantum inæqualis & aspera est Lunæ superficies, sed altissimis montibus profundissimisque vallibus tota obsita; nam si nullæ in Luna extiterint eminentiæ, sive partes re- *Et montibus obsita.*

liquis altiores, linea recta in Dichotomia, aut Elliptica in reliquis Phasibus, semper disterminaret confinia lucis & umbræ. Verum si tubo optico aspiciatur Luna, confinium illud in nulla regulari linea, sed dentatum, serratum multisque anfractibus intercisum apparet. Quin etiam in tenebrosà Lunæ facie, partes aliquæ à confinio non multum distantes cernuntur Solis Luce illustratæ: Et die circiter quarto post novilunium in tenebrosa Lunæ facie quædam Cuspides luminosæ, tanquam scopuli aut parvæ insulæ, apparent, quæ non multum à confinio illustratæ & tenebrosæ partis distant; aliæ item dantur illuminatæ parti adhærentes areolæ, paulatim formam figuramque cum lumine crescente mutantes, donec parti illustratæ omni ex parte annectantur, & cum locis vicinioribus lumine prorsus imbuuntur. Mox quam plurimas iterum novas in illa tenebrosâ parte orientes cernimus, & in locum antecedentium succedentes. Contrarium autem accidit in phasibus Lunæ decrescentibus, ubi lucidæ areolæ, quæ nunc confinio & parti illustratæ adhærent, paulatim avelluntur, & confinio relicto diutius tamen conspiciuntur, quod impossibile foret, nisi areolæ illæ essent partibus reliquis altiores, ut Solis lux illas stringeret. Puncta itaque illa, extra lucis confinium micantia, sunt cuspides & vertices præaltorum montium, quæ cum altiora sunt quam reliqua loca vicina, citius à Sole illustrantur, seriusque ab ejus lumine subducuntur. Præterea multæ nigricantes maculæ in parte illuminata conspiciuntur, quæ sunt ingentes cavitates seu cavernæ, in quibus cum Sol illas oblique irradiat, ejusque lux limbum externum tantum attingit profundiores partes obscuræ manebunt; at Sole ascendente plus lucis hauriunt, & quo altius super illas attollitur Sol, eò vallium umbræ magis se comprimunt, brevioresque evadunt, usque dum Sol punctum attingit verticale, quo tempore totam illustrat cavernam, umbrâ penitus evanescente; & prædictæ valles æque clare ac montium vertices conspiciuntur; immo multo illis lucidiores. Lunæ itaque superficies præruptis montibus profundissimisque vallibus ubique scatet.

Demonstratur dari in Luna montes.

In Luna ingentes cavernæ.

Geometria possunt montes Lunares metiri.

Montes Lunares nostris Terrestribus longe excelsiores depreprehenduntur; possunt enim Geometræ horum altitudinem hac ratione metiri. Sit Hemisphærium Lunæ illustratum EGD, ECD Diameter circuli lucis & Umbræ Finitoris, A vertex montis, ubi primo illuminari inceperit. Observetur Telescopio, vel Micrometro, proportio rectæ AE, ad Lunæ diametrum ED; & quia ES tangit Lunæ Globum, junctâ AC, erit AEC triangulum rectangulum per 16 El. tertii. Adeoque datis AE, EC, dabitur CA, ex qua subductâ CB, æquali CE, restabit BA altitudo montis Quæsita, v. gr. Dicit Ricciolus quarto die post novilunium, se observasse montem *Stæ Katharinæ* illuminatum, ejusque distantiam AE a limite consueto illuminationis, fuisse diametri Lunaris partem decimam sextam, seu semidiametri partem octavam: Unde si EC sit partium 8, erit EA harum partium una, adeoque quadratum lateris EC erit 64, ad quod addatur quadratum lateris AE quod est 1, & per 47. *El. primi*, habebitur quadratum hypotenusæ AC æquale 65 cujus Radix Quadrata est 8, 062 æqualis AC; unde dempta BC=8 erit AB altitudo montis æqualis 0, 062, & est CB, vel CE ad AB ut 8000, ad 62, adeoque cum semidiameter Lunæ sit milliarium circiter 1182, si fiat ut 8000, ad 62, ita 1182, ad quartûm, qui erit 9. Altitudo igitur hujus montis novem milliaria adæquat, estque altissimis nostris montibus triplo celsior. *Tab. 20. fig. 3.*

Qui Lunæ vultum Telescopio contemplari velit, cernet illam mirabili varietate distinctam; Quædam enim partes splendidissime lucent, quas quidam philosophi Rupes Adamantum esse prædicant, alii Unionibus vel Margaritis eas assimilant, quæ partes videntur montes partesque solidas Lunæ repræsentare; at aliæ interim partes, eæque non paucæ, nec parvæ, tanquam maculæ obscuriores, & nigri coloris apparent, quæ Maria, Paludes, & lacus, esse suspicati sunt philosophi. Verum partes has obscuriores, quas maria appellant, revera non esse liquidas exinde constat, quod si melioris notæ Telescopio inspiciantur, innumeris cavernis, seu cavitatibus vacuis (umbris intus cadentibus) constare deprehenduntur, quod maris superficiei convenire nequit: quocirca maria esse non possunt, sed materiâ constant minus candicante *Facies Lunæ mira varietate distincta.* *In Luna non sunt maria.*

te quam est ea, quæ in partibus asperioribus conspicitur; intra has tamen partes quædam vividiore lumine fulgent, cæterisque antecellunt. Sed neque nubes ullæ, unde pluviæ generantur; si enim essent, viderentur nunc has, nunc illas Lunæ regiones obtegere, atque visui nostro occultari, quod nunquam contingit, sed in Lunâ perpetua apparet serenitas. Præterea nec videtur Luna, Atmosphærâ donari; nam Planetæ & stellæ prope ejus marginem siti, nullam patiuntur refractionem.

Nullæ nubes.

Nulla Atmosphæra.

Astronomi selenographi. Tab. 18. *fig.* 19.

Lunæ faciem (qualem eam exhibent melioris notæ Telescopia) accurate depinxerunt Astronomi Selenographi Florentius Langrenus, Joannes Hevelius, Maria Grimaldus, & Ricciolus; & splendentes quoque partes annotaverunt, & quo melius distinguantur, iis nomina imposuerunt. Langrenus & Ricciolus regiones Lunares inter Philosophos aliosque insignes viros distribuerunt, quælibetque pars nomen celebris cujusdam Philosophi, vel Mathematici, accepit. At Hevelius veritus, ne de divisione agrorum lites inter philosophos orirentur; Ditiones Lunares ab omnibus eripuit, & Geographica nostræ Telluris nomina in Lunam transtulit, nullo habito ad figuram aut situm respectu.

LECTIO XI.

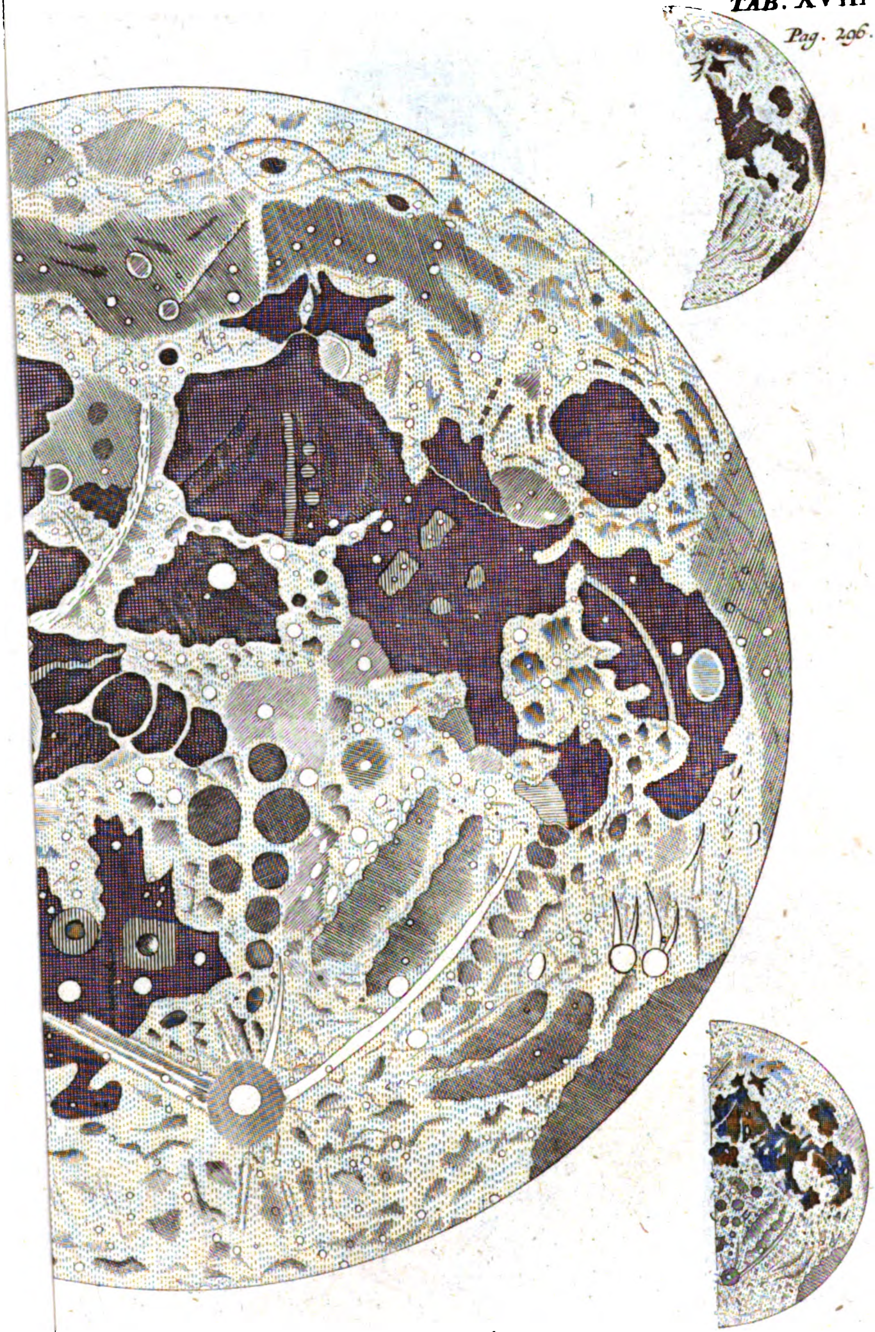
De Solis & Lunæ Deliquiis, seu de Eclipsibus.

NIhil est in Astronomiâ, quod miram humani intellectus solertiam, acremque ejus perspicaciam magis ostendit, quam defectuum Solis & Lunæ clara explicatio; & accurata prædictio, qualis apud Astronomos habetur. Subtilis quidem est hæc nostræ scientiæ pars, sed tamen certa & indubitata, quâ nihil sublimius, aut contemplatione dignius.

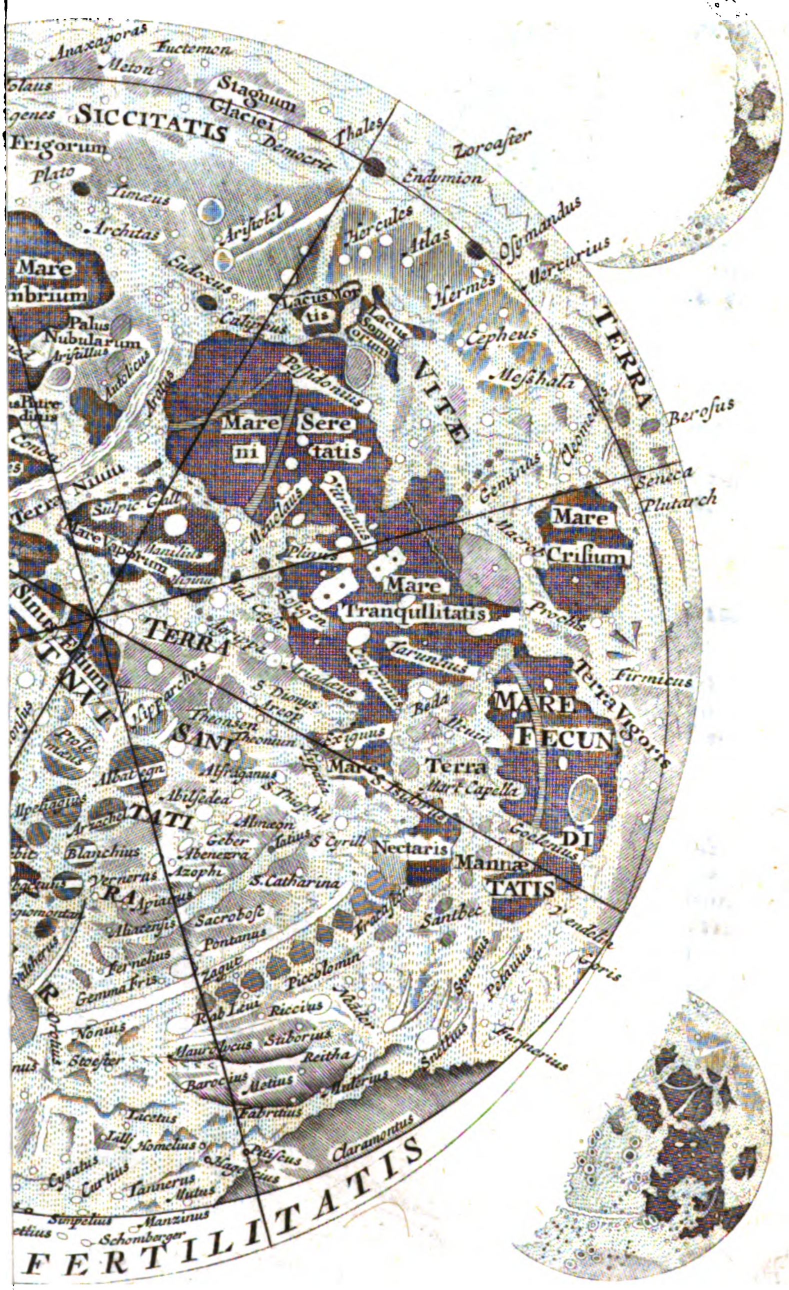
Eclipsis Quid est.

Est autem *Eclipsis* vox Græca, ab ἐκλείπω deficio, quæ deliquium, aut defectionem significat, unde ægri & moribundi cum deliquium animi, & languor lethalis eos corripit, in Eclipsin incidisse dicuntur. Sic etiam Luna, cum orbe pleno fulget, si in umbram Terræ incidat, vivificâ Solis luce spoliata, expallescit; & Sol vicissim interjectâ Lunâ,

TAB. XVIII.
Pag. 296.



...n Fec.


Anaxagoras
Meton
Euctemon
Stagnum Glaciei
SICCITATIS
Frigorum
Democrit
Thales
Zoroaster
Endymion
Plato
Timæus
Aristotel
Archytas
Hercules
Atlas
Osymandus
Mercurius
Mare
Eudoxus
Hermes
Lacus Mor tis
Lacus Somni orum
Palus Nubularum
Cepheus
TERRA
Possidonius
VITÆ
Messhala
Mare ni
Sere tatis
Berosus
Geminus
Cleomedes
Seneca
Plutarch
Mare Crisium
Menelaus
Vitruvius
Plinius
Mare Tranquillitatis
Proclus
TERRA
Firmicus
Taruntius
Terra Vigoris
Beda
MARE FECUN DI TATIS
Theonsen
SANI
Theonium
Exiguus
Ptolemæus
Albategn
Alfraganus
Terra
Mart. Capella
Abilfedea
TATI
Almæon
Geber
S. Cyrill
Nectaris
Goclenius
Blanchius
Abenezra
Manna
Azophi
S. Catharina
TATIS
Apianus
Sacrobosc
Santbec
Vendelin
Aliacensis
Pontanus
Fracastor
Fernelius
Gemma Fris
Piccolomin
Snellius
Stevinus
Petavius
Nonius
Stoefler
Rab. Levi
Riccius
Furnerius
Maurolycus
Stiborius
Reitha
Barocius
Metius
Fabritius
Clavius
Jacetus
Homelius
Cysatus
Curtius
Tannerus
Mutus
Pitiscus
Claramontius
Manzinus
Schomberger
FERTILITATIS

nâ, non sibi, sed nobis deficiens, obscurari videtur; tunc dicuntur Sol & Luna Eclipsin seu deliquium pati. Ut autem à primis principiis exordiamur.

Sciendum est, corpus omne lucenti Soli expositum, *Umbram* projicere in plagam Soli oppositam; estque hæc *Umbra* nihil aliud quam privatio Lucis in spatio quodam, ob Solis radios ab opaco corpore interceptos. Adeoque Terra, opaca cum sit, umbram projiciet in plagam Soli oppositam, in quam si incurrat Luna, eam obtenebrescere necesse est. Et quia figura Telluris est sphærica, Umbræ figura cylindrica foret, si Terra Solem magnitudine æquaret: aut si Solem superaret, figura umbræ esset coni vertice truncati & crassitie crescens; & in utroque casu umbra in infinitum porrigeretur; aliosque Planetas, Martem scil. Jovem, & Saturnum, tenebris suis involveret. Quod cum nunquam facit, necessario erit Terra Sole minor; in quo casu, figura umbræ est conica in apicem desinens.

Umbra Corporis.

Figura Umbræ. TAB. 20. *fig.* 4. 5.

Sol Terrâ major est. TAB. 20. *fig.* 6.

At Luna, cum ejus diameter in diametro Umbræ Terrestris ter contineatur, estque diameter Umbræ minor diametro Terræ, erit Terrâ multo minor.

Sit itaque S Sol, T Terra, Conus ABC umbra Telluris; patet nullam duci posse rectam lineam à Sole ad punctum quodvis intra spatium ABC, quæ non in Terram incidat, adeoque cum opaca sit Terra, transitum Solis radiis negabit, & illustrationem spatii ABC impediet. Et si Luna Soli opposita per hoc spatium transeat, illam tenebris involvi necesse erit, fietque Eclipsis Lunæ tempore Plenilunii.

TAB. 21. *fig.* 1.

Quando fit Eclipsis Lunæ.

Quin etiam Luna suam quoque umbram Conicam in plagam Soli oppositam projiciet; si hæc umbra in Terram incidat, quod fieri non potest, nisi cum Luna in conjunctione cum Sole è Terra videtur, Incolæ istius partis in quam incidit umbra, in tenebris includentur, iisque Sol videbitur deficere, quamdiu intra umbram morantur. At cum Luna multo minor sit quam Terra, ejus umbra non potest nisi partem aliquam superficiei Terrestris nempe BC tegere, & totalibus tenebris involvere; reliquis interim circumjacen-

Quando fit Eclipsis Solis. TAB. 21. *fig.* 2.

Aliquibus Terræ Locis est Eclipsis Solis totalis, aliquibus partialis, aliquibus nulla.

jacentes partes quidam Solis radii illustrabunt, & incolæ partem tantum Solaris disci obscuratam videbunt, majorem aut minorem, prout umbræ propiores, aut ab eâ remotiores fuerint. Et speciatim qui circa P degunt, dimidium Solis eclipsari videbunt. Qui vero regiones ultra M ad N usque colont, ii nullam Solaris disci partem obscuratam percipient.

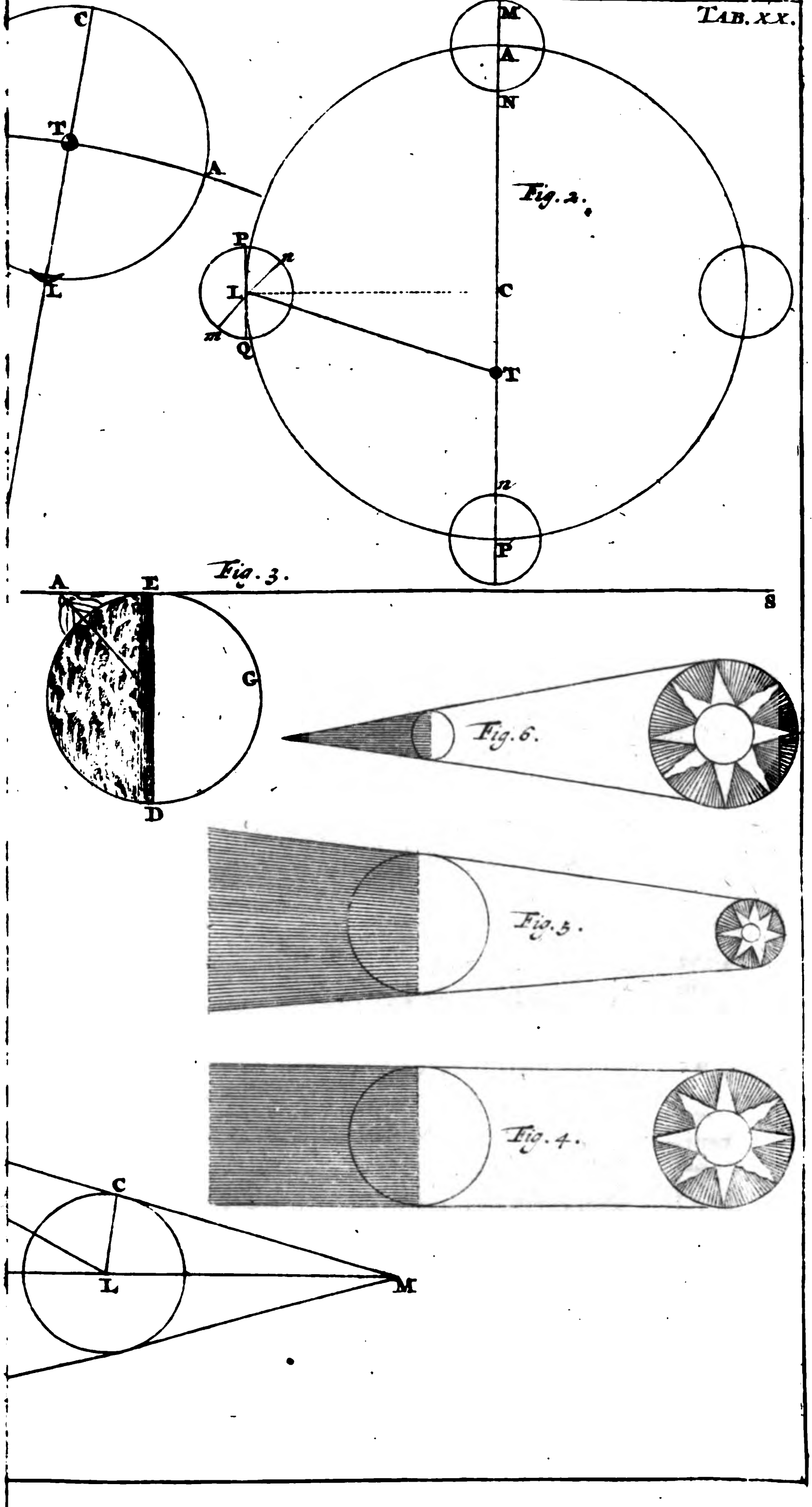
Hinc patet, nullam unquam fieri posse Eclipsin Lunæ nisi in Plenilunio, cum Luna scil. ad oppositionem Solis pervenerit; nec unquam contingere Eclipsin Solis, nisi in Novilunio, cum Luna in conjunctione cum Sole videtur. Cum itaque in singulis mensibus semel sit novilunium, semelque Plenilunium, quæratis fortasse Academici, cur non singulis mensibus Sol & Luna Eclipses patiantur? Et quidem si Luna in Eclipticæ plano semper incederet, cum Axis Umbræ Terrestris in eodem quoque sit plano, Luna Umbram Terræ semper in Plenilunio pervaderet, fieretque Lunæ Eclipsis totalis, & centralis. Quin etiam in singulis Noviluniis, ubi non nimium à Terrâ distat Luna, illa umbram in Terram projiceret, & Solem in aliquibus Terræ locis obscuraret. At ostensum est, planum orbitæ Lunaris non coincidere cum plano Eclipticæ, sed illud secare in rectâ quæ per Terræ centrum transit; adeoque Luna nunquam erit in plano Eclipticæ, nisi cum in hâc rectâ, hoc est in Nodis versatur, adeoque si contingat, ut Luna in plenilunio sit etiam in nodorum alterutro, Axis umbræ per Lunæ centrum transibit; fietque Eclipsis totalis & centralis. Exponat circulus MN umbræ Terrestris sectionem transversam, per orbitam Lunæ transeuntem, Linea CD portionem orbitæ Lunaris, quam percurrit Luna tempore Plenilunii, quæ cum sit exigua, per rectam repræsentari potest. Recta BGA sit in plano Eclipticæ. Sitque F Luna cum primo umbram ingreditur. E Luna ultimo egrediens. G Luna in ipso umbræ axe, patet hujusmodi Eclipsin totalem & centralem esse. Et quandocunque Lunæ & umbræ centra in nodo coincidunt, fient Eclipses totales & centrales. Hinc Duratio maxima Eclipsis Lunaris tanta esse potest, quanta æqualis sit tempori, quo Lunæ motus supra motum umbræ Terrestris inter-

Quare Sol & Luna Eclipses singulis mensibus non patiuntur.

Eclipses Lunæ totales & centrales.

TAB. 21. *fig.* 3.

TAB. XX.



interea factum sit per arcum FE, quæ quatuor diametris Lunaribus est æqualis, hoc est duobus circiter gradibus, quem arcum Luna quatuor horis plerumque absolvit.

Fieri etiam possunt Eclipses totales, quæ non sunt centrales, ubi nodus non in Axe, sed ne quidem intra umbram ponitur, uti figura ostendit. Potest etiam nodus tantum ab umbrâ distare, ut non nisi pars Lunæ illam subeat, fientque Eclipses partiales, uti figura monstrat, quæ erunt majores, aut minores, prout distantia Nodi ab umbra minor majorve fuerit. Quod si contingat, Nodum tempore Plenilunii, magis tredecim gradibus ab Axe Umbræ distare, tanta tunc erit Lunæ à plano Eclipticæ distantia, ut ab umbrâ intemerata maneat. *TAB. 21. fig. 4. Eclipses partiales. TAB. 21. fig. 5. 6.*

Ut umbra Terræ in Lunam projecta efficit Eclipsin Lunæ; sic vicissim umbra Lunæ, si in terram incidat, efficiet Eclipsin Terræ. At cum Luna multo minor sit Terrâ, non potest ejus umbra totum Terræ discum Tenebris involvere, sed exigua tantum ejus pars obscurabitur; & Eclipses hæ erunt omnes partiales; eæque solum partes tenebrescent, in quas incidit umbra Lunæ, & earum Incolæ Solem obscurari videbunt. Ideoque Eclipses Solis eas appellant, sed impropriè, cum Sol lucem omnem illibatam retineat; & tantum eæ Terræ partes, quæ sub umbra versantur, lumine orbantur. *Eclipsis Terræ.*

Sed ut Eclipsium Phænomena melius vobis Academici innotescant; Coni umbrosi, tam Terrestris, quam Lunaris, dimensiones exhibere convenit. Quod ut facilius fiat, libet sequens præsternere postulatum.

Si à centro Solis ducantur lineæ rectæ, ad quævis Telluris puncta, eæ omnes erunt quam proxime parallelæ, nam parallelæ sunt quæ non concurrent nisi ad infinitam distantiam; adeoque quæ non currant nisi ad distantiam respectu distantiæ linearum immensam, sunt Physice parallelæ, at tanta est distantia Terræ à Sole ut ejus Diameter si ad distantiam illam comparetur, puncti instar habeatur; quod omnes agnoscunt Mathematici, nam Telluris semidiameter è Sole visa sub angulo prorsus imperceptibili, seu qui oculis distingui nequit, apparet; & tanquam punctum indivi- *Lineæ à centro Solis ad Terram ductæ sunt quam proxime parallelæ.*

 sibile

sibile videtur; adeoque præ Solis distantiâ evanescet, & proinde lineæ omnes è centro ad Terram ductæ, erunt Physice parallelæ. Præterea, si recta linea in alias duas incidens, faciat duos internos angulos æquales duobus rectis, erunt lineæ in quas incidit, inter se parallelæ; per *prop.* 29. *El primi.* Sit jam AB semidiameter Terræ, C Solis centrum, ductis AC, BC, per 32. *El. primi* erunt anguli A, B, & C æquales duobus rectis, sed angulus C evanescit, & est nihilo fere æqualis, cum Tellus è Sole visa, ut punctum appareat, ergo anguli A & B sunt duobus rectis æquales, & proinde rectæ AC, BC, sunt quam proximè parallelæ. Sic etiam duo fila, ponderibus appensis pendula, pro parallelis habentur, attamen filorum directiones si producantur, concurrent ad centrum Terræ, ad quod Gravia omnia tendunt.

Tab. 21. fig. 7.

Quæ de Terrâ hic ostensa sunt, de Lunâ quoque magis vera erunt; nam ejus semidiameter ad distantiam Solis minorem habet rationem, quam Terræ semidiameter ad eandem. At non tantum lineæ à centro Solis ad quævis in Terrâ Lunave puncta ductæ, pro parallelis habendæ sunt, sed etiam duæ lineæ à centro Solis ad Terræ Lunæque centra ductæ à parallelissimo sensibiliter non aberrabunt. Nam angulus quem continent præsertim in *Syzigiis* tam parvus est, ut tuto negligi potest, ejusque neglectus calculum, & Eclipsium Phases, minime turbabit.

Hoc etiam Lemma demonstratu facile præmittimus.

Tab. 21. fig. 8.

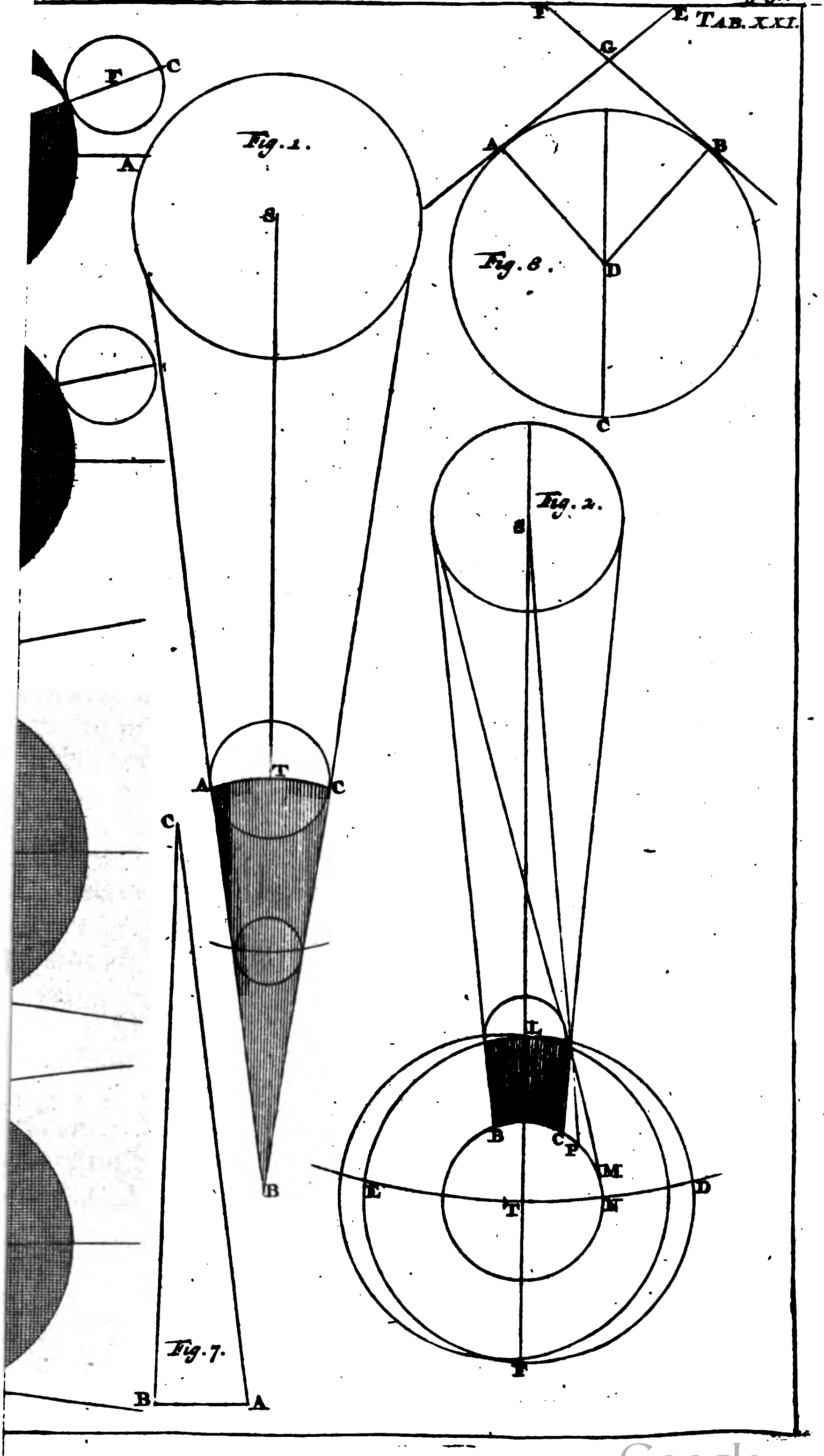
Si circulum ABC *tangant rectæ* AE, BF, *& a punctis contactuum ad centrum ducantur rectæ* AD, BD, *Angulus ad centrum ductis lineis contentus, æqualis erit ei quem continent rectæ tangentes.*

Nam in quadrilatero GADB, omnes anguli efficiunt quatuor rectos, sed anguli A, & B, sunt recti per 18. Elem. tertii, quare anguli AGB & D sunt æquales duobus rectis: sed per 13. *El. primi* AGB & AGF sunt æquales duobus rectis, quare angulus D erit æqualis angulo AGF.

Dimensio anguli coni Umbrosi. Tab. 22. fig. 1.

Circulus ABK repræsentet Telluris globum, AM rectam quæ Terræ & Solis centra conjungit, ad quam sit perpendicularis semidiameter Terræ CB. si à B ad centrum Solis du-

TAB. XXI.



ducatur recta BF, erit illa ad CM parallela, uti ostensum fuit, saltem recta illa à parallelâ minime positione differet. Fiat angulus BCD æqualis semidiametro apparenti Solis, hoc est æqualis angulo sub quo semidiameter Solis è Terra videtur, & per D ducatur tangens DG, eritque per Lemma superius traditum, angulus GEF, æqualis angulo BCD, seu semidiametro apparente Solis, adeoque cum BF ad centrum Solis tendit, recta GED Solis limbum tanget, & Terram quoque in D stringet, & producta cum HC concurret in H, eritque angulus DHC semiangulus Coni umbrosi. Sed quia FE est ad MH parallela, DHC angulus æqualis erit GEF angulo, *per 29. El. primi* hoc est semidiametro apparenti Solis. Adeoque totus angulus coni æqualis est diametro apparenti Solis.

Similiter in Luna hoc idem demonstrari potest, & eâdem manente Solis diametro, in omnibus sphæris, quæ Tellure non sunt majores, æquales erunt anguli Conorum quæ umbras includunt, & Coni umbrosi erunt semper figuræ similes. Quod hâc etiam ratione demonstrari potest. *In omnibus sphæris anguli conorum, qui umbras includunt, sunt æquales.*

Sit AGF Sol, DEH Terra, vel aliud quodvis corpus Sphæricum Terrâ non majus, SC linea jungens centra Solis & Terræ; AD recta quæ utramque sphæram tangit cum SC productâ concurrens in M. Erit angulus AMS semiangulus Coni umbrosi. Et in triangulo SDM, angulus externus ADS, æqualis est duobus internis & oppositis DMS, & DSM; sed angulus DSM sub quo scil. è Sole videtur semidiameter Terræ, fere nullus est. Nam Terra, uti sæpius dictum est, è Sole visa ut punctum apparet. Quare erit angulus DMS semiangulus Coni æqualis angulo ADS semidiametro apparenti Solis. Q.E.D. *TAB. 22. fig. 2.*

LECTIO XII.

De Penumbra ejusque Cono, de Coni umbrosi altitudine, & Umbrarum diametris apparentibus.

Præter umbram omni luce privatam, est & spatium quoddam Penumbrosum, quod ab aliquibus Solis radiis il- *Penumbræ quid?*

lustratur, reliquis per opacam Sphæram interceptis; cujus partes diversos obtinent illuminationis gradus, scil. minores aut majores, prout umbræ propiores sunt, aut ab eâ remotiores: hoc spatium *Penumbra* dicitur; eamque sic determinamus.

Tab. 22. fig. 3. Exponat circulus AEFG Solem, HED sphæram quamlibet opacam, v. gr. Lunam, SC sit linea centra conjungens; ducatur recta FDO inferiorem Solis limbum, superioremque Lunæ contingens. Item AHP superiorem Solis, & inferiorem Lunæ limbum lambens, quæ rectam SC secent in I. Si manente puncto I immobili, recta IDO, vel IHP, indefinite protensæ, & Lunæ Globum semper contingentes, motu conico circa Axem IM vertantur, generabitur superficies conica Indefinita PHDO umbram perfectam includens, & etiam spatium circumambiens ODM, PHM, à quo radii ab aliquibus Solaris disci partibus prodeuntes arcentur per interpositam sphæram opacam; hoc spatium *Penumbra* dicitur, quæ obscurior est in X & Y versus coni umbrosi oras quam in V & N quæ loca à superficie Penumbræ conicâ minus distant. Nam loca X & Y à minore Solaris disci parte illustrantur, quam reliqua ab axe Coni magis remota. Si itaque Tellus intra hoc spatium versetur, quædam superficiei Terrestris pars ad S potest totalibus tenebris includi. Et spectatores in eâ degentes totalem Solis Eclipsim videbunt. At qui extra Umbram degunt, in cono tamen Penumbroso locati, ut ad Q aliquam saltem Solaris disci portionem videbunt, reliquâ per Lunam tecta. Nam ducatur QD Lunam tangens & ad Solem producta, manente puncto Q, si motu conico circumagatur QD indefinite protensa; superficies quam describit Conicam abscindet Solaris disci portionem à Luna tectam.

Coni penumbrosi dimensio Tab. 22. fig. 4. Coni penumbrosi dimensio hac ratione habetur. Circulus HDL sphæram opacam v. gr. Lunam repræsentet; cujus & Solis centrum conjungat linea SC, ad quam perpendicularis sit semidiameter Lunæ CB, & eidem parallela BF, Lunam tangens. Fiat angulus BCD æqualis apparenti Solis semidiametro, per D ducatur tangens DG, eritque per Lemma, ma, angulus FEG æqualis angulo BCD, seu semidiametro Solis; adeoque cum EF ad centrum Solis tendat, EG Solem ad superiorem marginem continget. Sed & Lunam quoque tangit; adeoque puncto ejus I manente immobili, si motu conico feratur, conum penumbrosum efficiet. Ob parallelas autem EF, CS, erunt anguli FEI, EIC alterni æquales. Sed angulus EIC est semiangulus Coni Penumbrosi. Et est FEI semidiameter apparens Solis; erit itaque semiangulus Coni semper æqualis semidiametro apparenti Solis. Conus itaque umbrosus & Penumbrosi pars ea quæ Solem & sphæram opacam interjacet, sunt figuræ similes & æquales, habent enim angulos & bases æquales.

Coni umbrosi terrestris altitudo sic invenitur. Sit CT semidiameter Terræ, TM altitudo Coni. Posito TM radio erit CT sinus anguli TMC semianguli coni, qui æqualis est semidiametro apparenti Solis, in mediocri ejus distantia, circiter 16′; Fiat igitur ut sinus 16′, ad radium, ita semidiameter Terræ, ad quartum; & invenietur TM æqualis 214,8. semidiametris Terrenis. At quando Terra maxime à Sole distat, semidiameter Solis seu semiangulus Coni est 15′: 50″ & tunc altitudo umbræ evadit æqualis 217 semidiametris Terræ. Cum Terræ diameter sit ad diametrum Lunæ ut 100 ad 28. erit Altitudo Coni terrestris ad altitudinem coni umbrosi Lunæ in eadem ratione; sunt enim Figuræ similes, adeoque erit æqualis 59. 36 semidiametris Terræ. Hinc si distantia Lunæ à Terra ejus mediocrem distantiam (quæ 60 circiter semidiametris Terræ æqualis est) superet, umbrosus Lunæ Conus ad Terram non pertinget; in quo casu, Eclipsis potest esse centralis, at non Totalis; sed circa Lunam luminosus Solis circulus quasi annulus, aureus eam cingens, apparebit. Sequitur etiam quod si tempore Eclipseos, Anomalia Lunæ minor sit tribus signis, aut major novem, fieri non potest Eclipsis Solis totalis; in his enim omnibus Anomaliæ gradibus, Lunæ distantia est major media.

Altitudo Coni umbrosi Terræ. *Tab. 22. fig. 5.*

Altitudo Coni umbræ Lunæ.

Ut inveniatur quanta Terrenæ superficiei pars Lunari umbra involvi potest. Ponamus distantiam Solis esse maximam, in quo casu Altitudo Coni umbrosi est maxima, scil. circiter

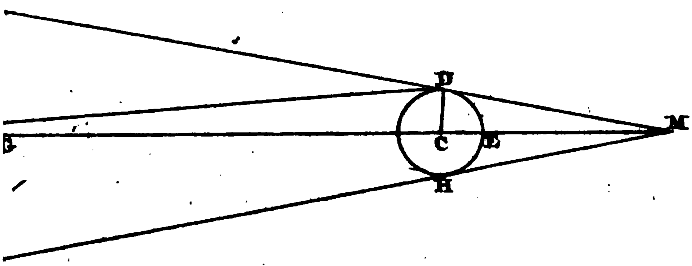
Quanta superficiei Terrestris pars Umbrâ includi potest.

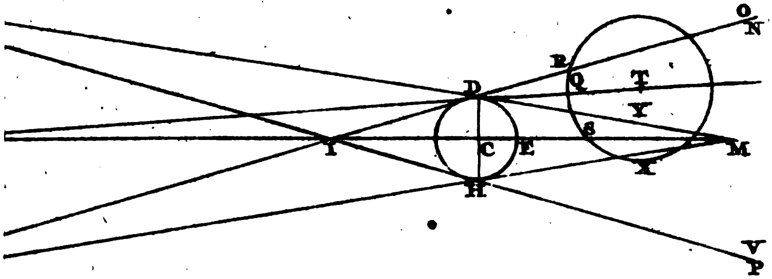
ter 60 semidiametris Terræ. Ponamus etiam distantiam Lunæ à Terra esse minimam, ut crassior pars umbræ in Terram incidat, estque hæc distantia minima æqualis circiter 56. semidiametris Terræ.

Tab 23. fig. 1. Sit L Luna, ABD, Terra, cujus centrum T, LM altitudo coni umbrosi, æqualis 60 semidiametris Terræ; LT distantia Lunæ à Terra æqualis 56 semidiametris. Erit itaque TM æqualis quatuor semidiametris Terræ, unde TB, ad TM, ut 1, ad 4, sed ut TB, ad TM, ita sinus anguli TMB, ad sinum anguli TBM, est vero angulus TMB 15′: 50″ adeoque innotescet angulus TBM 63. min. primis cum 13 secundis cui si addatur angulus TMB 15′: 50″; habebitur angulus ATB, qui his duobus est æqualis nempe 79 min. prim. quibus æqualis est arcus AB, cujus duplum BAC est 158 min. seu 2 grad. 38 minut. seu milliaribus Anglicanis 180 circiter. Supponimus hic Axem umbræ transire per centrum Terræ; At si Axis hic sit ad Terræ superficiem obliquus, Conus oblique secabit superficiem Terræ & figura umbræ evadet Ovalis.

Quantam superficiei partem penumbra continet. Tab 23. fig. 2. Si quæratur quanta superficiei Terrestris pars potest in Penumbra Lunari contineri; illam hac ratione exquirere licet. Ponamus apparentem Solis diametrum esse maximam, cum scil. Terra est in Perihelio, estque illa 16′: 23″ Sit jam ABD Terra, L Luna, AMB semiangulus coni Penumbrosi 16′ 23″. unde invenietur altitudo LM æqualis 58 semidiametris terrestribus. Sit Luna in Apogeo, adeoque in distantiâ à Terra maximâ, quæ est 64 semidiametris Terræ; hinc est TM æqualis TL+LM æqualis 122 semidiametris Terræ, adeoque TB, ad TM, 1 ad 122; sed per Theorema Trigonometricum est TB, ad TM, ut sinus anguli TMB scil. sinus 16′: 23″ ad sinum anguli MBN, qui itaque erit 35°: 42′. à quo si substrahatur angulus TMB, 16′ 23″, restabit angulus MTB, seu arcus AB 35°. 25: cujus duplus est arcus CAB æqualis 70. grad. min. 50. qui constat circiter 4900 milliaribus Anglicanis.

Apparens diameter Umbræ terrestris. Si conus Terræ umbrosus, ad Lunæ cælum plano transverse secetur, Sectio fit circulus, quæ umbra dicitur, cujus





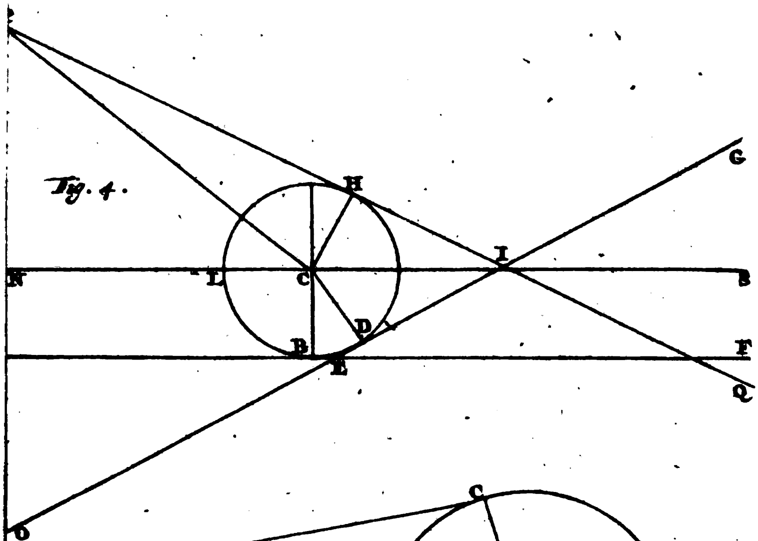


Fig. 4.

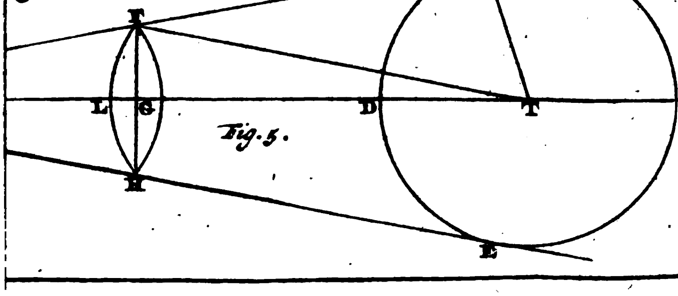


Fig. 5.

jus apparens diameter è centro Telluris visa sic determinatur: sit T centrum Terræ, CMT semiangulus Coni umbrosi; FLH sectio umbræ ad Lunæ cælum, ejusque diameter FH. Ex noto semiangulo coni innotescet ejus altitudo TM; datur etiam TL distantia Lunæ à Terra; unde innotescet quoque ML, sed datur angulus FML, æqualis scil. semidiametro Solis apparenti; anguli autem sub quibus idem objectum videtur, sunt reciproce ut distantiae unde videtur objectum; quare si fiat ut TG ad MG., ita angulus FMG notus ad angulum FTG, qui propterea innotescet. *Tab. 22. fig. 5.*

Quin etiam hâc ratione obtineri potest angulus FTG; scil. datâ FT distantiâ Lunæ à Terrâ & CT semidiametro Terræ, dabitur angulus CFT semidiameter apparens Terræ è Luna visa quæ *Parallaxis Lunæ horizontalis* dicitur, utpote quæ eidem est æqualis; quare in triangulo TFM; est angulus externus CFT, æqualis duobus internis & oppositis; adeoque si ab angulo CFT noto, auferatur angulus FMT notus, restabit angulus FTM vel FTG apparens umbræ semidiameter. Apparentes autem Terræ semidiametri seu Lunæ Parallaxes horizontales, pro variis ejus à Terrâ distantiis, habentur in Tabulis Astronomicis. *Alia methodus idem exquirendi.* *Parallaxis Lunæ horizontalis.*

Sit vel ☊ L portio orbitæ Lunaris, quam Luna prope plenilunium percurrit, quæ cum parva sit pro recta haberi potest, per quam transeat planum ad Eclipticæ planum normale illudque secat in recta ☊ M, in quam ex L cadat perpendicularis LG, circulus FMO repraesentet umbram Terræ, cujus centrum G, erit GL latitudo seu distantia Lunæ ab Eclipticâ, momento plenilunii, quæ parum differt à Lunæ distantia minima. Patet si GL Latitudo Lunæ major sit quam summa semidiametrorum umbræ & Lunæ, tunc Lunam in umbram non incurrere. Neque fiet Eclipsis. At si Latitudo Lunæ sit huic summæ æqualis, Lunæ limbus tanget umbram, sed non ingredietur. Si Latitudo Lunæ sit minor summâ semidiametrorum umbræ & Lunæ, at major earum differentiâ, fiet Eclipsis partialis. At si Latitudo sit minor eâdem differentiâ semidiametrorum umbræ & Lunæ Eclipsis erit totalis. Hinc innotescent termini Ecliptici, quibus si distantia Lunæ à nodo sit minor, tempore Plenilunii fieri potest *Quando fient Eclipses Lunæ.* *Tab 23. fig. 3. 4. 5.* *fig. 3.* *fig. 4.* *fig. 5.* *Termini Ecliptici.*

 test

TAB.23. fig. 6. test Ecclipsis: si major, non potest. Referat ☊ S portionem Eclipticæ, ☊ L portionem orbitæ Lunæ, SL latitudinem Lunæ tempore plenilunii; quæ latitudo sit talis, ut Lunæ limbus tangat circulum umbrosum, sitque Nodus ad ☊, angulus L☊S est inclinatio orbis Lunaris ad Eclipticam 5 circiter graduum, & LS Latitudo Lunæ, ubi ejus limbus contingit umbram 66'. min. Itaque datis LS & angulo L☊S invenitur ☊ S seu distantia puncti Eclipticæ Soli oppositi, à nodo scil. 754. min. seu 12 gr. 34' unde si longius distet punctum Eclipticæ Soli oppositum, vel Luna à ☊. nulla erit Eclipsis.

TAB.23. fig. 7. Sit L Lunæ centrum, ejus Conus umbrosus DME, hic conus ad distantiam Terræ plano transverse secetur, sectio fiet circulus, cujus semidiameter dicitur semidiameter umbræ Lunæ; angulus autem, sub quo semidiameter umbræ ex Lunâ visa apparet, æqualis est differentiæ semidiametrorum apparentium Solis & Lunæ è Terra visarum. Est enim angulus LPD semidiameter apparens Lunæ, æqualis duobus internis angulis PLM, & PML; unde angulus PLM vel PLT semidiameter apparens umbræ æqualis est angulo LPD dempto angulo LMP, hoc est semidiametro Lunæ apparenti dempta semidiametro apparenti Solis.

Apparens umbræ Lunaris diameter è Luna visâ.

Sit L Luna, AMB conus penumbrosus ad terram usque protensus, ejusque Axis MT; si conus per T transverse plano secetur, fiet circulus, cujus semidiameter AT, dicitur Penumbræ semidiameter; & angulus sub quo illa ex Lunâ apparet est TLA, qui cum trianguli LMA externus sit angulus, erit æqualis internis & oppositis LAM & LMA; sed angulus LMA est semiangulus coni, & æqualis semidiametro apparenti Solis & MAL seu CAL æqualis est semidiametro apparenti Lunæ, ex Terra conspectæ, unde semidiameter apparens Penumbræ ex Lunâ visa, æqualis erit summæ semidiametrorum apparentium Solis & Lunæ.

Apparens Penumbræ diameter. TAB.20. fig. 7.

Via Lunæ à Sole. Si nullus esset motus Solis apparens, ex motu reali Terræ ortus, *via Lunæ a Sole* eadem esset ac via in propria orbita. At quia dum Luna in orbita progreditur, Sol etiam in Ecliptica incedere videtur, via Lunæ à Sole diversa erit

ab

ab orbitâ Lunæ, ejusque inclinatio ad Eclipticam major erit inclinatione orbitæ Lunaris ad eandem. Sit ☊ A Lunaris orbitæ portio, & Sol & Luna conjungantur in ☊ deinde dum Luna in orbita describit spatium ☊ L, Sol in Ecliptica per spatium ☊ S motu apparenti feratur, erit SL via Lunæ à Sole. At si duo corpora secundum eandem plagam ferantur, motus ipsorum relativus, quo unum ab altero recedit, idem erit ac si corpus tardius motum quiesceret, & alterum cum velocitatum differentia latum esset, ut in Lectionibus Physicis demonstratur. Per Lunæ locum L ducatur BL Eclipticæ parallela, cui sit perpendicularis ☊ B. Et dum Luna in orbitâ lineam ☊ L describit motus ejus secundum Eclipticam erit per spatium æquale BL, sit L l æqualis S ☊, & ducta ☊ l, erit ea ad SL parallela, motusque Lunæ à Sole, idem erit ac si Sol in ☊ quiesceret, & Luna secundum Eclipticam lata esset, velocitate Bl, velocitatum scil. differentiâ. Cum autem anguli BL☊, & Bl☊ parvi sint, erit angulus BL☊ ad angulum Bl☊, ut Bl ad BL; hoc est ut differentia motuum Solis & Lunæ secundum Eclipticam ad motum Lunæ in Eclipticâ, ita erit angulus quem facit orbita Lunæ cum Ecliptica, ad angulum B l ☊; qui æqualis est angulo l☊E, seu LSE angulo inclinationis viæ Lunæ à Sole cum Eclipticâ. TAB. 25. fig. 8.

Hinc quoque innotescet angulus, quem circulus Latitudinis per quodvis Eclipticæ punctum ductus facit cum via Lunæ à Sole. Nam in Triangulo Sphærico rectangulo, quem Ecliptica, via Lunæ, & circulus Latitudinis faciunt, datur unus angulus, Inclinatio viæ Lunæ ad Eclipticam, & basis, distantia scil. circuli Latitudinis à Nodo, unde & alter angulus acutus dabitur.

LECTIO XIII.

De Projectione Umbræ Lunaris in Telluris Discum.

SI linea recta in planum sibi parallelum projiciatur, demissis à singulis ejus punctis perpendicularibus in planum, Projectio, seu locus ubi perpendiculares planum offendunt, erit linea recta priori parallela, & æqualis; nam perpendiculaculares, quæ ab extremis Rectæ punctis in planum ducuntur, sunt parallelæ & æquales, unde quæ ipsas conjungunt rectæ lineæ, æquales & parallelæ erunt. Hinc si duæ rectæ lineæ sese contingentes, plano alicui sint parallelæ, ipsarum in planum illud Projectiones, & ipsæ rectæ lineæ æquales angulos continebunt, uti liquet per 10. El. XI. Adeoque si Figura quælibet plana in planum sibi parallelum projiciatur, Projectio erit figura ei similis & æqualis.

At si linea ad planum inclinetur, ejus projectio, demissis perpendicularibus in planum, erit ad ipsam lineam, ut cosinus anguli inclinationis ad radium. Sit AB linea ad planum inclinata, & DE repræsentet planum ad quod inclinatur, demissis à punctis A & B perpendicularibus rectis A *a* B *b*; erit *a b* projectio lineæ AB, cui si ducatur per B parallela BC perpendiculari A *a* occurrens in C, erit BC æqualis *ab*; sed est BC ad AB, ut cosinus anguli ABC ad radium; unde erit *ab* ad AB, ut cosinus anguli inclinationis ad radium. Hinc sequitur figuram omnem, cujus planum ad planum projectionis est perpendiculare, projici in lineam rectam. Nam perpendiculares à quibusvis plani punctis in planum projectionis demissæ, semper cadent in communem planorum sectionem. Hujusmodi linearum & Figurarum projectio Dicitur *Projectio Orthographica*.

Tab. 23. fig. 9.

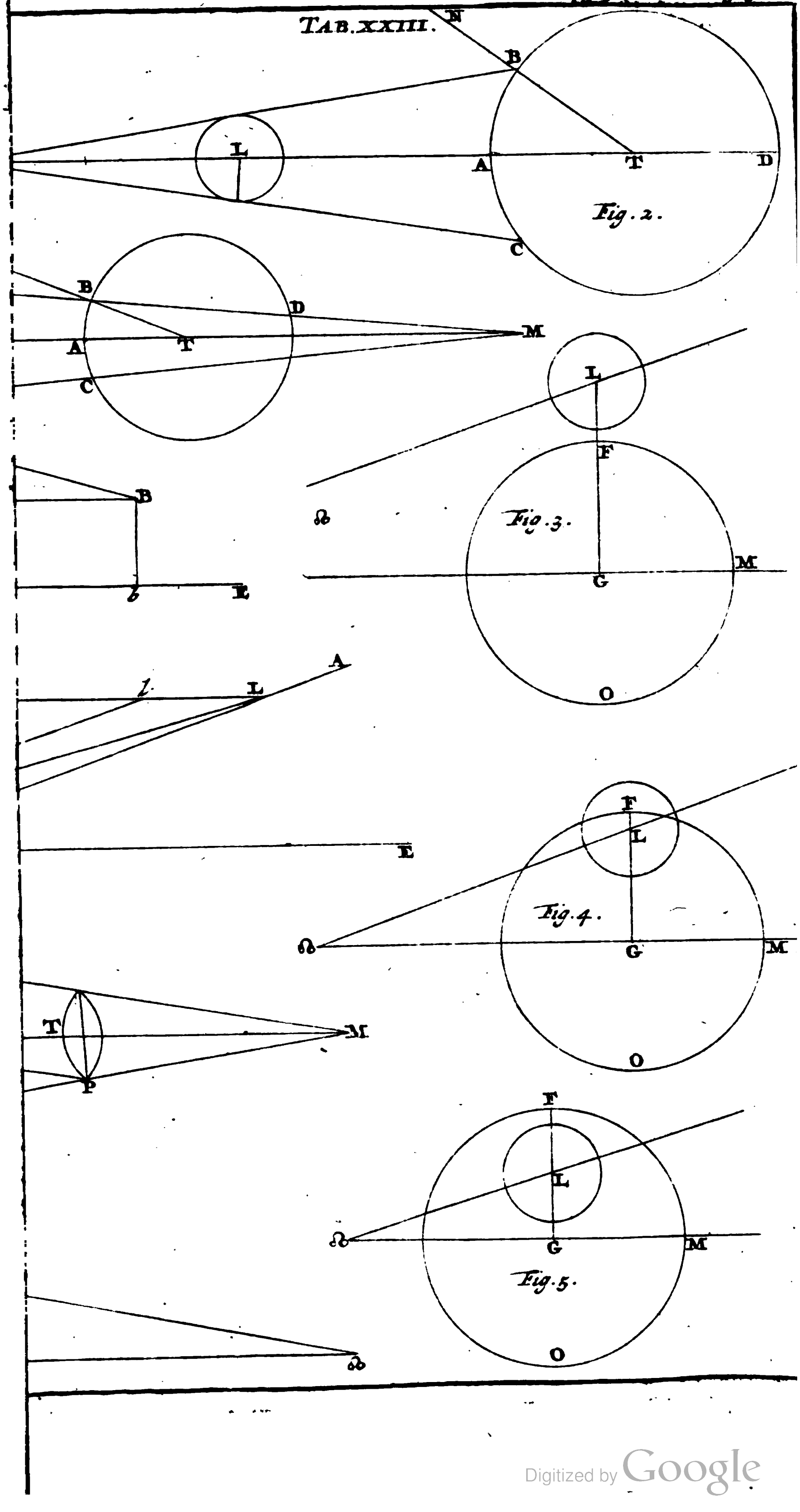
Projectio Orthographica.

Si per Telluris centrum transire concipiatur Planum, ad quod recta, Solis & Terræ centra conjungens, sit perpendicularis, planum hoc in Terrâ efficiet circulum, qui Hemisphærium illustratum à tenebroso distinguet; quemque circulum lucis & umbræ Finitorem in superioribus lectionibus nominavimus; hic *Telluris Discum* appellari illum liceat, qui discus spectatori in Lunæ cœlo, & in recta quæ centra Solis & Terræ conjungit constituto, directe obvertitur, & in illum Æquator Terrestris, ejusque Paralleli, Poli & circuli omnes in superficie Terræ projici videntur. Nam rectæ è centro Solis ad quælibet disci puncta censendæ sunt parallelæ, adeoque cum ea linea, quæ ad centrum disci ducitur, sit ejus plano perpendicularis, erunt reliquæ omnes, a centro Solis ductæ & per quælibet Telluris puncta trans-

Telluris Discus

Projectio in Discum Orthographica.

euntes


TAB. XXIII.
N
B
L
A
T
D
C
Fig. 2.
B
D
M
A
T
C
L
F
B
Fig. 3.
M
G
b
E
O
A
L
E
F
L
Fig. 4.
M
G
O
T
M
P
F
L
M
G
Fig. 5.
O

euntes lineæ, ad disci planum normales. Præterea per conversionem Telluris circa proprium Axem, Regiones omnes Terrestres, Civitates & oppida, semitas in hoc disco describere à spectatore in Lunæ coelo conspicientur. Nam vertigine diurnâ Æquatorem, vel ei parallelos describunt, & si Sol sit in Æquinoctiali plano, hi circuli, cum in hoc casu sint ad planum disci recti, in rectas lineas projicientur: at in aliis casibus projicientur in Ellipses quæ erunt semitæ, quas spectator loca Telluris in disco percurrere videbit. Et si per Polum Telluris circulus immobilis traducatur, cujus Planum productum per Solem transeat, fiet Meridianus Universalis; ad cujus Planum cum locus quilibet pervenerit, fit istius loci incolis meridies: cum vero locus quilibet marginem disci occidentalem primo attigerit, istius loci incolæ Solem orientem videbunt. At spectator in Lunæ cælo, locum in disco oriri aspiciet; & versus orientem progredi, cumque meridianum transiverit, locus Sole orientalior factus Sol è Terra versus occidentem vergere apparebit; ad marginem denique disci orientalem pervento loco, mox is occidere & in tenebrosâ Telluris parte se abscondere, è Luna videbitur, cum Loci Incola Solem occidentem & è conspectu ejus sese subducentem videbit.

Meridianus Universalis.

Disci magnitudo per angulum sub quo Terræ semidiameter è Luna videtur, æstimatur; Estque idem angulus qui Parallaxis Lunæ Horizontalis dicitur. Et si a Lunâ in planum Eclipticæ perpendicularis demittatur, quæ Lunæ distantiam ab Ecliptica metitur, erit hæc linea plano disci parallela, adeoque in rectam sibi æqualem & parallelam projicietur in planum disci; eritque angulus sub quo projectio è Luna apparet, æqualis angulo sub quo ipsa perpendicularis è Terra videtur; nam æquales rectæ ex æqualibus distantiis directe visæ, sub æqualibus angulis videntur.

Disci magnitudo.

Via Lunæ à Sole, si ejus capiatur pars illa exigua, quæ tempore Eclipsis Disco obvertitur, pro recta linea haberi potest; & in disco in rectam sibi æqualem projicietur, ejusque projectio cum circulo Latitudinis projecto eundem angulum continebit, quem via Lunaris facit cum eodem in

Via Lunæ à Sole in discum projecta.

Ecliptica. Hanc lineam centrum Penumbræ in plano disci exceptæ percurrere videbitur.

Tab. 24. fig. 1. Latitudo Lunæ in discum projecta.

Circulus DKG Telluris discum repræsentet, cujus semidiameter tot contineat partes quot parallaxis Lunæ horizontalis, seu semidiameter apparens Terræ è Luna visa constat scrupulis. Linea NT sit distantia Lunæ à plano Eclipticæ tempore novilunii in planum disci projecta, tot etiam constans partibus, quot Latitudo Lunæ habet scrupula. ☊ K Eclipticæ portio ☊ *l* viæ Lunaris à Sole portio in disci planum projectæ. Ex centro disci T, in Penumbræ semitam demittatur perpendicularis TV; hæc recta metitur minimam distantiam centrorum Disci & Umbræ Lunaris. Centro V describatur circellus parvus, cujus semidiameter sit æqualis excessui semidiametri Lunæ apparentis supra Solis apparentem diametrum: circellus ille umbram Lunarem exponet, nam ostensum est Umbram illam è Luna visam æqualem esse differentiæ apparentium diametrorum Solis & Lunæ. Rursus si describatur circulus HM priori concentricus, cujus semidiameter VM sit ad semidiametrum disci, ut summa semidiametrorum Solis & Lunæ ad diametrum apparentem Terræ, seu ad parallaxem Lunæ horizontalem circulus hic penumbram Lunarem exponet, in ejus distantiâ à centro disci minimâ. Ostensum enim est semidiametrum apparentem penumbræ huic summæ fuisse æqualem. Adeoque si hic circulus discum non attingat, nulla omnino futura est Solis Eclipsis; hoc est si distantia illa VT major sit summâ semidiametrorum disci & Penumbræ, vel quod idem est, major summâ semidiametrorum Solis & Lunæ & Parallaxis Lunæ horizontalis, nulla habebitur Eclipsis: si distantia VT huic summæ sit æqualis, Penumbra Terram stringet, in illam tamen non incurret. At si VT sit hâc summâ minor, hoc est si VT, sit minor quam VM, & TR, aliquam disci Telluris partem Penumbra teget. Et qui segmento RZMY includuntur, Eclipsim Solis partialem saltem videbunt.

Quando Terra ab Eclipsi immunis est.

Tab. 24. fig. 2. Quando Eclipses Partiales.

Si vero distantia minima TV, sit minor differentiâ semidiametri disci, & circelli penumbrosi, hoc est si minor sit differentiâ semidiametrorum Solis & Lunæ & Parallaxi Lunæ ho-

Quando Eclipses Solis totales.

horizontali simul sumptis, circellus umbrosus aliquam disci partem percurret, inque iis locis per quæ transit, Eclipsim Totalem Solis efficiet. Eclipsis illa Totalis semper fit sine notabili morâ, quia circellus admodum parvus est, cum Lunæ apparens diameter Solis apparentem diametrum parum superet: & raro excessus hic seu diameter umbræ duobus minutis primis adæquatur, quod spatium in plano disci ab umbra percurretur quatuor circiter horæ minutis primis; ejus tamen mora in aliquo loco longior esse potest, ob motum loci interea factum secundum eandem plagam. Tab. 24. fig. 3.

Hinc innotescent termini Ecliptici, seu distantia Lunæ à nodo tempore conjunctionis ut possibilis sit Eclipsis Solis; Sit enim circulus ROG discus Terrestris, ☊ TK linea sit intersectio plani Eclipticæ cum plano disci, estque projectio portionis Eclipticæ in idem planum ☊ N portio viæ Lunaris in planum disci projectæ. TV minima distantia centrorum umbræ & disci similiter projecta, æqualis semidiametro disci & semidiametro penumbræ simul sumptis: in Triangulo ☊ TV, datur latus TV, quod cum maximum est, 94½ minutis primis constat, datur quoque angulus ad ☊ qui cum minimus est, constat gradibus 5. min. 30. unde invenietur ☊ T æquale 986 minutis primis seu grad. 16. min. 26., cumque in hoc casu penumbra Telluris discum tantùm stringit, necesse est ut tempore noviluni Ecliptici Luna à nodo minus distet quam 16 gr. 26. *Termini Ecliptici.* Tab. 24. fig. 4.

Referat ut prius RKG discum Terrestrem, ☊ TK portionem Eclipticæ in disci planum projectam, ☊ *l* semitam centri penumbræ per discum transcurrentis, erit TN Latitudo Lunæ, & TV minima distantia centrorum umbræ & disci. Sit circulus OPQ penumbra, à D per VN ad *l* pergens, in cujus medio est circellus umbram repræsentans, sitque notum tempus conjunctionis, seu cum penumbræ centrum est in N, quod per Tabulas Astronomicas datur; dabitur inde tempus cum centrum Umbræ est in V, hoc est tempus Eclipsationis mediæ. Nam in triangulo rectangulo TVN, datur TN latitudo Lunæ, & angulus TNV, quem circulus Tab. 24. fig. 5. *Tempus Eclipsationis mediæ.*

Latititudinis facit cum via Lunæ unde innotescet VN, & TV; sed ex motu Lunæ à Sole dabitur tempus, quo umbræ centrum percurrit spatium VN, hoc tempus à tempore conjunctionis subductum, vel additum, dabit tempus Eclipsationis mediæ. Præterea in triangulo rectangulo DTV, dantur DT summa semidiametrorum disci & Penumbræ, & TV distantia minima jam inventa, ex his innotescet DV, & inde tempus quo umbra percurret arcum DV, hoc est semiduratio Eclipseos in disco, & hinc quoque datur punctum temporis quando Penumbra discum primo attingit, & similiter invenietur tempus quando ipsum relinquit.

Semiduratio Eclipseos.

Locus cui Sol dato temporis momento est verticalis.

Dato Loco Solis in Eclipticâ pro quovis temporis momento, exinde innotescet locus in superficie terrestri, cui Sol eo momento est verticalis, seu in cœli puncto altissimo. Nam loci Latitudo est æqualis declinationi Solis, seu distantiæ ejus ab æquatore; & Longitudo a loco quo tempus computatur habetur, vertendo tempus à meridie in gradus & minuta Æquatoris, singulis horis quindecim gradus, singulisque minutis quindecim gradûs minuta assignando, v. gr. Longitudo loci in cujus vertice est Sol, cum Oxonii hora nona & dimidia matutina numeratur, habetur substrahendo 9 h. 30′ à 12 & restabunt horæ 2. 30′ quæ in 15 ductæ efficiunt gradus 37: minut. 30. Locus itaque ille erit gr. 37, min. 30. Oxonio orientalior.

Elevatio Poli supra discum.
Tab. 24. fig. 6.

Circulus FRK ut prius repræsentet Telluris discum, FTK portionem Eclipticæ in discum projectam, cui sit normalis TR, erit illa axeos Eclipticæ projectio & punctum R ejusdem polus, sitque P polus Terræ projectus. Per T & polum P concipiamus transire circulum TPS qui meridianum universalem repræsentet, & Elevatio Poli supra disci planum æqualis erit declinationi Solis. Nam arcus meridiani inter Solem & disci peripheriam interceptus est circuli quadrans; & arcus ejusdem meridiani inter æquatorem & polum est quoque circuli quadrans. Quare ab æqualibus ablato communi TP, erit PS elevatio poli supra discum, æqualis distantiæ Solis ab Æquatore.

Notandum est quando Sol tenet signa ♑ ♒ ♓ ♈ ♉ ♊ seu po-

potius quando Terra tenet signa opposita, Punctum S, ubi meridianus disci peripheriæ occurrit, cadere ad dextram Poli Eclipticæ, at quando in reliquis sex signis sit, punctum illud erit ad sinistram respectu poli Eclipticæ, secus ac fit ubi projectio concipitur fieri in plano ad Lunæ cælum, quod est ad planum disci parallelum; quodque per rectam jungentem Solis & Terræ centra transit.

Positio meridiani per Solem transeuntis determinatur.

Ut habeatur angulus RTS, seu disci arcus RS, inter polum Eclipticæ & meridianum interceptus; In triangulo Sphærico rectangulo RSP, datur arcus RP, distantia Poli Eclipticæ, ab æquatoris polo scil. 23½ grad. Item latus PS æquale declinationi Solis. Quare per Trigonometriam innotescet latus RS, seu mensura anguli RTS. In TS capiatur TP æqualis consinui declinationis Solis posito TS radio & erit P Punctum in quod projicitur Polus.

Determinatur locus Terræ in quem penumbra primo incidit.

Ut habeatur locus Terræ Q. ubi penumbra discum primum attingit, seu ubi Sol oriens in supremo sui puncto deficere videtur, ducatur per polum meridianus PQ ad punctum Q, ubi penumbra primo tangit discum. Et primo in triangulo rectangulo rectilineo DTV ex datis DT TV, innotescet angulus DTV, cui si addatur vel subtrahatur angulus datus VTP, qui est summa vel differentia notorum angulorum VTN, NTP, dabitur angulus QTP. Hinc in Triangulo in superficie terræ Sphærico rectangulo SPQ, datur SP æqualis declinationi Solis & arcus SQ qui est mensura anguli STQ; dabitur inde arcus PQ complementum Latitudinis loci Q. Item dabitur SPQ angulus, ejusque complementum ad duos rectos, scil. angulus QPT; qui est mensura distantiæ meridianorum loci Q, & loci istius cui Sol est verticalis, cumque locus hic notus sit, innotescet quoque locus Q, nam nota est tam Longitudo ejus, quam Latitudo.

Determinatio Loci Terræ qui dato quolibet momento umbrâ involvitur.

Eâdem methodo innotescet locus Terræ qui umbra totali primo involvitur. Et simili fere ratione habebitur locus terræ M, qui umbrâ involvitur pro quolibet temporis momento, ante vel post Eclipsationis medium. Nam ex dato temporis momento per motum horarium Lunæ à Sole invenitur recta MV, & punctum M in disco ubi incumbit centrum um-

 bræ,

bræ, & in triangulo itaque rectangulo MVT, ex datis MV, VT, dabitur MT, & angulus MTV, cui si addatur vel subtrahatur angulus notus VTP, dabitur angulus MTP; est vero MT sinus arcus circuli verticalis, qui per verticem loci M & punctum sub Sole transit, posita semidiametro disci pro radio; si itaque fiat ut semidiameter disci, ad MT, ita Radius ad sinum arcus, qui erit distantia Solis à vertice M. In triangulo itaque Sphærico in superficie Terræ MPT, dantur PT distantia Solis à polo, & MT distantia Solis à vertice, & angulus MTP, unde dabitur MP complementum Latitudinis Loci, & angulus MPT qui ostendet differentiam meridianorum loci M, & loci illius cui Sol verticalis est; sed datur differentia meridianorum istius loci cui Sol verticalis est, & loci à quo tempus computatur; quare dabitur differentia meridianorum loci M, & loci à quo tempus computatur. Ex quâ innotescet locus M. Atque hâc methodo si plura inveniantur loca, per quæ centrum umbræ transit, lineisque jungantur, habebitur semita Umbræ in Telluris superficie.

Pars Solaris diametri obscurata. *Tab. 25. fig. 1.*

Pars diametri Solaris obscurata innotescet ex loco spectatoris intra penumbram, seu ex ejus distantia à centro umbræ. Sit enim ASB diameter Solis diametro Penumbræ EF parallela, ducatur recta MCB, Lunam stringens ad dextrum Solaris diametri terminum, GCA vero ad sinistrum Solaris diametri terminum tendat: erit angulus ACB æqualis diametro apparenti Solis, & Triangula ACB, MCF erunt similia: sit jam spectator intra penumbram in G locatus, ducatur recta GCP, tangens Lunæ globum, & erit AP pars diametri Solaris à Lunâ obscurata spectatori in G; sed recta GA cum per triangulorum vertices ad C quam proxime transit, bases AB, MF similiter fere dividet; unde AP, ad AB, ut GF, ad MF. Est itaque pars obscurata diametri Solaris, ad ipsam diametrum, ut distantia Loci à margine Penumbræ, ad Penumbræ semidiametrum diminutam semidiametro Umbræ.

Quantitas Eclipseos per digitos mensuratur.

Dividunt Astronomi Solarem Diametrum, sicuti etiam Lunarem in duodecim partes æquales; quas digitos appellant, quibus quantitatem obscurationis dimetiuntur. Et Eclipsim dicunt tot esse digitorum, quot diametri pars obscurata constat digitis.

Si

Si detur situs loci in disco pro quolibet temporis momento, & quæratur quæ futura sit Phasis Eclipseos eo momento in loco illo; hæc sic invenitur. Sit S situs loci in disco, quæratur pro illo temporis momento locus centri penumbræ in propria semitâ, qui sit M; quo centro & semidiametro æquali semidiametro Lunæ describatur circulus AFL, Item centro S, semidiametro SB, æquali semidiametro Solis, circulus EBG describatur, quem circulus EFL intersecat in E & F, erit EBFA pars Solis à Lunâ tecta spectatori in S. Nam producatur MA semidiameter Lunæ ut fiat AD per S transiens æqualis semidiametro Solis, scil. æqualis BS, unde erit MD æqualis summæ semidiametrorum Solis, & Lunæ; adeoque semidiametro Penumbræ æqualis, & distantia Loci à margine Penumbræ erit SD. At quia est BS æqualis AD, erit AB æqualis SD. Fiat AN æqualis semidiametro Solis, eritque MN æqualis differentiæ semidiametrorum Solis & Lunæ; seu æqualis semidiametro umbræ: Sed ostensum est esse DS, ad DN, ut pars diametri Solis obscurata, ad Solis diametrum; & ita quoque erit AB quæ est, ipsi DS æqualis, ad DN; sed est DN æqualis Solis diametro, quare erit AB æqualis parti diametri Solis obscuratæ.

Dato situ in disco pro quolibet temporis momento invenitur phasis Eclipseos pro eo momento. Tab. 25. fig. 2.

Hinc Cuspidum quoque positio determinatur, nam ducto verticali circulo TSG, arcus GE, GF, ostendunt distantiam cuspidum à supremo Solis puncto.

Si quæratis, Academici, velocitatem qua umbra Terræ discum percurrit, observandum est, viam Lunæ à Sole in discum projici in lineam sibi æqualem, & parallelam; adeoque velocitas centri umbræ in propriâ semitâ in discum excepta, æqualis est velocitati quâ Luna viam suam à Sole percurrit. At motus Lunæ à Sole est circiter 30′½ in unâ horâ; adeoque spatium, quod centrum Penumbræ in unâ horâ intra discum percurrit, æquale est arcui 30′½ in orbita Lunari; verum orbitæ Lunaris semidiameter mediocris æqualis est 60 semidiametris Terræ, adeoque 1′ orbitæ Lunaris æquale erit 60 minutis primis in Terræ superficie, seu uni gradui circuli in Telluris superficie maximi; hoc est 69 milliaribus Anglicanis; & proinde 30′½ minuta æquipollent 2104 milliaribus

Anglicanis; quod ſpatium umbra conficit in una horâ. At quamvis hæc ſit velocitas umbræ in Diſco Terreſtri, velocitas tamen, quâ à dato Loco in ſuperficie Telluris recedit, eâ minor eſt: Nam dum umbra ab occidente in orientem movetur, loca omnia Telluris interea per vertiginem Terræ diurnam abrepta, etiam ab occidente in orientem ſed Lunâ tardius, feruntur; adeoque motum umbræ lentius ſequentes, velocitatem, quâ umbra ab iis recedit, diminuunt.

LECTIO XIV.

Nova Methodus computandi Eclipſes Solis e dato loco viſibiles.

Initium & finis Generalis Eclipſeos à paucis videri poſſunt.

HUc uſque Generalis Eclipſeos Solaris Phænomena expoſuimus, qualia ſcil. à Spectatore in Luna conſtituto videntur, modumque oſtendimus, quo univerſalis Eclipſeos Initium, Medium, atque Finis determinentur. Verum initium illud atque finis à paucis tantum videri poſſunt, ab iis ſcilicet, qui marginem diſci tunc occupant, & prope ſemitam umbræ locantur, cum interim ex aliis locis verſus interiora diſci ſitis nulla videbitur Eclipſis, neque iis Eclipſari Sol videbitur, niſi poſt ſatis notabile Tempus, quando ſcil. Penumbræ margo primo loca illa attigerit: finiſque erit Eclipſeos, quando margo eadem reliquerit; unde pro vario locorum ſitu, varia quoque erunt durationis Tempora, ſicuti & Eclipſeos quantitas, pro diverſâ diſtantiâ locorum à ſemita umbræ.

Tempora & initia Eclipſeos pro diverſitate locorum ſunt diverſa.

Ut igitur Eclipſeos particularis Phaſes, quales è dato loco conſpiciendæ ſunt, habeantur; liceat novam vobis, Academici, exponere methodum, qua abſque moleſto illo, multiplici, & laborioſo Parallaxium calculo, quo ante nos utebantur Aſtronomi omnes, Phaſes illæ determinari poſſint.

TAB. 26. fig. 1.

Sit itaque ſemicirculus AEB ſemidiſcus Telluris à Sole illuminatus, Polus Eclipticæ E, Terræ P. Cum locus quilibet in Terræ ſuperficie, motu diurno raptus, deſcribit circulum æquatori parallelum, & omnes paralleli præterquam in æquinoctiis ſint ad planum diſci inclinati, projicitur parallelus loci cujuſlibet in Ellipſim, quæ erit ſemita, in qua fer-

Paralleli omnes in Ellipſes projiciuntur.

ferri videbitur locus in plano diſci à ſpectatore in Luna conſtituto. Sit itaque FXII.D. Ellipſis in quam projicitur parallelus loci cujuſlibet. Et projiciantur quoque circuli horarii, ſaltem projiciantur puncta in quibus circuli horarii parallelum ſecant, ſintque puncta VI VII VIII IX X XI XII I II III IV V VI. Et hora ſextâ matutinâ quem intra diſcum tenet locus erit VI; hora ſeptima in VII invenietur; hora octava ad punctum VIII deveniet; nona punctum IX occupabit, atque ita deinceps.

Sit CT portio ſemitæ centri Penumbræ in planum diſci exceptæ, atque hora 2da ſupponatur centrum illud in 2, hora tertia in 3, quarta in puncto 4 locari, idque ita deinceps. Hora ſecunda locus in diſco punctum II occupat, itaque diſtantia centri umbræ à loco erit 2 II. At ſi diſtantia illa ſecundum ſemitam Umbræ æſtimatur, demittatur à loco in ſemitam perpendicularis II L, eritque diſtantia hac ratione æſtimata, æqualis 2 L, & L punctum erit poſitio loci ad ſemitam umbræ reducta. Hora Tertia centrum umbræ fit in 3, locus autem in III, eorum diſtantia fit 3 III minor priore: hora quarta umbra ſit in 4 & locus in IV, in quo ſitu umbra propior ad locum facta erit, ita ut penumbræ margo locum attingat, & Eclipſis incipiat. Hora autem quinta cum centrum umbræ ſit in 5 & locus in V, magis in Penumbra involvitur, & magis ad locum accedit centrum umbræ. At hora ſexta centrum umbræ eſt in 6, jam magis in orientem promotum quam locus, qui punctum in diſco VI occupat, adeoque centrum umbræ locum præteribit; & continget tempus minimæ centri umbræ & loci diſtantiæ inter horam quintam & ſextam, poſt quod tempus ſemper augetur umbræ à loco diſtantia: & margo Penumbræ tandem locum relinquet, fietque finis Eclipſeos. Sequenti autem methodo Initium, Medium, Finis ſicuti Phaſes Eclipſeos è dato loco viſibiles accuratius definiuntur. Utque hoc fiat duo præmittimus Problemata.

Poſitio loci ad ſemitam Umbræ reducta.

PROBLEMA. I.

Invenire in Disco Telluris, situm dati loci, pro quolibet Temporis momento dato.

Investigatio situs loci in disco pro dato tempore TAB. 25. *fig.* 3. Sit semicirculus AEB semidiscus Terræ à Sole illuminatus, AB portio Eclipticæ in discum exceptæ ejus Axis SE, Polus E, sitque linea SP illa in quam Axis Terræ projicitur, atque P projectio Poli. Fiat ut Radius ad sinum Latitudinis loci ita SP ad SH punctum H erit projectio centri paralleli. Per H ducatur HG æqualis semidiametro paralleli, seu sinui distantiæ loci à Polo, quæ sit ad SP perpendicularis, & erit illa semiaxis major Ellipseos, in quam projicitur parallelus loci. Fiat, ut Radius ad sinum elevationis poli supra planum disci, ita GH ad HL erit HL semiaxis Ellipseos minor. In GH capiatur HQ, quæ ad GH eam habeat rationem quam sinus anguli circuli Horarii & meridiani habet ad radium; sitque QR ad GH perpendicularis. Fiat item, ut Radius ad cosinum anguli quem circulus horarius facit cum Meridiano, ita GH ad D. Denique, fiat ut Radius ad sinum Elevationis Poli supra planum disci, ita D ad QR erit R situs loci quæsitus in disco pro temporis momento dato.

Idem aliter ope circuli horarii perficitur.

TAB. 25. *fig.* 4. Sit AOB semidiscus illuminatus. Polus P, meridianus universalis SP, cum peripheria disci conveniens in G, sitque circulus horarius pro temporis momento dato FPO. In triangulo Sphærico rectangulo PGO, datur PG Elevatio Poli supra planum disci, & angulus GPO, quem circulus horarius facit cum meridiano, unde innotescet angulus GOP inclinatio circuli horarii ad planum disci, item arcus PO & GO, adeoque dabitur Punctum O, ubi circulus horarius convenit cum peripheria disci: ducatur SO, erit illa communis sectio circuli horarii cum plano disci, & sit arcus FP distantia loci à Polo, seu complementum Latitudinis. Posito SO radio, sit SQ sinus arcus, cujus complementum est FO, æquale scil. summæ duorum arcuum datorum FP & PO sitque D cosinus ejusdem arcus cujus sinus est SQ. Ad Q super OS erigatur perpendicularis QR, ad quam D eandem habet rationem, quam

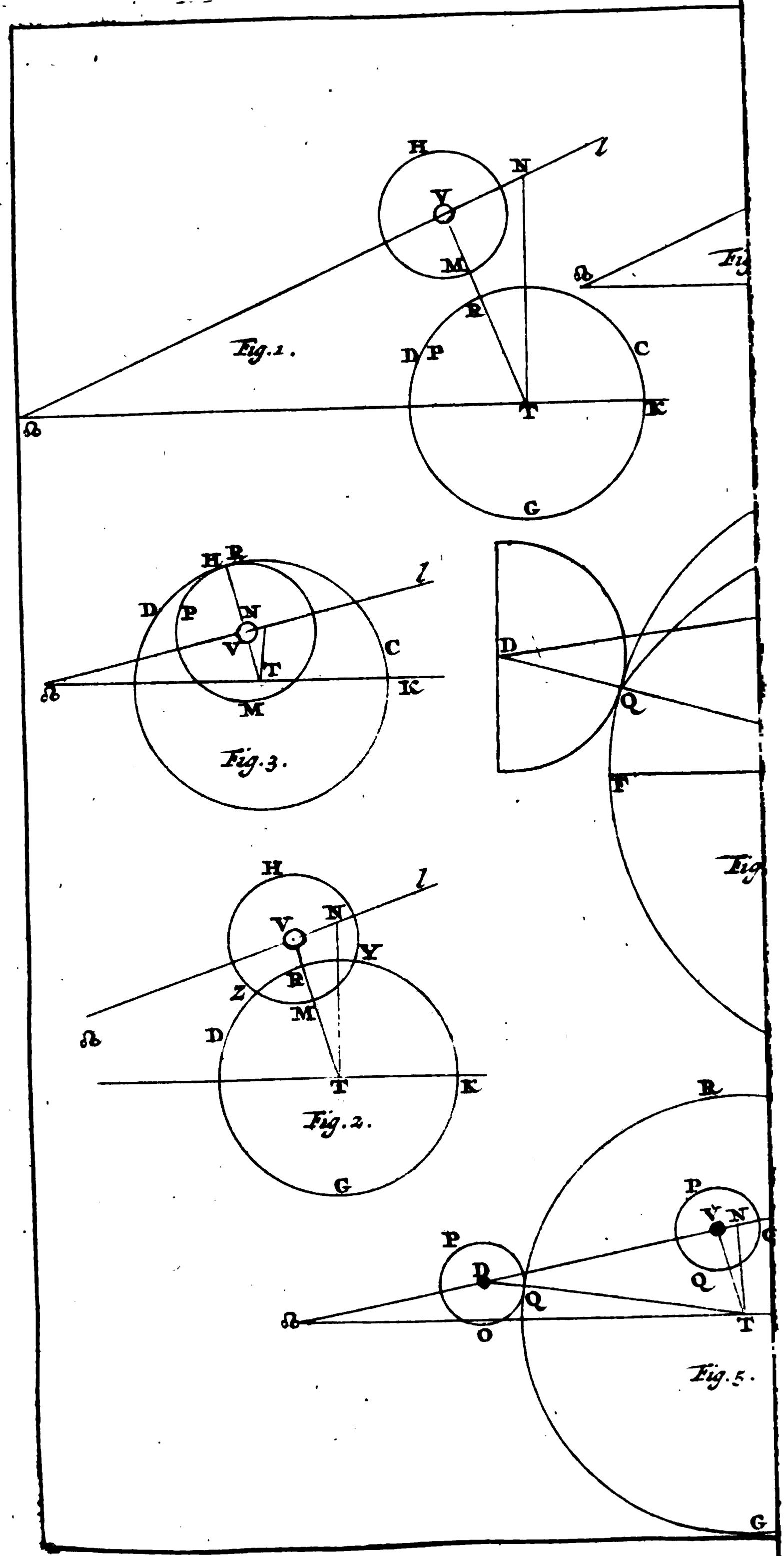


Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 2.
Fig. 5.
H
V
N
l
M
R
D P
C
T
K
G
D
Q
F
P
N
V
Y
Z
O

quam habet radius ad cosinum anguli inclinationis circuli horarii ad planum disci, & erit R punctum quæsitum, quod ostendet positionem loci in discô pro tempore dato. Atque eadem ratione pro aliis diversis temporum momentis aliæ inveniuntur loci positiones in disco, quæ omnes locantur ad Ellipsim, in quam projicitur parallelus loci. Hæc omnia patent ex legibus projectionis Ortographicæ.

PROBLEMA II.

Invenire tempore Eclipseos, situm centri Penumbræ in disco Telluris, pro dato quolibet temporis Momento.

Sit ut prius AEB semidiscus Telluris à Sole illustratus, SE Axis Eclipticæ, CL semita centri penumbræ per planum disci transcurrentis, Axemque Eclipticæ secans in N: cum autem centrum penumbræ invenitur in N, celebratur conjunctio Solis & Lunæ vera, cujus proinde tempus per tabulas Astronomicas datur; datur etiam per easdem tabulas, motus horarius Lunæ à Sole. Fiat, ut parallaxis horizontalis Lunæ ad ejus motum horarium à Sole, ita semidiameter disci ad quartam, quæ sit M; erit illa linea æqualis spatio quod intra horam à centro umbræ percurritur in disco. Deinde fiat, ut hora una ad tempus interjectum intra conjunctionem veram & temporis momentum pro quo quæritur positio centri umbræ, ita recta M ad aliam: hæc recta ostendet distantiam centri penumbræ in propria semita à puncto conjunctionis veræ N, pro momento temporis dato. Dabitur itaque positio umbræ pro tempore dato. Quæ erat invenienda. TAB. 26. fig. 1.

Sit hora quæ immediate præcedit tempus conjunctionis, v. gr. quarta. Fiat, ut hora una ad tempus inter conjunctionem & horam quartam interjectum, ita recta M ad N 4. Erit punctum 4 situs centri umbræ ad horam quartam. Capiantur deinde 4. 3, 3. 2, 4. 5, 5. 6 singulæ æquales M, & puncta 2, 3, 4, 5, 6, ostendent situs centri penumbræ pro respectivis horis.

Hisce præmissis, sit ut prius AEB semidiscus; CT semita centri umbræ supra planum disci, quam secet Axis Eclipticæ in N & cum umbra ad N pervenerit celebratur conjunctio TAB. 26. fig. 2.

vera.

Calculus initii Eclipseos. vera. Sit hora quæ conjunctionis tempus immediate præcedit v. gr. secunda, & notentur in semita umbræ ejus loca horis 1, 2, 3, 4, 5. Item iisdem horis notentur situs loci in disco, fiantque I II III IV V. Hora prima distantia centri umbræ à loco est 1I, hæc ad scalam partium æqualium applicata sit, ejusque magnitudo numeris exhibeatur, ab illa auferatur semidiameter penumbræ, eadem scalâ dimensa, restabit distantia marginis penumbræ à loco. Hora secunda capiatur rursus distantia marginis penumbræ à loco in II posito; harum distantiarum differentia, cum margo penumbræ sit in utroque situ loco occidentalior, erit accessus seu motus relativus horarius penumbræ ad locum. Fiat itaque, ut accessus horarius marginis penumbræ ad locum, ad distantiam marginis penumbræ à loco hora secunda; ita hora una seu 60 minuta ad tempus quartum, quod tempus additum ad horam secundam dat tempus, quando margo penumbræ locum attingit; seu tempus initii Eclipseos ostendet.

Calculus momenti maximæ obscurationis. A positione loci II ad horam secundam, demittatur ad semitam umbræ perpendicularis II *a*, & cum centrum umbræ sit in 2, erit distantia loci ad semitam reducti, ab umbra 2*a*. Item hora Tertia positio loci est III, demittatur perpendicularis in semitam umbræ III *b*, erit distantia centri umbræ à loco ad semitam reducto, 3*b*; harum distantiarum differentia est accessus umbræ ad locum reductum, intra spatium unius horæ: differentia hæc, ope scalæ, numeris exhibeatur; fiatque per regulam proportionis, ut accessus horarius umbræ (ad locum reductum) ad distantiam umbræ hora tertia, ita hora seu 60 minuta ad tempus quartum. Quod tempus horæ tertiæ additum dat tempus medii Eclipseos seu maximæ obscurationis quam proxime.

Calculus Temporis finis Eclipseos. Hora quarta centrum umbræ sit in 4, & locus in puncto IV; horum distantia scalâ mensuretur, & quoniam illa minor est semidiametro Penumbræ subducatur hæc distantia, & restabit distantia loci ab occidentali margine penumbræ, qua scil. margo illa loco occidentalior est; deinde hora quinta, umbra est in 5, & locus in V, earumque distantia 5V major est semidiametro penumbræ; unde margo occidentalis

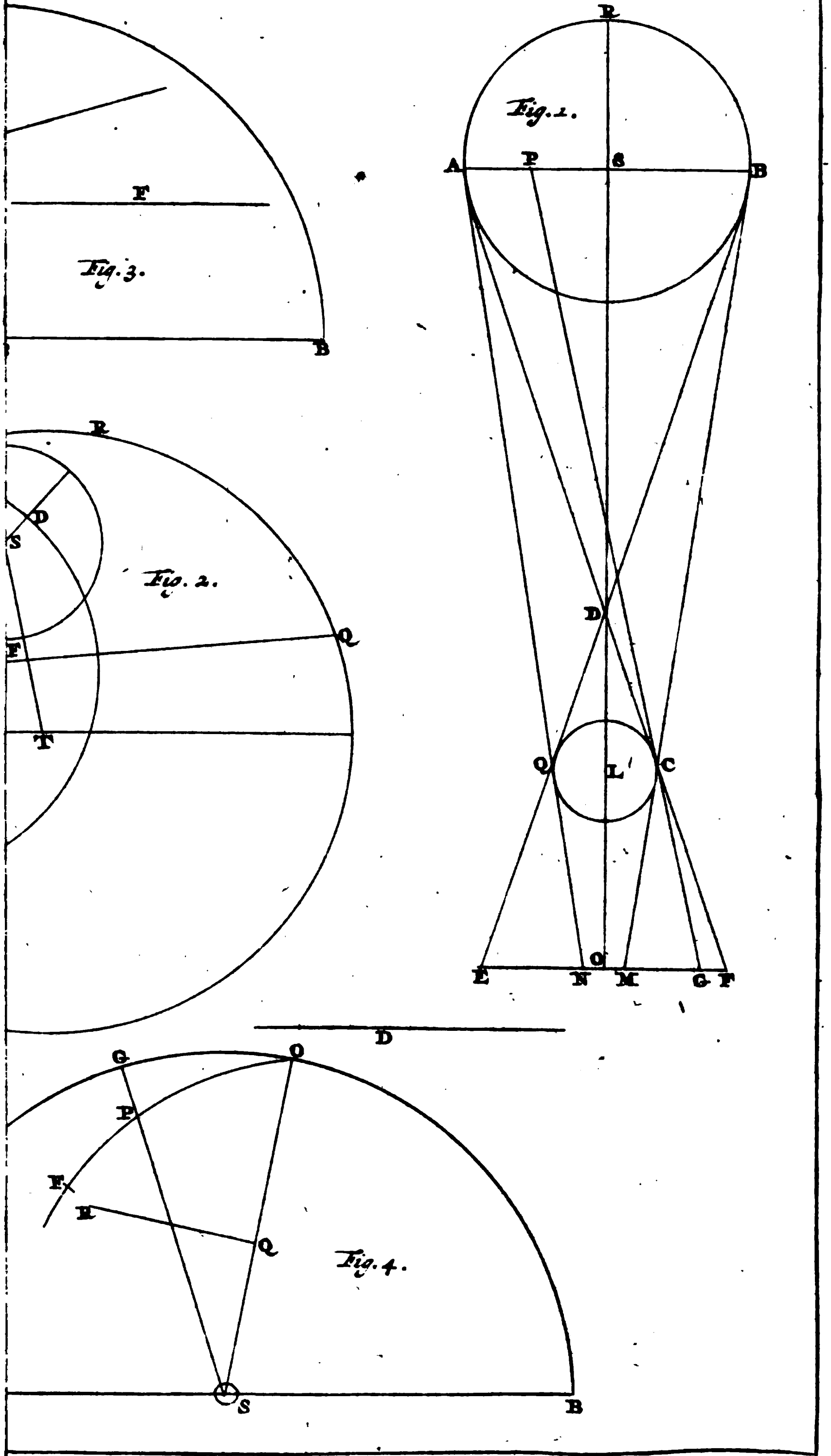


Fig. 1.
R
A
P
S
B
D
Q
L
C
E
N
O
M
G
F
Fig. 3.
F
B
Fig. 2.
R
D
S
F
Q
T
Fig. 4.
D
G
O
P
F
H
Q
S
B

lis penumbræ magis erit in orientem provecta quam locus; & ante hoc tempus, penumbra locum relicta finem fecerit Eclipseos. A distantia 5 V subducatur semidiameter penumbræ, relinquetur distantia occidentalis marginis penumbræ à loco; cumque in priore casu margo fuit loco occidentalior, & nunc sit loco orientalior, harum distantiarum summa erit motus relativus umbræ respectu loci factus, in spatio unius horæ; fiat itaque, ut hæc summa ad distantiam marginis occidentalis penumbræ à loco horâ quartâ, ita una hora ad tempus quartum, hoc dabit tempus cum occidentalis margo locum attinget, eumque relinquet, seu finem Eclipseos ostendet.

Accuratius omnia definientur, si loco duarum horarum ante conjunctionem, capiantur duæ semihoræ, quæ conjunctionem immediate præcedunt, & quæratur motus umbræ ad locum semihorarius, & error qui ex inæquabili motu oritur minor erit, utpote in minore tempore productus. *Accuratior determinatio.*

Motus Umbræ in semita suâ æquabilis est saltem in tempore Eclipseos pro æquabili habere potest. At motus loci in disco non est æquabilis, sed versus marginem disci contractior videtur, in medio per latiora spatia progreditur; præterea calculus supponit motum Relativum Umbræ ad locum æquabilem quoque esse, & Eclipseos medium seu maximam approximationem centri umbræ & loci, esse ubi linea jungens locum & centrum umbræ est perpendicularis ad viam Umbræ quorum neutrum præcise verum est, & exinde errorem aliquem oriri necesse est; is tamen hac ratione corrigi potest. Ad tempus Initii Eclipseos, priore methodo computatum, inveniatur locus centri Umbræ; item situs loci in disco pro eodem temporis momento, & in plano disci centro umbræ describatur circulus penumbrosus, & si margo penumbræ per locum transeat, tempus computatum verum erit. Sin minus, notetur loci & marginis penumbræ distantia, & deinde ex dato umbræ & loci motu relativo pro semihora, operando rursus per regulam proportionum, dabitur verum tempus initii Eclipseos. Et similiter *Erroris, qui oriri potest, correctio.*

ter corrigetur temporis error, qui in fine Eclipseos accidit; atque hac ratione non minus accuratè habentur tempora Eclipsium quam vulgari methodo, quæ fit per parallaxium computum: ubi etiam supponitur motum Lunæ visibilem esse per aliquod tempus æquabilem, qui reverà non minus inæquabilis est quam motus loci in disco; nam ille per parallaxes continuo mutatur.

Quantitas obscurationis maximæ.

Si tempore medii Eclipseos, centro umbræ describatur circulus, cujus diameter sit æqualis diametro Lunæ; item describatur alius circulus, cujus centrum sit locus spectatoris, & diameter æqualis diametro Solari, horum circulorum intersectiones ostendent quantitatem obscurationis maximæ.

Si quibusdam minus arrideat Mechanica hæc methodus lineas seu distantias per scalam partium æqualium dimetiendi, possunt Trigonometriam adhibere & linearum longitudines per calculum exquirere methodo sequenti.

Methodus Trigonometrica distantias umbra & loci computandi. TAB 27 *fig.* 1.

Sit ut prius AEB semidiscus, P polus Telluris, CNT via seu semita umbræ supra discum, punctum 2 situs umbræ pro tempore dato, & pro eodem momento situs loci sit II. Sit SE Axis Eclipticæ semitam secans in N, & erit SN latitudo Lunæ tempore conjunctionis veræ; ducantur ab umbra & loco ad centrum disci rectæ 2S, II S, & jungatur 2II. In triangulo rectilineo 2NS datur NS, latitudo Lunæ, & 2N distantia umbræ in propria semita à puncto conjunctionis, item datur angulus 2NS inclinatio Semitæ ad latitudinis circulum, quare dabitur 2S, & angulus 2SN. Deinde in triangulo Sphærico PS II. Datur Arcus PS complementum declinationis Solis, & PII complementum Latitudinis loci, item angulus SP II, quem circulus horarius efficit cum Meridiano, unde dabitur S II arcus, qui est distantia Solis à vertice, ejusque sinus æqualis est distantiæ S II, posito SE radio; item dabitur angulus PS II, cui si addatur vel dematur angulus notus PSE dabitur angulus NS II: sed datus fuit angulus 2SN, unde dabitur totus angulus 2S II. In triangulo denique rectilineo 2S II dantur 2S & IIS & angulus iis comprehensus 2S II quare per Trigonometriam

triam planam dabitur distantia 2 II, quæ erat invenienda. Hac methodo procedendo non opus est ut situs loci & umbræ in disco inveniantur, sed erunt illi calculo solum acquirendi.

Hinc obiter patet alia methodus inveniendi situm loci in disco, pro temporis momento dato, scil. per calculum trianguli PS II investigando angulum PS II & distantiam S II.

Per Eclipses Solares, non minus quam per Lunares, inveniri possunt Locorum in superficie Terræ longitudines; si observetur in loco, cujus longitudo quæritur, momentum temporis initii vel finis Eclipseos. Sit illud, v. gr. ad horam quintam, & centro V nempe situ loci in disco pro momento initii vel finis Eclipseos, & distantia æquali semidiametro penumbræ describatur arcus circuli, qui semitam penumbræ secet. Sitque punctum sectionis *d*, erit illud positio centri umbræ momento initii vel finis Eclipseos observatæ: scala deinde mensuretur distantia N*d*, ex qua data, & ex dato motu Lunæ à Sole. dabitur tempus conjunctionis veræ à Meridiano Loci computatum. Deinde, si in alio quovis loco observetur initium vel finis Eclipseos, similiter habebitur momentum conjunctionis veræ secundum tempus à meridiano istius loci computatum, & temporum istorum differentia in gradus æquatoris conversa ostendet differentiam Longitudinum Locorum, quæ erat invenienda. *Locorum Longitudines Geographicæ per Eclipses solares determinantur.* TAB 16. *fig.* 2.

In praxi convenit semidiametrum disci æqualem decem digitis ponere, ut illa in mille partes ope scalæ diagonalis divisa habeatur: Est enim hic numerus qui radium Tabularem exprimit; & latitudo Lunæ SN omnesque lineæ quarum dimensiones quæruntur, iisdem partibus exprimantur. Nam si fiat, ut Parallaxis horizontalis Lunæ scrupulis exhibita ad Lunæ Latitudinem, ita 1000 ad quartum; & capiatur SN ex scala huic quarto æqualis, erit linea hæc latitudini Lunæ æqualis, & similiter in cæteris lineis operando habentur earum quantitates.

Novam itaque methodum vobis, Academici, exposui, qua Eclipsium Solarium momenta atque Phases, quatenus è dato loco spectantur, definiri possunt, per quam non opus est, ut ad longum illum & molestum Parallaxium calculum recurratis, ut habeatur locus Lunæ in cælo visus, tam quoad longitudinem quam latitudinem, quo utuntur Astronomi plerique: methodus enim nostra illa facilior multò est, & ut opinor, non minus accurata. Nam in vulgari methodo diversæ Eclipticæ positiones, quoad horizontem nunquam non variantes, in Lunæ locis, sive secundum longitudinem sive latitudinem spectatis, inæqualitatem in ejus motu non exiguam ubique inducunt, & Parallaxes pro Luminarium minore aut majore supra horizontem Elevatione admodum mutantur, adeoque nisi earum habeatur frequens respectus, in errores incidere pronum erit.

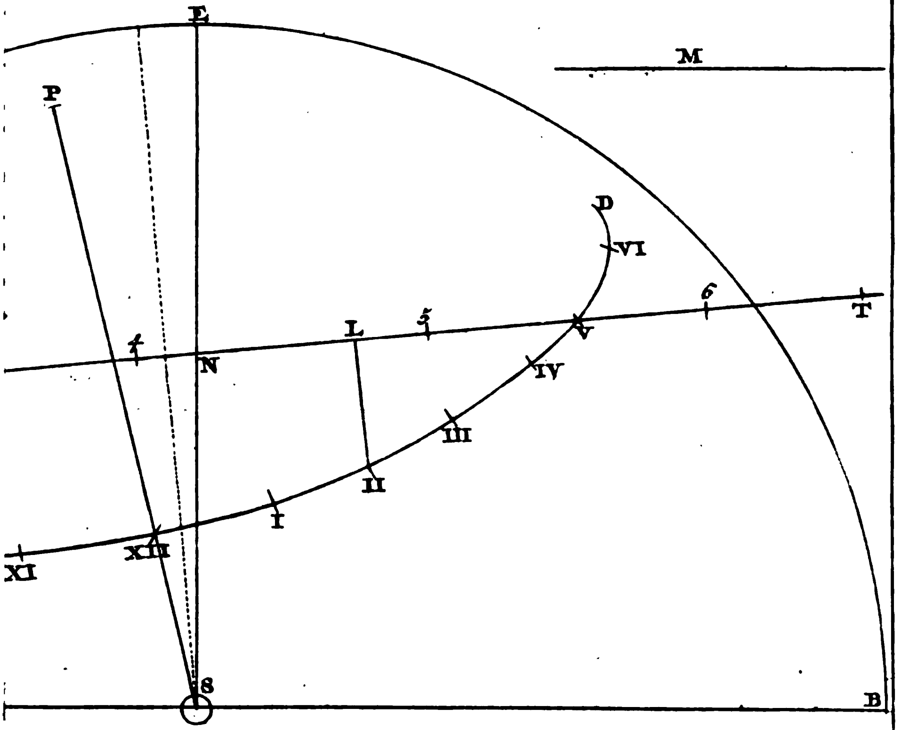
At quia methodus Phænomena Eclipsium per Parallaxes computandi, à plerisque Astronomis adhibetur, visum est, illam etiam Vobis exponere: Vos autem in Parallaxium scientia vel per vulgares libros Astronomicos, vel per doctrinam Parallaxium à nobis posthac tradendam, satis instructos esse supponere liceat. Quibus positis, principia, quibus fundatur hic Eclipsium calculus, facillime explicari possunt.

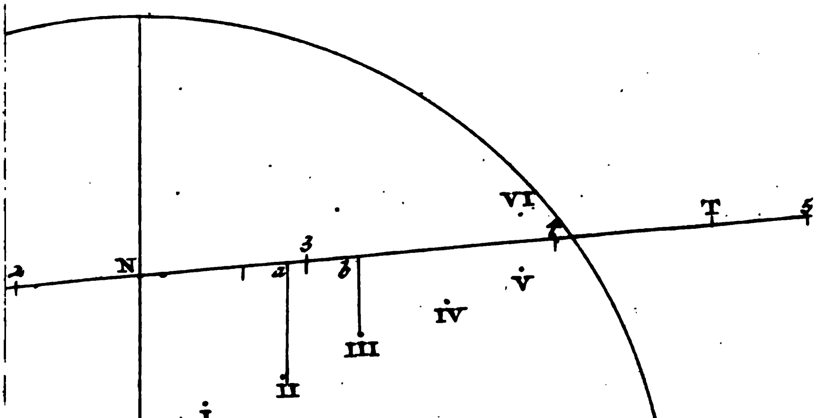
Conjunctio vera & visa differunt.

Primo conjunctio visa, semitaque Lunæ in cælo visa sunt investigandæ: differunt enim conjunctio vera & visa, & non in eodem temporis momento accidunt; Nam locus Lunæ visus non coincidit cum vero, qui è Telluris centro conspiciendus est, quod figuræ inspectione manifestum fiet. Semicirculus CAB repræsentet Hemisphærium Terræ, cujus centrum T, è quo ducatur recta TLS, in qua sit Luna in L, & Sol longius distans in S; adeoque cum Solis & Lunæ centra in eadem recta linea spectantur è centro Telluris, ad idem cæli punctum referri debent; eruntque in conjunctione vera. At spectator in superficie Telluris in A locatus, Solis & Lunæ centra ad diversa puncta referet; eorumque distantia erit arcus SE ad cælum productus, punctumque, quod recta TL per Telluris & Lunæ centra transiens, in cælo offendit, dicitur locus Lunæ verus. At punctum, cui recta per spectatoris oculum & Lunæ centrum ducta in cælo occurrit, dici-

Tab. 27. fig. 2.

TAB. XXVI.





dicitur locus Lunæ visus. Sint puncta illa S, E, Arcus SE, distantia inter locum verum & visum Parallaxis Lunæ vocatur, & cum puncta L & T respectu distantiæ cæli coincidunt, idem erit arcus SE, sive ejus centrum concipiatur esse in L, sive in T, adeoque arcus SE erit mensura anguli SLE, vel huic æqualis ALT; sed angulus ALT est ille, sub quo semidiameter Terræ AT per spectatoris locum ducta è Lunâ videtur; adeoque Parallaxis Lunæ est semper æqualis angulo, sub quo semidiameter Terræ per spectatorem ducta è Lunâ videtur. At angulus ille fit maximus, cùm semidiameter Terræ directè videtur, hoc est cùm angulus LAT est rectus, & Luna in horizonte spectatur, unde Parallaxis horizontalis est Parallaxium maxima. At si Luna in vertice in F existeret, evanesceret angulus ALT, & Lunæ locus in cælo visus idem esset ac verus, qui è Terræ centro conspicitur, in quo situ nulla erit Lunæ Parallaxis.

Solis nulla erit Parallaxis sensibilis.

Cum Phænomeni cujusvis Parallaxis sit semper æqualis angulo, sub quo Telluris semidiameter per spectatoris locum ducta, è Phænomeno videtur, Solis nulla erit Parallaxis sensibilis. Nam uti sæpius dictum est, Terra ut punctum & sub nullo sensibili angulo è Sole videtur. Lunæ autem Parallaxis cum illâ in horizonte & nobis proximâ videtur, gradum unum aliquot minutis superat.

Hinc sequitur Parallaxes semper reddere locum Lunæ depressiorem, & magis à vertice distantem, quàm revera esset, si è centro Terræ spectaretur hic Planeta; & hæc depressio mutationem loci Lunæ secundùm Eclipticam quoque inducet, facietque ut ejus Longitudo & Latitudo visæ à veris differant.

TAB. 27. fig. 3.

Sit enim in Figura circulus HCZ meridianus, ceu circulus per Spectatoris verticem & Polum traductus, Z vertex, HED horizon loci, CE Ecliptica, in qua sit verus locus Lunæ sine latitudine L; sit ZT circulus verticalis per Lunam transiens, cumque Parallaxis semper deprimit Lunam in verticali, locus Lunæ visus magis à vertice distabit, quam verus; sit locus visus *o*, erit L*o* Parallaxis altitudinis. Per locum visum *o* traduci concipiatur circulus ad Eclipticam Perpendicularis *om* Eclipticæ occurrens in *m*, erit

Parallaxis Longitudinis.

erit punctum illud locus Lunæ visus ad Eclipticam reductus, & Lm erit Parallaxis longitudinis, seu distantia inter locum Lunæ verum & locum visum ad Eclipticam reductum, arcusque *om* seu distantia Lunæ ab Ecliptica in hoc casu erit Parallaxis Latitudinis.

Parallaxis Latitudinis.

Ut Phases itaque Eclipsium è dato loco spectabiles per Parallaxes definiantur, necesse erit, ut cognoscantur Lunæ Solisque loci veri, qui per tabulas Astronomicas pro dato quolibet temporis momento habentur, præterea cognoscendus est locus Lunæ in cælo visus, qui ex loco vero per Parallaxium calculum institutum, tam quoad Longitudinem quàm Latitudinem, definiendus est, quibus cognitis, sic inveniuntur Tempora & Phases.

Tab 27. fig. 4.

Sit *pk* portio Eclipticæ, *s* locus Solis tempore conjunctionis veræ, *l* locus Lunæ visus ad Eclipticam reductus pro eodem temporis momento; *lo* Latitudo Lunæ visa, *ls* Longitudo Lunæ à Sole visa. Exiguo satis temporis intervallo ante conjunctionem veram inveniatur rursus locus Lunæ visus in Ecliptica qui sit *p*, ejusque Latitudo visa sit *pq*; ducatur *qo* quæ producta cum Ecliptica conveniat in *k*, erit *qk* via visa Lunæ à Sole tempore conjunctionis. In triangulo *qon* rectangulo datur *on* differentia Longitudinum à Sole, & *qn* differentia Latitudinum, unde dabitur angulus *qon* seu *qkp* inclinatio viæ visæ ad Eclipticam, & latus *qo*, ex quo etiam inveniuntur *ot*, *tk* & *sk*. Nam *pl* est ad *qo* ut *ls* ad *ot*, & in triangulo *olk* ex datis *ol* & angulo *k* dabuntur *ok lk*, unde dabuntur *lk sk* & *st*. At cùm Lunæ centrum in *t* videtur, fit tempus conjunctionis visæ, adeoque si fiat ut *qo* ad *ot* seu ut *pl* ad *ls* ita tempus quo Luna percurrit lineam *qo* ad aliud, dabitur tempus inter conjunctionem veram & visam. Ex *s* in viam Lunæ visam demittatur perpendicularis *sm*. In triangulo rectangulo *skm* datur *sk* & angulus *k*, unde dabitur *sm*, quæ est minima visibilis centrorum Solis & Lunæ distantia. Si hæc distantia sit major summa semidiametrorum Solis & Lunæ, nulla videbitur Eclipsis; sin minor, differentia ad digitos reducta ostendet Eclipseos quantitatem. Ex datis *sm* & angulo ex-

inde

inde *tsm* æquali angulo *k*, dabitur *tm*, & inde invenitur tempus, quo Luna semitæ visæ portionem *tm* percurret hoc est tempus inter conjunctionem visam & maximam obscurationem.

Initium Eclipseos visibilis sic definitur; sit *pk* ut prius portio Eclipticæ, centrum Solis *s*, via Lunæ *qk*, *sm* distantia minima centrorum Solis & Lunæ; ducatur à Sole ad viam Lunæ recta *sq* quæ sit æqualis summæ semidiametrorum Solis & Lunæ. Et cum centrum Lunæ in *q* cernitur, incipiet marginem Solis attingere, fietque Eclipseos initium. in triangulo rectangulo *qsm* ex datis *qs* *sm*, dabitur angulus *qsm* scil. angulus incidentiæ; item *qm*; adeoque dabitur tempus quo Luna in via visa percurrit spatium *qm*, quod à tempore obscurationis maximæ subductum dat tempus initii Eclipseos. Tab. 28. fig. 1.

Similiter invenitur tempus finis Eclipseos, sed ut illud habeatur invenienda est rursus via Lunæ à Sole visa post conjunctionem, quæ à priore differet: nam reverà inclinatio viæ visæ ad Eclipticam continuò mutatur, ob continuas Parallaxium mutationes. Quæratur itaque intra horam vel exiguum satis temporis intervallum post conjunctionem Longitudo Lunæ à Sole visa, ejusque Latitudo visa, & exinde inveniatur inclinatio viæ visæ ad Eclipticam, motusque Lunæ à Sole visus, quibus datis, eadem methodo qua initium Eclipseos investigatur, finis quoque & temporis momentum innotescent.

Si quæratur Phasis Eclipseos pro dato quolibet temporis momento, quæratur pro illo momento Locus Lunæ in via visa, quo centro, & intervallo æquali semidiametro Lunæ describatur circulus, item centro, quod sit locus Solis, describatur alius circulus, cujus semidiameter sit æqualis semidiametro Solis, horum circulorum intersectiones ostendent phasim Eclipseos, quantitatem obscurationis & cuspidum positionem pro tempore dato.

Priusquam huic Eclipsium doctrinæ finem imponamus, liceat Phænomenon satis notabile vobis exponere, ejusque causam reddere.

Scil.

Scil. in Eclipsibus Lunæ totalibus, etiam dum Luna prope centrum umbræ versabatur, sæpius ea visa est tenui pallidâque luce persusa: mirum fortasse plerisque videbitur, unde oritur hæc Lux: quidam enim eam Lunæ nativam esse suspicabantur, alii à Stellis Planetisque eam deducebant, nam interpositio Telluris omnem Solis lucem à Luna arcere, & densissimis tenebris conum umbrosum involvere videretur. At vero cum Terram amplectatur Sphæra Aëris satis crassa, & vi refractiva pollens, illa Solis radios è medio rariore obliquissime in se incidentes è propria directione detorquet, itaque illos refranget, ut umbrosum spatium pervadant lucis Solaris radii, Lunæque corpus interpositum illustrent, illudque nobis conspicuum reddant. Uti figuræ inspectione manifestum fiet.

Tab. 27. fig. 5.

Lectio XV.

De Phænomenis ex motibus Telluris & duorum Planetarum Inferiorum Veneris & Mercurii ortis.

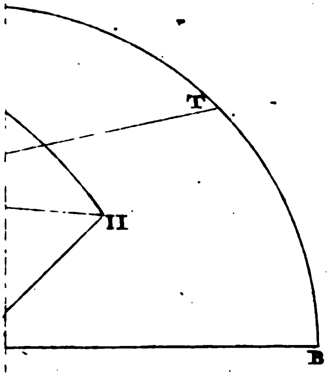
HUcusque Telluris Lunæque motus contemplavimus, & varia inde orta Phænomena recensuimus. Luna autem est Planeta non Primarius, sed secundarius, quæ non aliter circa Solem, systematis nostri centrum, defertur quam quod Tellurem, ad quam proprie pertinet, in annuo suo cursu perpetuo comitatur.

Planetæ Primarii sex.

At Primarii nostri Systematis Planetæ, qui circa Solem & nullum aliud corpus circuitus perficiunt, sunt numero tantum sex, scil. Mercurius ☿, Venus ♀, Tellus ♁, Mars ♂, Jupiter ♃, & Saturnus ♄, quorum motus indeque orta Phænomena vobis, Academici, sunt nunc exponenda. Et primo Veneris atque Mercurii orbitas Solem ambire, easque intra Telluris orbitam includi, superius demonstravimus, cumque brevioribus Periodis quam Terra circuitus absolvunt, manifestum est hos Planetas è Sole conspectos, nunc magis nunc minus in cælo à Tellure distare videri, & nunc in oppositis sitis cæli punctis spectari, nunc in eodem cum Tellure puncto conjungi, & cum circa Solem celerius ferantur, eos post conjunctionem à Tellure decedere, eam-

que

TAB. XXVII.



2.

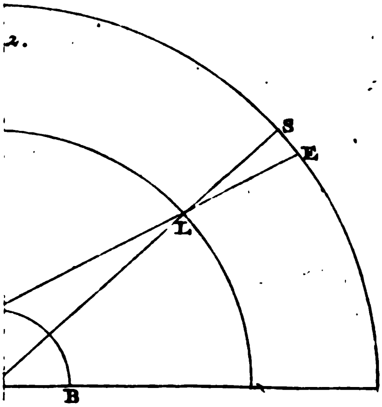
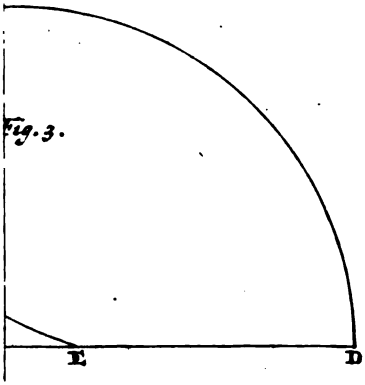


Fig. 3.



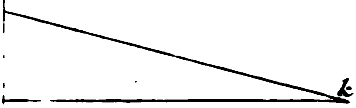
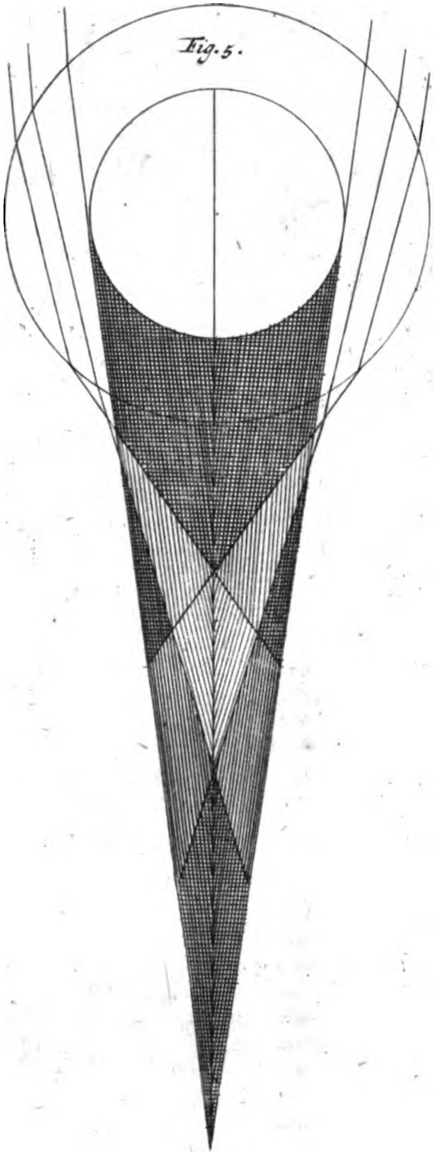


Fig. 5.



que segnius incedentem post se relinquere aspiciet spectator in Sole constitutus.

Hinc etiam patet hos Planetas e Tellure visos nunc magis, nunc minus à Sole elongari, & aliquando quoque cum Sole conjungi videri: verum conjunctiones illæ non tantum fiunt cum Tellus e Sole cum Planeta conjungitur, sed etiam cum eidem opponi videtur. Sit enim S Sol, ABC orbita Telluris, FHV orbita Veneris, sitque Terra in T, & Venus in V, in recta scil. quæ Solis & Telluris centra conjungit, in quo situ Venus e Sole visa in conjunctione cum Terra videtur, sicut Sol e Tellure visus Veneri conjungitur. TAB. 28. *fig.* 8.

At si Terra foret in T, cum Venus sit in F, illa e Sole videretur Veneri opponi; & in contrariis cæli plagis conspicerentur hi Planetæ. Verum Spectatore ad Terram translato, Venus Soli non opponi, sed eidem conjungi spectabitur. In primo conjunctionum casu, Venus inter Solem & Terram interponitur; in posteriore, Sol inter Terram & Venerem medius locatur. Prior dicitur conjunctio Inferior, Posterior conjunctio Superior. *Duo conjunctionum casus.*

Post utrasque has conjunctiones, Venus à Sole recedere, & indies magis elongari videtur, nunquam tamen Soli opposita cernitur; sed & nunquam aspectum quadratum, aut sextilem attinget, & omnium maxime à Sole elongatur circa locum illum, ubi linea, Telluris & Veneris centra connectens, Veneris orbitam tanget, ut circa D. Nam cum Venus ulterius ad H promovetur, ejus locus in cælo à Solis loco minus distare videbitur quam prius, & antequam ad locum illum pervenerit, semper à Sole magis recedebat; at loco illo relicto, ad Solem continuo magis accedat: necesse est, ut inter recessum & accessum quasi stationaria respectu Solis videatur, & proinde ejus motus apparens erit motui apparenti Solis æqualis. Arcus circuli maximi inter centra Solis & Veneris interceptus dicitur *Elongatio hujus Planetæ à Sole*. *Elongatio Planetæ à Sole.* *Elongatio non semper est maxima quando Planeta in tangente videtur.*

Observandum tamen est, Elongatio Planetæ à Sole, ubi recta à Planeta ad Terram ducta, Planetæ orbitam tangit, fit tantum maxima in orbe circulari in cujus centro est Sol.

Nam in orbitâ Elliptica fieri potest, ut post decessum Planetæ à puncto contactus, ejus distantia à Sole crescat; at non pariter crescant distantiæ Solis & Planetæ à Terra, sed potius decrescant, adeoque in duobus triangulis major basis majorem angulum subtendet. Sed cum Planetarum orbitæ ad circularem formam quam proxime accedunt, hæ minutiæ negligi possint.

Maxima Veneris Elongatio, seu angulus STD, observatione deprehenditur esse 48 circiter graduum. Et exinde in orbita circulari datur distantia Veneris à Sole respectu Telluris distantiæ ab eodem. Est enim ST ad SD ut Radius ad sinum anguli STD seu Elongationis maximæ.

Hinc etiam manifestum est, Venerem, dum illa à conjunctione cum Sole in superiore orbitæ suæ parte, seu à Terra remotissima, ad conjunctionem cum Sole in inferiore orbitæ parte seu Terræ proxima tendit, semper videri Sole orientaliorem, adeoque toto illo tempore Sole posterior occidit Venus, seu post Solis occasum, Vesperusque dicitur, noctis & tenebrarum prænuncia; at dum ab inferiore conjunctione ad superiorem tendit, Sole occidentalior spectatur, & ante Solis occasum occidit, ante ejus ortum oritur, adeoque mane tantum conspicietur, & tunc Phosphorus dicitur, lucis exortum secum afferens.

Ponamus Venerem atque Tellurem è Sole spectatas in V & T conjungi, hoc est in eodem Eclipticæ puncto videri. In quo casu Venus & Sol è Terra in conjunctione spectantur. Venus deinde celerius mota postquam ad V rursus pervenerit, & integrum circulum seu quatuor rectos motu angulari ad Solem perfecerit, Terram interea ulterius progressam nondum assequetur; ideoque opus erit, ut ulterius in orbita sua deferatur Venus, quo è Sole rursus in eadem recta cum Terra videatur, sit recta illa SLM scil. cum Venus sit in L, Tellus sit in M, & necesse erit, ut Venus priusquam Terram assequatur, integrum circuitum, seu quatuor rectos circa Solem, absolvat, & insuper motum angularem æqualem motui angulari Telluris interea facto. Motus autem angulares Telluris & Veneris circa Solem

eo-

eodem tempore facti, sunt reciproce ut eorum tempora periodica; erit itaque, ut tempus Periodicum Telluris ad tempus periodicum Veneris, ita motus angularis Veneris qui æqualis est quatuor rectis una cum motu angulari Telluris facto inter tempus unius conjunctionis & proximæ ad motum illum Telluris angularem: adeoque per divisionem Rationis, ut differentia temporum periodicorum Telluris & Veneris ad tempus Periodicum Veneris, ita quatuor recti ad quartum, qui dabit motum angularem Telluris inter duas proximas conjunctiones inferiores factum. Tempus autem Periodicum Telluris est dierum 365, horarum 6, seu horarum 8766. Et Veneris tempus Periodicum est dierum 224 horarum 16, seu horarum 5392, quarum differentia æqualis est 3374 horis. Fiat itaque ut 3374 ad 5392, ita quatuor recti seu 360 gradus ad gradus 575 qui motus æqualis est integræ circulationi & dimidio, & insuper 35 gradibus, & perficitur hic motus in uno anno & diebus 218. Adeoque si Venus hodie in inferiori orbitæ parte cum Sole conjungatur, non nisi post Annum, septem menses & duodecim dies, iterum Soli juncta conspicietur, & si una conjunctio in initio Arietis accidat, sequens circa septimum Scorpionis gradum celebrabitur. Idem quoque intercedit tempus inter duos quoslibet Veneris situs respectu Solis similes, verbi gratia, inter duas conjunctiones superiores, vel inter duas proximas Veneris positiones, ubi illa datam ad eandem plagam à Sole obtinet elongationem.

Determinatur tempus inter duas ejusdem generis conjunctiones.

Hoc problema, simileque de Lunæ conjunctionibus cum Sole mediis, aliter solvunt plerique Astronomi. Quærunt enim motum diurnum Telluris è Sole visum; item Veneris quoque motum diurnum, horumque motuum differentia erit motus Veneris à Terra, diurnus; v. gr. cum motus Telluris medius sit quolibet die 59′ & 8″, Veneris autem motus diurnus sit, 1 gr. 36. 8″ quorum differentia est 37′; per illud spatium Venus quotidie à Tellure recedere, vel ad illud accedere videtur. Fiat igitur ut 37′ ad gradus 360, seu ad 21600 minuta prima, ita dies unus ad spatium temporis quo Venus à Tellure per 360 gradus re-

Alia methodus solvendi Problema.

cesserit, hoc est ad spatium temporis, quo ad idem reverterit, seu ad tempus inter duas conjunctiones proximas elapsum, quod invenitur esse dierum 583.

Verum hæ conjunctiones secundum motus medios seu æquales tantum computatæ sunt, ideoque conjunctiones Mediæ dicuntur. At quoniam Venus & Tellus in orbitis Ellipticis circa Solem ferantur, motusque earum inæquabiles sunt; fieri potest, ut conjunctiones veræ serius aut citius per aliquot dies accidant, quam per præcedentem computum fieri debent. Data autem conjunctione mediâ, conjunctio vera sic exquiretur. Sit ABC Ecliptica, in qua punctum A sit locus conjunctionis mediæ, ad cujus tempus, computetur per methodos Astronomis notissimas, verus locus Veneris ad Eclipticam reductus, qui sit D. Item verus locus Telluris sit T, & inde dabitur locorum Telluris & Veneris distantia DT, datur quoque utriusque Planetæ motus angularis pro dato quolibet tempore, v. gr. pro sex horis; quorum motuum differentia dabit accessum vel recessum Veneris à Tellure, spatio sex horarum. Fiat itaque, ut differentia illa motuum ad arcum DT, ita sex horæ ad tempus inter conjunctionem mediam & veram, quod tempus demptum aut additum (prout Venus est orientalior aut occidentalior Tellure) tempori conjunctionis mediæ, dat tempus conjunctionis Veræ.

Tab. 28. fig. 3

Distantia Veneris à Terra semper mutabilis.

Ex figura manifestum est Veneris à Tellure distantiam esse continuo mutabilem, maximam autem esse cum Venus est in conjunctione cum Sole superiore, & minimam esse cum est in conjunctione inferiore; & differentia quidem tanta est, ut illa æqualis sit integræ diametro orbitæ Veneris. Estque distantia Veneris è Tellure in conjunctione cum Sole superiore, ad ejusdem distantiam in conjunctione inferiore ut 1 ad 6; sexiesque proinde magis Venus ad Tellurem accedit in una positione quam in alterâ, & tantum quoque mutatur Veneris apparens diameter è Tellure visa. Sed & distantiæ maximæ & minimæ per excentricitates orbium mutantur; nam omnium maxima fit distantia, quando conjunctio superior celebratur Venere & Tellure existentibus in Aphe-

Apheliis. Et omnium minima est distantia Veneris à Tellure, quando conjunctio inferior accidit, Venere in Aphelio & Tellure in Perihelio existentibus.

Cum Venus sit corpus Sphæricum & opacum, Solis luce non sua resplendens, oportet ut ea solum facies lucida videatur, quæ Soli obvertitur, alterum autem oppositum Veneris hemisphærium luce orbetur, & invisibile maneat; quapropter si talis sit Telluris situs, ut tenebrosum illud hemisphærium ei obvertatur, Venus Terricolis inconspicua fiet, nisi forte in Solis disco nigræ instar maculæ videatur. Si vero tota illustrata facies Terræ obvertatur, Venus pleno orbe fulgens videbitur. Et pro vario Telluris respectu Veneris, & Solis situ, varia erit forma atque figura, sub qua Venus conspicietur, phasesque subibit, Lunæ Phasibus per omnia similes.

Phases Veneris. TAB. 28. *fig.* 4.

Sit ABCDEFG orbita Veneris; TL Telluris orbitæ portio, sitque Terra in T, & Venus in A in conjunctione scil. superiore cum Sole. Patet in hoc Planetarum situ, faciem Veneris illuminatam totam Terræ obverti, atque proinde Venus instar Lunæ plenæ, ut circulus lucidus apparebit. Cum Venus ad situm respectu Solis & Telluris, qualis est B, pervenerit; pars aliqua obscuri hemisphærii eidem obvertitur, & proinde Veneris facies à Tellure visibilis, à circulo deficiet, & gibbosa apparebit; ad C perventa Venere, hemisphærii illustrati dimidium è Tellure videtur, Venusque dimidiata apparet ad instar Lunæ in prima vel ultima Quadratura. Venere in D existente, parva tantum illuminatæ superficiei pars Terræ obvertitur, cumque figura Veneris sit sphærica, quæ ob magnam à Terra distantiam, ut plana videtur, pars illuminata in cornua à Sole aversa, protendi videtur. Venus cum è Terra in E videtur, in conjunctione scil. inferiore cum Sole, totum ejus tenebrosum hemisphærium Telluri obvertitur, Venusque fit invisibilis, nisi forte ut nigra macula, per Solis discum transcurrere videatur, quod jucundum spectaculum semel Horoxcio nostro contigit. Easdem phases subibit Venus dum per FG, ad H transit, scil. circa F corniculata, in G dimidiata, & in H Gibbosa apparebit.

Copernici vaticinium. Hæ Veneris apparentiæ, etsi nudo oculo se non produnt telescopio tamen distincte conspiciuntur. Ante inventum telescopium, quando Copernicus Systema Antiquum Pythagoricum renovavit, & orbi literato proposuit, asseruitque Planetas omnes, inter quos Terram locavit, circa Solem in centro immobilem moveri, ei objectum fuit, si talis esset Planetarum motus, debere Veneris Phases Lunæ Phasibus esse similes. Respondet Copernicus, eas reverà ita esse fortasse venientibus sæculis dignoscent Astronomi. Hanc Copernici Prædictionem primus implevit magnus Galilæus Philosophus lynceus, qui telescopium ad Venerem dirigens, eam Phasibus suis Lunam æmulari deprehendit; quod Systema Pythagoricum mirifice confirmavit.

Tab. 28. fig. 5. Si centra Solis, Terræ & Planetæ, rectis jungantur, quæ faciunt triangulum TSO; & per centrum Planetæ erigantur plana ad rectas TO SO normalia, quorum illud abscindet Planetæ Hemisphærium Terræ obversum, hoc Hemisphærium à Sole illustratum; erit Trianguli TSO exterior angulus ad Planetam SOP æqualis angulo *moq*, quem metitur illuminati semicirculi pars *mq*, quæ Terræ obvertitur. *Phasium accurata determinatio.* Est enim angulus S*or* æqualis angulo *pom*, nam uterque rectus est, & angulus *ro*P æqualis angulo *poq*, sunt enim ad verticem; quare ablatis æqualibus erit angulus SOP æqualis angulo *moq*, quem arcus *mq* metitur. Semicirculi itaque illustrati pars *mq*, quæ terræ obvertitur, metitur angulum SOP, & arcus ille è Terra visus in suum sinum versum projicitur. Uti de Luna superius ostensum fuit. Hinc illuminatio Veneris è Terra spectata, cæteris paribus est ad illuminationem totam, ut sinus versus anguli exterioris ad Venerem, ad circuli diametrum.

Venus non est lucidissima cum pleno fulget orbe. Quamvis Venus in situ A Terricolis pleno orbe splendeat, non tamen in ea positione maxime & lucidissime fulget; diminuitur enim ejus splendor ob majorem à Tellure distantiam, idque in majore ratione, quam crescit faciei illuminatæ pars è Terra conspicua. Nam Veneris fulgor decrescit in duplicata ratione distantiæ auctæ. At pars illustrata crescit in ratione sinus versi anguli exterioris ad Planetam.

Ita-

Itaque ejus fulgor maximus non est, cum circa A versatur Planeta, sed major erit circa O. Sit enim Venus in O quatuor vicibus Telluri propior quam in A, in O lucidæ faciei partes datæ sedecies plus luminis ad Tellurem diffundent, quam cum Planeta est in A. Sed in O fieri potest, ut pars circiter quarta disci illuminati Terræ obvertatur. Adeoque magis augetur Veneris splendor ob diminutam distantiam, quam minuitur idem ob decrescentem phasim.

Si quæratur in quo situ Veneris splendor sit maximus; hujus Problematis solutionem dedit concinnam summus Geometra & Astronomus Edmundus Halley Collega meus, in Actis Philosophicis Londinensibus N°. 349. ubi ostendit Venerem omnium maxime fulgere, cum elongatur à Sole 40 circiter gradibus, ubi tantum pars quarta disci luminosi è Terra conspicienda sit; in quo situ, Venus die & lucente Sole conspecta fuit. Admirabilis est illa Veneris pulchritudo, qua proprio lumine carens, & tantum Solis mutuatitio lumine gaudens, in tantum splendorem erumpit, quantum non habet Jupiter, non Luna, cum æque à Sole elongatur: illius quidem lumen, si ad Veneris lumen comparetur, majus quidem erit ob apparentem corporis magnitudinem, at iners, mortuum, ac veluti plumbeum videtur; tantum præ illa Venus revibrat vegetum splendorem. *In quo situ Venus maxime lucida est.*

Si planum orbitæ Veneris coincideret cum plano Eclipticæ, videretur Venus semper in Ecliptica incedere. At motus Veneris non fit in plano Eclipticæ, sed in plano, quod ad illud inclinatur angulo trium graduum & 24 min. secatque planum Eclipticæ in linea per Solem transeunte, quæ *Linea Nodorum* vocatur, punctaque ubi orbita Planetæ producta Eclipticam secat *Nodi* dicantur. Adeoque Venus nunquam è Sole vel è Tellure in plano Eclipticæ videbitur, nisi cum in nodis versatur; in aliis orbitæ suæ punctis nunc minus, nunc magis, ab Ecliptica distabit: & è Sole visa maxima ejus ab Ecliptica distantia erit, cum nonaginta gradus ab utroque Nodorum removetur. *Orbita Veneris non coincidit plano Eclipticæ.*

Sit TAB circulus in Eclipticæ plano; LaVN orbita Vene- *TAB. 29. fig. 1.*

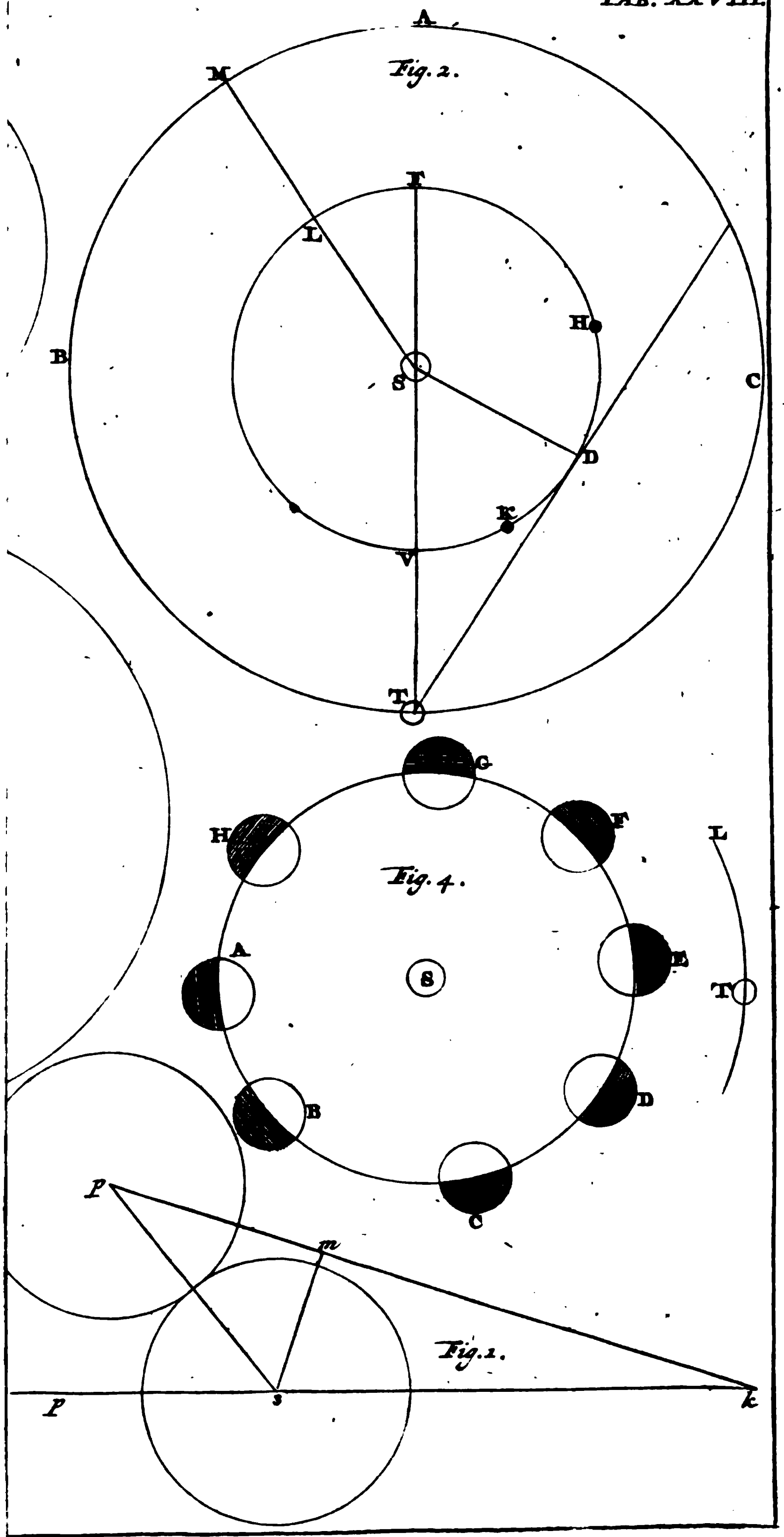
neris, quæ planum Eclipticæ secet in lineâ N*n*; concipiendum est orbitæ dimidium NL*n* supra planum Eclipticæ attolli, altera autem medietas NV*n* infra Eclipticam deprimi; cum Venus est in orbitæ suæ puncto N, erit in plano Eclipticæ, ad P autem progressa, ab Ecliptica deflectere videtur, longius autem ad L provecta planeta, ita ut NL sit circuli quadrans, maxime ab Ecliptica recedere videbitur, punctumque L vocatur *Limes*; Nam post digressum ab L rursus ad Eclipticam accedit Planeta. Si à Venere in P ad planum Eclipticæ demittatur normalis linea PE; & ducatur SE, angulus PSE metietur distantiam Veneris ab Ecliptica, & vocatur *Latitudo* Veneris *Heliocentrica*, qualis è Sole videtur. Hæc autem Latitudo ex dato Planetæ loco in sua orbita, hac ratione exquiritur. Sit arcus NE portio Eclipticæ, NP portio orbitæ Planetæ ad cælum productæ, P locus ejus, N nodus; per locum Planetæ transeat circulus ad Eclipticam perpendicularis, hujus circuli arcus PE, inter Planetam & Eclipticam interceptus, erit distantia Planetæ ab Ecliptica, seu mensura anguli PSE. In triangulo sphærico PNE, rectangulo ad E, datur latus NP distantia Planetæ à nodo, item angulus N inclinatio planorum orbitæ & Eclipticæ, quare per Trigonometriam innotescet latus PE, Latitudo Planetæ Heliocentrica, quæ erat invenienda. Latitudo hæc Heliocentrica, quoties Planeta in eodem orbitæ suæ puncto invenitur, constans & immutabilis est. At *Latitudo Geocentrica*, seu distantia Planetæ ab Ecliptica è Tellure visa, etiamsi in eodem orbitæ suæ puncto conspiciatur, continuo mutatur pro vario situ Telluris, respectu Planetæ. Sit enim BTA*t* orbita Telluris, NP*n* orbita Planetæ, qui sit in P, à quo ad planum Eclipticæ demitti concipiatur perpendicularis PE. Hæc linea, in quocunque orbitæ suæ puncto locetur Tellus, subtendet angulum, qui Planetæ Latitudinem Geocentricam metitur. Sit itaque Tellus in T, & Venus in P Telluri proxima, in quo situ Venus videtur in conjunctione cum Sole inferiore, ejus Latitudo Geocentrica per angulum PTE mensurabitur. At Venere in eodem loco P existente, si Tellus punctum *t* occuparet, & Venerem videat in conjun-

Latitudo Heliocentrica.

Latitudo Geocentrica.

Tab. 29. *fig.* 2.

TAB. XXVIII.



junctione superiore, ubi longissime ab illa distat, Latitudo Geocentrica erit secundum angulum P*t*E mensuranda, qui angulo PTE multo minor est, ob distantiam P*t* distantia PT multo majorem. Hæc eadem de Mercurii Latitudine sunt intelligenda. Unde patet, quod Planetarum Inferiorum, cæteris paribus, Latitudo visa major est, cum hi Telluri sunt proximi, minor cum sunt remotissimi. Et quidem fieri potest, ut Veneris Latitudo Geocentrica major sit Heliocentrica, cum scil. intra Solem & Terram locatur, ubi Telluri quam Soli propior est. At Mercurius cum semper longius à Tellure quam à Sole distet; semper minor erit ejus Latitudo Geocentrica quam est Heliocentrica, quæ cum maxima est, septem fere gradibus æquatur; tanta enim est inclinatio ejus orbitæ ad planum Eclipticæ.

Cum nullius Planetæ orbita jaceat in Ecliptica, sed quælibet eam secat in recta, quæ per Solem transit, necesse est ut Planetæ omnes bis tantum in qualibet periodo, in Ecliptica videantur, scil. cum in propriis nodis versantur; aliis omnibus temporibus nunc magis, nunc minus, ab Ecliptica migrare conspicientur; sunt tamen certi & determinati limites, extra quas nunquam divagantur Planetæ. Adeoque si concipiatur in cælo Zona, seu spatium latum viginti circiter graduum, per cujus medium incedit Ecliptica, hoc spatium Planetas omnes ambitu suo semper continebit, & *Zodiacus* nominatur, ab imaginibus animalium, seu Asterismis qui hanc cæli partem occupant, nomen ducens. Tellus regia semper incedens via, nusquam ab ejus medio seu ab Ecliptica deflectit, ideoque neque Sol ab illa declinare videbitur. Luna & errones quinque ad decem quandoque gradus interdum versus Meridiem, interdum versus Septemtrionem exspatiantes, intra Zodiaci tamen limites motus suos exercent. *Zodiacus quid.*

Hucusque contemplati sumus motus atque Phases Veneris ex ejus situ respectu Solis & Telluris pendentes, Nunc motum e Tellure visibilem in cælis secundum Zodiacum perpendamus. Sit ABC orbita Veneris, TGF orbita Telluris, LMO circulus referat Zodiacum ad Stellas fixas productum; *Motus Veneris in Zodiaco.* TAB. 29. *fig.* 3.

 sit

sit primo Tellus in T & Venus in A, prope superiorem cum Sole conjunctionem; Patet spectatorem e Tellure Venerem in cælo referre ad punctum Zodiaci L; & si Tellus quiesceret, dum Venus arcum AB in orbita propria percurreret, illa portionem Zodiaci LM describere videretur. At quia Tellus interea movetur, cum Venus est in B, appellit Tellus puncto orbitæ suæ H, ex quo Venus conspicietur in N, & per arcum Zodiaci LMN deferri videbitur; eritque Venus magis in orientem progressa quam in priore casu. Cum vero Venus ad C pervenerit, Tellus ad G defertur, ita ut Venus in recta ejus orbitam tangente & in Zodiaci puncto O conspicietur. In quo situ, motus ejus apparens erit fere æqualis motui apparenti Solis. Moveatur deinde Venus ex C ad A rursus, & interea Tellus arcum GK percurrat, & Venus circa conjunctionem inferiorem cum Sole videbitur, & in illo situ ad Zodiaci punctum P è Tellure referetur, cumque prius in O conspiciebatur Venus, per arcum OP regressam esse, seu ab ortu in occasum contra seriem signorum tendere, spectabitur: Cumque in C una cum Sole progredi visa fuit, in A autem celerrime regredi; oportet ut sit locus aliquis medius inter C & A, ubi nec regredi, nec progredi, sed ut stationaria videatur, & eundem in cælis locum per aliquod tempus conservare. Perveniat jam Venus ad E, & Tellus ad F, & Venus è Tellure videbitur in Eclipticæ puncto Q magis regressa; ubi autem Venus videtur è Tellure in recta quæ ejus orbitam tangit, rursus motum progressivum cum Sole habebit. Adeoque inter mutationes cursus, seu inter motum progressivum & regressivum, Venus morabitur nonnihil, & eodem in loco per aliquot dies consistere videbitur; ubi autem Tellus ad D pervenerit, & Venus sit in C, videbitur per arcum Zodiaci QR motu celeri versus orientem progrediisse. Hinc Venus, cum in superiore cum Sole conjunctione versetur, semper directe incedere, seu secundum signorum seriem moveri conspicitur: At cum est in inferiore conjunctione, seu cum inter Solem & Terram existet, tunc regredi & contra seriem signorum ferri apparet.

Motus Veneris progressivus.

Motus Regressivus.

Venus stationaria.

Quando Venus directa. Quando regredi videretur. Similes sunt Phases Mercurii.

Quæcunque de Veneris motibus ostendimus, ea quoque

de

TAB. XXIX.

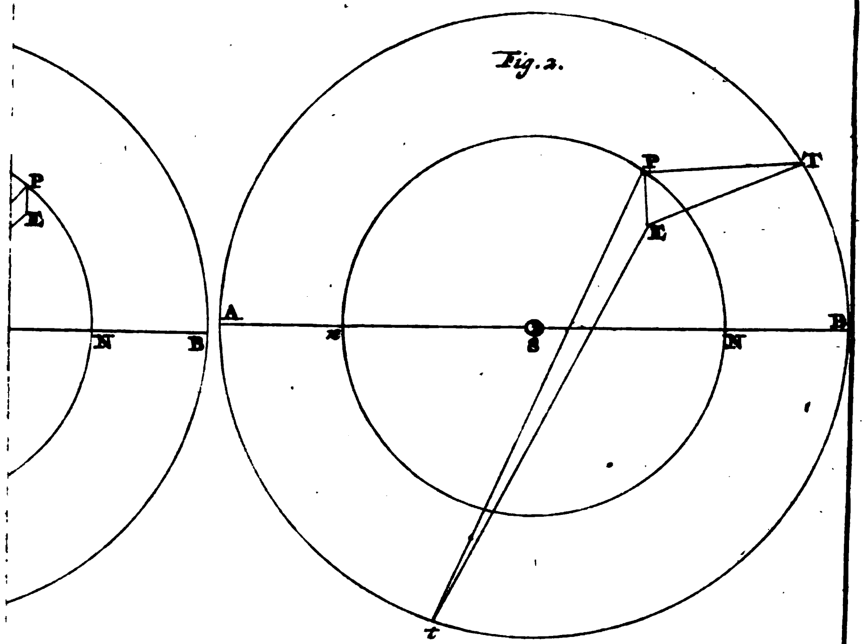


Fig. 2.

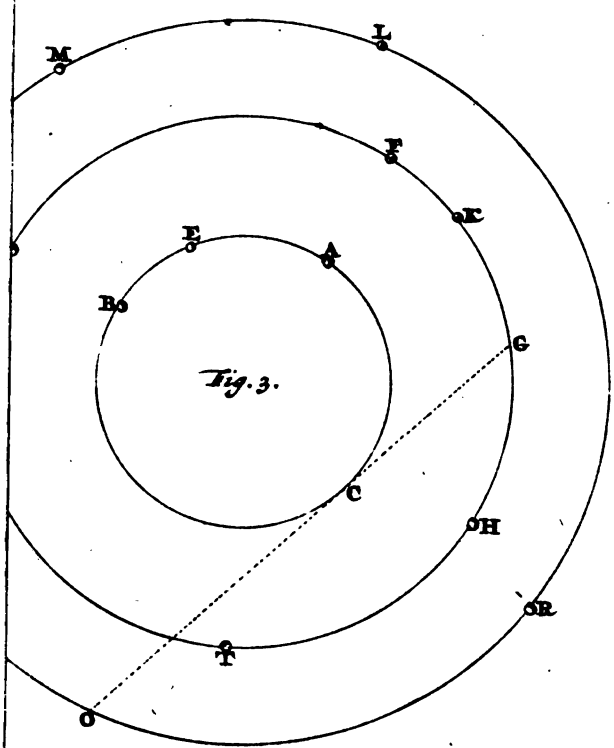


Fig. 3.

de Mercurio ejusque motibus vera erunt. At Mercurii conjunctiones cum Sole, Directiones, stationes & regressus frequentiores sunt, quam Veneris, hic enim celerior & in minore orbita latus, sæpius Tellurem assequitur quam Venus. Maxima Mercurii à Sole digressio adæquat circiter gradus 33. Ex his patet, quod horum Planetarum motus apparentes, è Tellure visi sunt admodum inæquales, qui nunc progredi, nunc stare, mox regredi, & rursus stare cernuntur; at spectator in Sole locatus, hos Planetas semper eodem tenore progredientes conspiciet.. Nam talis est in his Planetis è Terra apparens motuum inæqualitas, ut æquabili circa Solem lationi accurate respondeat, unde liquet non Tellurem, sed Solem esse centrum motus Planetarum inferiorum.

Sicuti superius ostensum fuit, orbitam Telluris non esse circulum sed Ellipsim, hoc idem verum erit de orbitis Veneris atque Mercurii, & cæterorum Planetarum, quorum omnium orbitæ sunt Ellipses, quæ non communem focum habent, in quo Sol residet, circa quem motibus licet inæqualibus Planetæ ferantur, certa tamen & immutabili lege motus ipsorum reguntur; nam ita Ellipseos perimetrum percurrunt, ut ab ipsorum centris, Radiis ad Solem ductis, describant seu verrant Areas Ellipticas temporibus proportionales; adeoque in Apheliis tardius incedunt Planetæ, in Periheliis velocius feruntur. Aphelia autem aliter quam Lunæ Apogæon vel quiescunt, vel lento admodum motu progrediuntur, adeoque saltem per unius hominis ætatem tanquam quiescentia haberi possunt. Observandum autem est Mercurii orbitam esse omnium maxime excentricam. Nam ejus Excentricitas est ad distantiam mediam ut 2051 ad 10000

Orbitæ Planetarum sunt Ellipses.

LECTIO XVI.

De Motibus Planetarum superiorum Martis, Jovis & Saturni & Phænomenis inde ortis.

IN Phænomenis inferiorum Planetarum explicandis satis diu immoratum est. Ad superiores Planetas eorumque motus contemplandos accedimus. Sit itaque ABCT orbita

TAB. 30. fig. 1.

Telluris. Rotentur circa Solem Saturnus, Jupiter & Mars in diversis ab illo distantiis, diversisque temporum periodis circuitus perficientes; sitque PQV portio Zodiaci, in quo motus suos peragere videntur. Primo patet hos Planetas è Sole visos, posse cum Terra conjungi vel etiam eidem opponi. Scil. si Saturnus sit in ♄, potest Tellus in M locari, in recta quæ Solem & Saturnum conjungit, in quo situ è Sole videntur Planetæ in conjunctione. Vel potest Tellus in eadem recta in contrarias partes producta, in B scil. existere, ubi e Sole Saturno opponi videbitur: at in hoc situ, Sol è Tellure visus cum Saturno conjungi apparebit. 2do Patet Planetas hos è Terra visos posse aspectum quemlibet ad Solem obtinere, seu in dato quovis angulo à Sole elongari, quod in inferioribus fieri non potuit, qui semper in Solis vicinia commorantur. Nam à Terra T duci potest recta TP, quæ orbitas omnes secat, & cum TS recta Solis & Terræ centra conjungente datum faciat angulum STP, adeoque cum Terra est in T, Saturnus fieri potest in F, cujus elongatio à Sole est angulus STF. Præterea quando Terra & quilibet Planeta superior e Sole in conjunctione videntur, Planeta ille e Terra spectatus, Soli opponi conspicietur; eosque opposita cæli puncta occupare videbit Terricola.

Tempus determinatur, in quo Planeta superior ad conjunctionem aut oppositionem antrevertitur.

Conjungatur quilibet Planeta superior v. gr. Saturnus cum Tellure e Sole spectatus; Post conjunctionem, cum Terra velociore motu angulari feratur quam Saturnus, illam à Saturno magis indies recedere aspiciet Solicola; cumque Tellus arcum 59 min. & 8 secund. motu medio quotidie describit, Saturnus autem, tantum duo minuta prima, erit motus Telluris à Saturno, e Sole visus, quolibet die 57 min. & 8 secunda; si itaque fiat ut 57 min. & 8 secunda ad gradus 360, ita dies ad quartum, dabitur numerus dierum, in quibus Tellus rursus Saturno conjungi videbitur, æqualis scil. diebus 378. Sed cum Tellus & Saturnus, e Sole spectati, conjunguntur, Sol & Saturnus e Tellure visi opponuntur; ergo tempus inter duas proximas oppositiones Solis & Saturni ex motibus eorum mediis computatas, æquatur diebus 378 seu Anno cum diebus tredecim. Idem intertercedit tempus inter duas conjunctiones Saturni cum Sole proximas e Tellure visas; vel inter duas quaslibet similes Saturni Elongationes à Sole: Tempusque inter conjunctionem & proximam oppositionem est hujus spatii dimidium, nempe dies 189.

Similiter invenietur Tempus inter duas proximas Jovis cum Sole conjunctiones, aut eidem oppositiones esse æquale Anno una cum triginta tribus diebus. At Mars post unam oppositionem, sequentem non attinget, nisi post binos annos, & insuper quinquaginta dies.

Planetæ omnes Soli oppositi oriuntur occidente Sole, & occidunt illo oriente; post autem digressum Planetarum à Solis opposito, manent Sole orientaliores, postque Solis occasum vesperi sunt conspicui, donec Soli conjuncti simul cum illo occidunt & oriuntur, deinde post eorum à Sole recessum fiunt Sole occidentaliores, & mane ante Solis ortum tantum conspici possunt; nam vespere citius Soli occidunt, donec ad oppositum Solis perveniunt, ubi rursus oriuntur occidente Sole.

Uti de Inferioribus ostensum fuit, ita quoque superiorum Planetarum orbitæ non jacent in plano Eclipticæ, sed eorum omnium plana Eclipticam secant in rectis, quæ per Solem transeunt, & Nodorum Lineæ dicuntur. Punctaque ubi hæ lineæ Eclipticæ occurrunt, Nodi vocantur. Quare nec superiores Planetæ unquam in Ecliptica videntur, nisi cum in nodis versantur; in aliis omnibus locis nunc magis, nunc minus, ab Ecliptica deflectunt, & maxime ab illa distant cum circa limites seu puncta ab utroque nodo æquidistantia versantur, ubi Latitudines maximæ Heliocentricæ sunt quæ sequuntur, scil. Saturni Latitudo maxima Heliocentrica est 2 grad. 33. min. Jovis 1 grad. min. 20. Et Martis 1 grad. 52. min. *Orbitarum Plana inclinantur ad Eclipticam.*

Dato Loco Planetæ in sua orbita, seu distantia ejus à nodo, eadem ratione exquiretur ejus Latitudo Heliocentrica, qua vos Veneris & Mercurii Latitudines invenire docuimus. Latitudines autem Planetarum Geocentricæ, seu distantiæ à Plano Eclipticæ e Tellure visæ, ex situ & distantia Telluris plurimum pendent; nam eadem manente Latitudine Planetæ Heliocentrica, pro varia positione Telluris, varia erit ejus Latitudo e Terra visa. Sit enim Telluris orbita T ☋ t, superioris vero cujusvis, Martis verbi gratia orbita sit ♂ M, cujus planum ad Eclipticæ planum inclinatur; illudque intersecat in linea Nodorum N *n*. Sit Mars in ♂, & Tellus in T, ut videatur Mars in aspectu ad Solem opposito; ex ♂ ad planum Eclipticæ demittatur normalis recta ♂ E, hæc recta subtendit angulum, qui latitudinem Planetæ Geocentricam metitur. Cum itaque Tellus est in T, inter Solem & Martem, Latitudinem Martis visam angulus ♂ TE metietur. At si Tellus in *t* locetur, ut Sol fiat Marti conjunctus, ejus Latitudo è Terra spectata erit æqualis mensuræ anguli ♂ *t* E, qui angulo ♂ TE multo minor est, & in eadem fere ratione minor qua distantia T ♂ minor est distantia *t* ♂. Si Tellus sit in T, erit Martis Latitudo Geocentrica major Heliocentricâ & quando Tellus in *t* existat, erit illa hac minor. Eodem modo pro vario situ Martis & Telluris, respectu Solis, Latitudo ejus Geocentrica mutatur, ita ut cæteris paribus illa sit minor, quo Mars propior sit conjunctioni cum Sole, & major quo is Solis opposito sit vicinior.

Tab. 31. fig. 1.

Patet etiam superiorum nullum è Terra visum posse in Solis disco spici, ut Veneri & Mercurio contingit. Potest tamen illorum quivis à Sole tegi, quando Planeta cum illo conjunctus, sit nodo satis vicinus, ut post Solem lateat.

Planetæ superiores pleno orbe fulgent.

Cum Planetarum omnium facies, quæ Soli obvertuntur, Solis luce reflexa splendeant, cumque Tellus in vicinia Solis semper apparet è Jove aut Saturno conspecta, horum Planetarum facies quæ Soli obvertuntur, etiam Terræ obversæ erunt; unde semper Terricolis pleno orbe fulgentes apparebunt hi planetæ. At cum Mars in orbita feratur, quæ propius ad Telluris orbitam accedit, patet ejus faciem Soli obversam non semper totam Telluri obverti, sed circa quadratum Martis cum Sole aspectum, cum scil. Tellus sit in M vel B, & Mars in N aut R, pars aliqua faciei illuminatæ è Terra non videbitur, & proinde Phasis Martis erit gibbo-

Mars in quadrato aspectu aliquantulum gibbosus.

Tab. 30. fig. 1.

gibbosa, at in conjunctione aut oppositione Martis & Solis, totus illuminatus discus è Terra erit conspiciendus; & præsertim in oppositione Solis, ubi Terræ proximus rotundam & maxime fulgidam speciem exhibet.

Planetæ superiores multo majores videntur in oppositionibus Solis, quam in conjunctionibus, nam multo minus à Tellure distant in uno situ, quam in altero; & distantiarum differentia æqualis est diametro orbis magni in quo circa Solem movetur Terra, quæ differentia cum ad semidiametrum orbitæ Martis majorem habeat proportionem, quam ad reliquarum orbitarum semidiametros, maximum ejus magnitudinis apparentis faciet discrimen. Nam Mars quinquies circiter nobis est propior in oppositione Solis, quam cum in ejus conjunctione videtur; adeoque cum visibilis cujusvis discus & splendor augetur in duplicata ratione distantiæ diminutæ, Mars vigesies quinquies major & simul lucidior in oppositione Solis quam in ejus conjunctione apparebit. *Planetæ superiores in oppositione Solis quam in conjunctione majores.*

Cum Jupiter quinquies longius à Sole distet, quam Terra ab eodem distat; diameter Solis apparens, è Jove sub angulo tantum sex scrupulorum videbitur, qui nobis est triginta, Solque Jovis incolis vigesies quinquies minor apparebit quam nobis. Et luminis & caloris vicesimam quintam tantum partem à Sole recipient Jovicolæ, illius quo fruuntur & foventur Terricolæ. At Saturnus cum decies longius à Sole distet quam nos, Apparens Solis diameter ex illo visus sub angulo trium tantum scrupulorum conspicietur, & paulo duplo major quam Venus Perigæa nobis apparebit. Adeoque Solis discus ex Saturno visus centies minor apparebit, & tam Lux quam calor in eadem ratione in Saturno minuuntur; unde oportet ut Saturni Regiones etiam Æquatoriæ sint nostris intra Polares circulos inclusis Terris frigidiores. *Diversitas caloris in Planetis.*

Planetæ omnes superiores è Sole conspecti, uniformiter secundum eandem plagam & eadem lege, æquabili scil. Arearum descriptione, semper progredi cernuntur, unde fit ut eorum motus angularis circa Solem sit inæqualis; in Aphelüs enim morantes tardius incedunt, circa Perihelia ver- *Planetarum motus è Tellure conspecti irregulares.*

versantes, velocius feruntur; at è Tellure visi hi Planetæ, motus admodum irregulares in Zodiaco peragere videntur, aliquando enim progrediuntur ab occidente in orientem, secundum veros ipsorum motus, deinde paulatim tardescunt; donec tandem immobiles & quasi stationarii conspiciuntur; mox motu retrogrado ferri, & in plagam motibus veris contrariam tendere eos aspicimus; rursusque deinde quasi immobiles stare apparent; donec post aliquod tempus progredi, & ab occidente in orientem ferri videntur. Hæ motuum & cursuum mutationes, ex motu & situ Telluris omnes oriuntur.

TAB. 30. *fig.* 2. Sit PQO portio Zodiaci, ABCD orbita Telluris EMGHZ superioris cujusvis Planetæ orbita v. gr. Saturni. Sitque Tellus in A, & Saturnus in E, in quo situ è Tellure videbitur Zodiaci punctum O occupare. Si Saturnus quiesceret, Tellure ad B deventa, videretur Saturnus in Zodiaci puncto L, & per arcum OL secundum seriem signorum seu ab occidente in orientem progressus; verum interea dum Tellus transit ab A ad B, Saturnus fertur motu proprio ab E ad M, ubi in conjunctione cum Sole venit, & ex Terra arcum OQ in Zodiaco confecisse videbitur, & hic arcus est arcu OL major; unde Planetæ superiores cum sunt in conjunctione cum Sole, celerrime progrediuntur, ob duplicem causam, nempe quod revera circa Solem ferantur, tum quod Terra in adverso semicirculo in eandem plagam feratur, circa idem centrum; adeoque Planeta quando à Terra est remotissimus & Soli conjunctus citius solito in consequentia signorum ferri apparet; quo in situ dicitur fieri directus. Ad C deventa Tellure, dum Saturnus arcum MG describit, is in Zodiaco in R conspicietur: quando autem Tellus est in K, & Saturnus in H, Tellus fere in recta movetur quæ per Saturnum transit, vel quod idem est recta Saturnum & Terram connectens orbitam Terræ tanget, & Terricola Saturnum ad idem Zodiaci punctum tunc referet, & eundem locum inter fixas conservare videbit; unde in eo situ Saturnus stationarius apparebit.

Quando Planeta directus & velox.

Quando stationarius videtur.

At Tellure in D translata, & Saturno oppositum Solis Pun-

punctum X tenente, videbitur is locum in Zodiaco V occupare & per arcum PV regressus. Unde liquet Planetas cum Soli opponuntur semper retrogrados conspici, & in Antecedentia, seu contra signorum seriem, motu apparenti ferri. Ad A autem rursus delata Tellure, & Saturno circa Z hærente, denuo in statione sua in puncto scil. N permanere apparebit Planeta; & tandem cum Tellus hunc situm reliquerit, Saturnus rursus progredi & in directum moveri conspicietur.

Quæ de Saturno hic ostensa sunt, eadem de Jove & Marte intelligenda sunt; qui nunc progredi, nunc stare, mox regredi deinde stare, & denuo progredi conspiciuntur, Saturni autem regressiones frequentiores sunt quam Jovis, exinde quod Tellus Saturnum Planetarum lentissimum sæpius assequetur, quam Jovem non paulo velociorem. Quin ob eandem causam Jovis quoque regressiones frequentiores sunt quam Martis, quia scil. Mars velocior Jove latus, majus spatium percurrit & opus erit, ut longiore tempore ad oppositum Solis perveniat, quam in Jove requiritur.

Parallaxes orbis Annui Planetarum. Tab 31. *fig.* 2.

Sit AC portio orbitæ Terræ, quam tangit recta AN, in qua è Tellure ponamus conspici Planetas superiores, scil. Mars in ♂ videatur, Jupiter in ♃, & Saturnus in ♄, sitque KLMN portio Zodiaci. Erit Martis locus è Sole visus K, qui est locus verus & Heliocentricus; at cum Tellus sit in A, ex illo loco Mars ad Zodiaci punctum N referetur, quod dicitur ejus apparens locus. Similiter Jupiter è Sole visus in L conspicitur, qui est ejus locus verus, at è Tellure ad punctum N refertur. Eadem ratione Saturni verus locus qualis ex Sole orbitæ suæ centro conspiciendus est, erit in M, at locus apparens e Terra visus est in Zodiaci puncto N. Arcus KN LN MN differentiæ scil. inter locos apparentes & veros dicuntur Parallaxes orbis annui in his Planetis. Per Solem S ducatur SO ad AN parallela, eruntque per 29. *El. primi* anguli A♂S, A♃S, A♄S singuli respective æquales angulis KSO LSO & MSO, quorum mensuræ sint arcus KO LO & MO. Est vero angulus ANS, æqualis angulo NSO, cujus

Xx men-

mensura est arcus NO, qui itaque erit mensura anguli ANS, sub quo semidiameter orbitæ Terræ e cælo videtur, sed AS semidiameter orbitæ Terræ respectu distantiæ cæli, seu fixarum evanescit; nam illa e fixis conspecta sub nullo fere angulo videtur: evanescit igitur in cælo angulus NSO huicque proportionalis arcus NO, & proinde coincidere videntur puncta N & O, & arcus KO LO & MO minime different ab arcubus KN LN & MN, qui itaque erunt mensuræ angulorum A♂S A♃S A♄S. At illi anguli sunt ut apparentes semidiametri orbitæ Telluris ex Planetis singulis visæ. In singulis itaque Planetis superioribus, Parallaxis orbis annui est ubique ut angulus sub quo semidiameter orbis magni per Terram transiens, e Planeta videtur; & quo propior Planeta ad Tellurem vel Solem accedat, eo major fit iste angulus. Hinc Parallaxis in Marte major erit illâ Jovis; sicuti in Jove Parallaxis annua major erit quam in Saturno. At in stellis fixis nulla deprehenditur Parallaxis orbis annui.

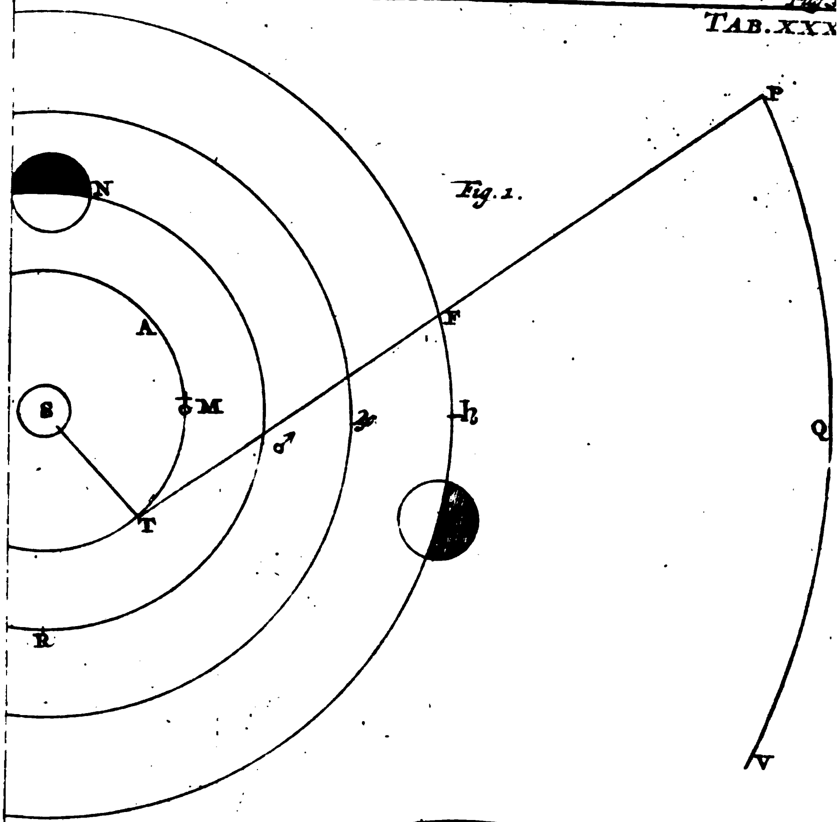
Anguli A♂S A♃S A♄S sunt quam proxime maximæ Elongationes Telluris à Sole e respectivis Planetis visæ; in Marte adæquat hic angulus 42. gr. adeoque Tellus e Marte conspecta minus digreditur à Sole quam Venus à nobis visa. In Jove maxima elongatio Telluris à Sole videtur gr. 11. quæ est circiter semissis Elongationis Mercurii maximæ à nobis conspiciendæ. In Saturno Angulus hic, seu Elongatio Telluris à Sole maxima minor est sex gradibus, & quarta circiter pars Elongationis Mercurii à nobis visæ, cumque Mercurius raro admodum se nobis conspiciendum præbet, rarissimus e Saturno erit Telluris nostræ conspectus, & fortasse Saturniis Astronomis nondum innotescit, Globum Telluris nostræ in rerum natura existere.

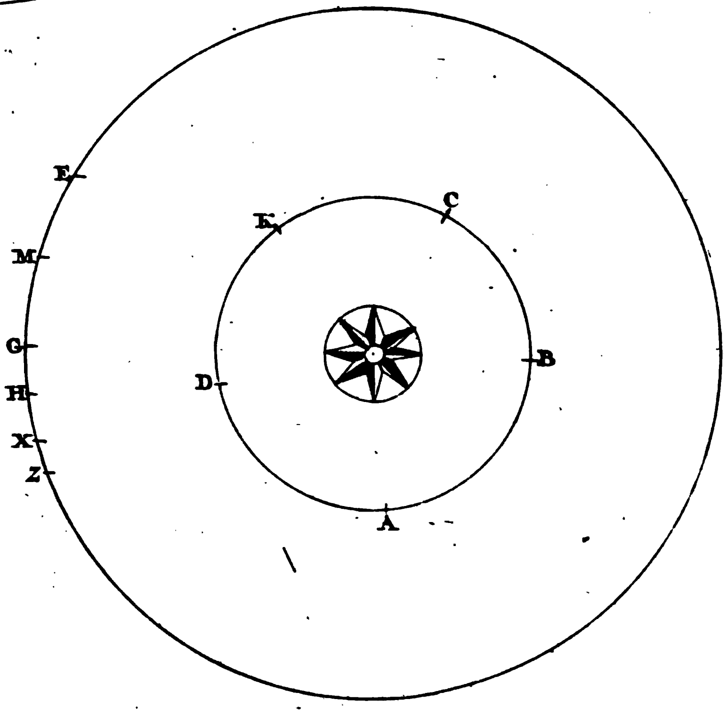
Retrogradationes, in Marte majores quam in Jove & in Jove, majores quam in Saturno.

Hinc manifestum quoque est, Retrogradationes in Marte, majores esse quam in Jove, necnon majores in Jove, quam in Saturno, idque ob duplicem causam, tum quod Mars Telluri propior sit quam Jupiter, & is quam Saturnus, tum quod velociore motu ferantur.

Ex data in quovis Planeta Parallaxi orbis annui, facile in-

Fig. 1.





innotescet ejus distantia à Sole, respectu distantiæ Telluris ab eodem. Nam quoniam in Marte datur angulus A ♂ S, quem metitur arcus Parallaxis annuæ, & angulus ♂ AS, Elongatio Planetæ à Sole, observatione aut calculo cognitus, si fiat ut sinus Parallaxis annuæ, ad sinum Elongationis Martis à Sole, ita SA distantia Telluris à Sole, ad S ♂ distantiam Martis ab eodem, illa dabitur. Hæc Parallaxis orbis, qua Planetæ citius tunc tardius in cælo videntur ferri, & nunc in orientem promoveri, nunc in occidentem retrahi conspiciuntur, producit in motibus eorum Inæqualitatem, quæ ab Astronomis Inæqualitas secunda & Optica dicitur, ut distinguatur à prima quæ Planetis revera inest, qua inæquabili motu in orbitis suis ferantur: in oppositionibus aut conjunctionibus Planetarum cum Sole, inæqualitas illa seu Parallaxis evanescit, & idem est locus Planetæ Geocentricus qui Heliocentricus, seu qui ex Sole videtur.

Dantur Planetarum distantiæ à Sole ex data Parallaxi orbis annui.

Inæqualitas secunda & Optica quid?

Planetarum duo extimi amplo satis donantur Satellitio, nam Jupiter non paucioribus quam quatuor comitibus stipatus incedit, Saturnus quinque; mirum & jucundum spectaculum; hi instar Lunæ nostræ, primarios suos in circulationibus circa Solem perpetuo comitantur, & interea circa primarios gyros describunt, unde ex Primariis conspecti easdem subeunt Phases, quas nobis Luna exhibet, in oppositionibus cum Sole fulgidi & pleni apparent; exinde discedentes gibbosi, cumque veniunt ad quadratum cum Sole aspectum, dimidiati; ante conjunctionem corniculati, & in ipso cum Sole coitu prorsus evanescunt.

Jovis & Saturni Satellites.

E Terra visi hi Satellites, quamvis nunquam e Primario suo longe recedant, nunc tamen ei propius admoveri, nunc ab illo digredi conspiciuntur. Sit ABT orbita Terræ in cujus medio est Sol, SF sit portio orbitæ Jovis, in qua sit Jupiter in ♃, qui residet in centro quatuor circulorum, quos quatuor Comites, seu Lunæ circa ipsum describunt. Lunæ hæ quando inferiores orbitarum partes LNM describunt, e Sole vel Terra conspectæ, versus occidentem tendere videntur, at dum orbitarum partes superiores GHK percurrunt, in orientem secundum veros ipsorum motus

TAB. 31. fig. 3.

progredi conspiciuntur. Et cum ad orientem tendunt Lunæ bis occultantur, semel quidem in O ab interposito Jovis corpore, quod in recta est inter Terræ & Jovis centra, iterumque in umbra Jovis evanescere videntur comites; quæ occultationes proprie Lunarum Eclipses sunt, quæ nunquam contingunt, nisi quando inter eas & Solem Jupiter directe interponitur, hoc est momento Plenilunii, Solis lumine privantur, sicuti Luna ex Terræ interpositione ob eandem causam deficit.

Quando Jupiter est Sole orientalior, & Vespertinus apparet, hoc est cum Tellus in A, prius latent pone Jovem, ob conjunctionem visam cum corpore Jovis, priusquam in umbram incurrunt, deinde ab umbra Jovis deliquia patiuntur. At quando Jupiter est Sole occidentalior, hoc est post ejus conjunctionem cum Sole, ubi is mane apparet, hoc est, quando Tellus circa B versatur, prius in Jovis umbram incurrunt Lunæ ad V, quam ab ejus corpore occultantur in P, cum autem retrogradæ sunt Lunæ, id est quando tendunt ad occidentem seu Inferiores orbitarum partes percurrunt, tunc semel tantum absconduntur, ut in Q, cum ab ipsius Jovis corpore distingui non possunt, at quando e Sole conspectæ in conjunctione cum Jove inferiore videntur, seu quando Jovis incola eas Soli jungi conspicit, earum umbræ in Jovem incidunt, & aliqua pars disci Jovis eclipsim exinde patietur; & qui sub umbra degunt, Solem eclipsari videbunt. Harum Lunarum tam Jovialium quam Saturniarum Periodi & distantiæ à primariis eæ sunt, quæ ad finem Lectionis Tertiæ à nobis traditæ sunt.

Per Eclipses Jovialium Parallaxis orbis annui, & distantia Jovis à Sole determinatur.

Ex harum Lunarum motibus & Eclipsibus, Parallaxis orbis annui & distantia Jovis à Sole optime innotescit. Sit POR orbita cujusvis satellitis v. gr. extimi, sitque Tellus in orbitæ suæ puncto A: oportet observare tempus quando post Jovem latet satelles in O; quod ut fiat, observetur momentum quando primo videri desinit, atque iterum momentum quo conspici incipit, momentum inter hæc medium, erit momentum temporis, quando in recta per Jovis

vis & Terræ centra tranſeunte locatur. Similiter obſervetur Tempus quando Satelles eſt in medio Eclipſis quam ab umbra Jovis patitur, ſcil. quando eſt in V, ex quibus dabitur tempus quo arcum OV deſcribit; & cum motus ejus circa Jovem æquabilis ſit, exinde habebitur arcus OV, nam circa Jovem revolutionem abſolvit hic ſatelles horis 402. Supponamus tempus quo Satelles ex O ad V movetur eſſe duodecim horarum. Fiat ut 402 horæ ad horas 12 ita 360. gr. ad quartum qui invenietur 10 gr. min. 44. eſt itaque arcus OV æqualis grad. 10. min. 44. At eſt arcus OV menſura anguli O♃V, ſeu huic æqualis A♃S, cujus menſura eſt Parallaxis orbis annui, quæ proinde innoteſcet. In Triangulo igitur A♃S datur angulus ad ♃; & præterea angulus ad A, Elongatio Jovis à Sole ex Terra viſa, quem Aſtronomos tum ex calculo, tum ex obſervatione cognoſcere poſſe certum eſt; datur præterea latus AS diſtantia Terræ à Sole quæ ponatur 100000, cum igitur in hoc triangulo dantur omnes anguli, & unum latus; dabuntur per Trigonometriam reliqua latera, hoc eſt latus S♃ diſtantia Jovis à Sole, & latus A♃ diſtantia Jovis à Terra. Verum ut hæc exacte habeantur opus eſt pluribus accuratiſque obſervationibus, iiſque optimo teleſcopio peractis.

Per Stellarum Jovialium Eclipſes ſolvitur Problema totius Phyſicæ nobiliſſimum, quod dignitatis & admirationis plurimum in ſe habet; *Num ſcil. Lucis motus ſit inſtantaneus*, aut ſucceſſivus? Ex his enim Eclipſibus demonſtratur lucem non in inſtanti propagari, motu tamen admodum pernici, & celeritate incredibili ab aſtris ad nos pervenire.

Lucis motus non eſt inſtantaneus.

Nam ſi Lucis motus inſtantaneus eſſet, cum Tellus eſt in T à Jove maxime remota, eodem momento videretur Eclipſis ſatellitis ac ſi eſſet in X Jovi proxima; nam ſecundum hanc hypotheſin lux eodem momento, per ſpatia indefinita propagatur, ſin lucis propagatio ſenſibilem aliquam temporis moram requirat, obſervator ad X diſtantiâ XT quæ diametro orbis magni æqualis eſt, erit Jovi propior quam obſervator in T locatus, citiuſque Eclipſim videbit, quam qui ex T illam aſpicit, unde ex intervallo temporis, distantiæ XT proportionato radiorum velocitatem æstimare licebit. Atque ita se res habet, nam quotiescunque Terra Jovi propior accedit, Satellitum Eclipses citius incipiunt, quotiescunque Terra ad T à Jove recedit, Eclipses serius conspiciuntur, quam per computationes factas fieri debent. Hæ quidem anticipationes, & prolongationes Eclipsium Satellitum, per plurimos annos observatæ, à *Domino Romero* primùm adhibitæ fuere ad successivam lucis propagationem statuendam, lucemque eadem ratione qua reliqua omnia corpora mota determinato quodam velocitatis gradu propagari evincunt; cui sententiæ plerique Astronomi & Philosophi assensum præbuere.

Lucis itaque particulæ, etsi indefinite exiguæ, motu progressivo rectilineari feruntur, & non per undas medii alicujus defunduntur, Lucis velocitatem talem esse statuit Romerus, ut à Sole ad nos spatio undecim minutorum perveniat, at distantia illa inter Solem & nos quinquaginta millies millenis passibus non minor est, quod spatium tantillo tempore percurrit lux ut ejus velocitatem satis admirari non possimus, quæ corporum velocissimorum celeritates in immensum superat, & quamvis Tellus celeri admodum motu circa Solem feratur, ejus tamen velocitas ad velocitatem lucis comparata, non majorem habet rationem quam motus testudinis ad illam Terræ velocitatem.

Per easdem Eclipses determinantur Locorum Longitudines.

Ex Eclipsibus Jovialibus hoc etiam commodi nobis derivatur, quod ex iis in diversis Terræ locis observatis, locorum longitudines determinantur, sed ut hæc methodus determinandi locorum longitudines, clarius vobis elucescat, quædam hic præmittenda sunt.

Si per Terræ polos & locum quemlibet in ejus superficie traduci supponatur circulus maximus, hic circulus, ob revolutionem Telluris diurnam, circa axem Telluris etiam vertitur, cumque ejus planum per Solem transierit, ab omnibus incolis qui sub illo degunt, Sol in illo existere videbitur, iisque Meridiem efficit; ob quam causam, circulus hic Meridianus dicitur, si autem sit alter Meridianus versus occidentem positus, qui cum priore angulum quindecim graduum

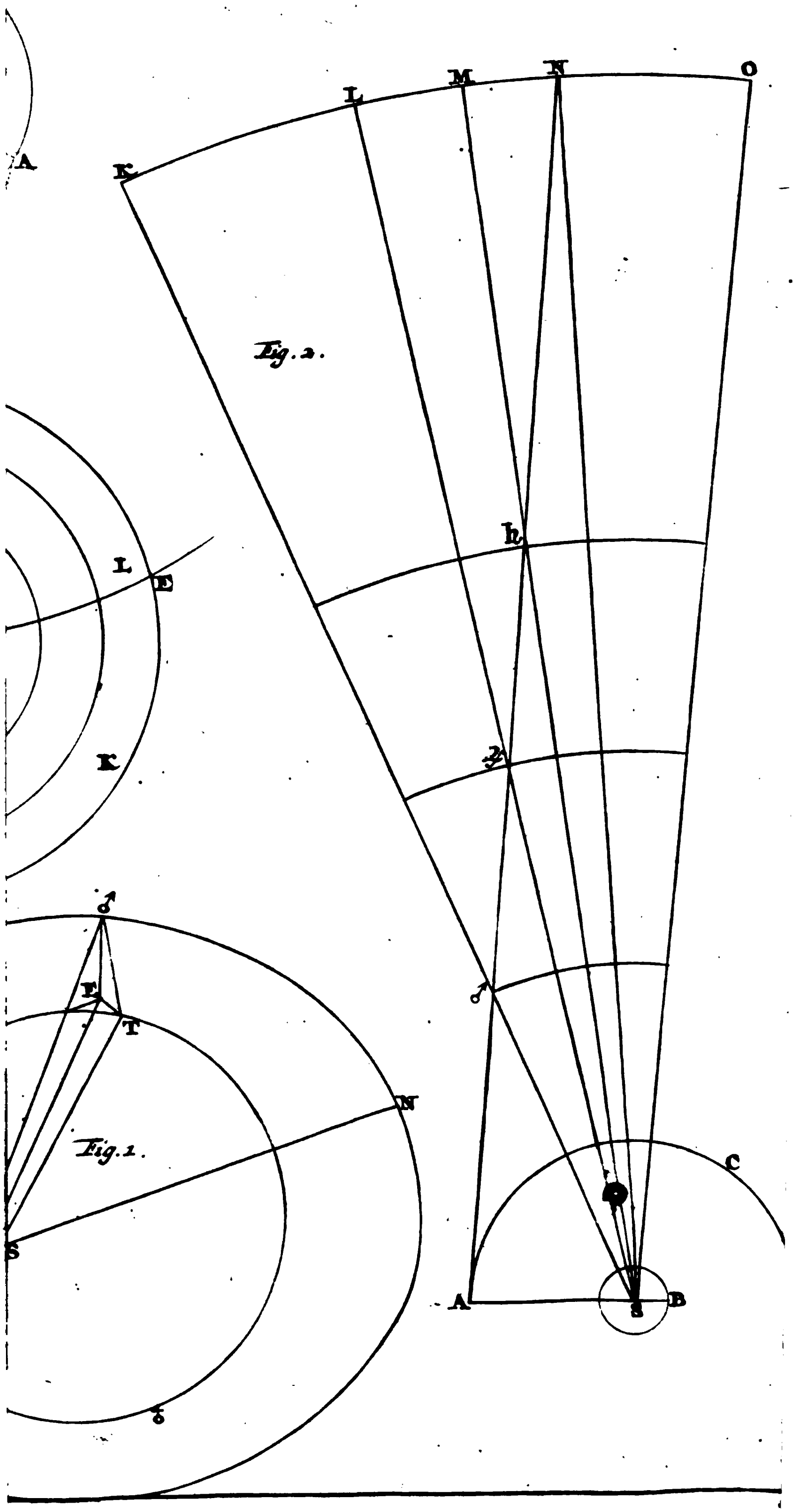


Fig. 2.
K
L
M
N
O
h
A
S
B
C
Fig. 1.
L
E
K
F
T
N
S

duum conſtituat, hic una hora ſerius ad Solem appellet, quam prior; adeoque cum Incolæ, qui ſub poſteriore Meridiano degunt, numerant mediam diem, ſeu horam duodecimam; prioris Meridiani incolæ horam primam poſt meridiem numerabunt. Similiter ſi meridianorum angulus ſit triginta graduum, hoc eſt cum arcus Æquatoris inter Meridianos interceptus ſit 30. grad. quando ſub occidentaliore Meridiano eſt Meridies, ſub orientaliore numerabitur hora ſecunda poſt meridiem. Atque ita pro ſingulis quindecim gradibus, quibus Arcus Æquatoris inter Meridianos interceptus conſtat, tot numerantur horæ quibus incolæ ſub Meridiano orientaliore anticipant horas, quæ ſub occidentaliore Meridiano numerantur. Et ſimiliter pro ſingulis gradibus Æquatoris numerabuntur quatuor minuta Temporis, proque ſingulis quindecim minutis unum temporis minutum numerabitur, v. gr. ſi arcus Æquatoris inter Meridianos interceptus ſit 85. grad. dividendo 85 per 15, quotiens $5\frac{2}{3}$ monſtrat ſub meridiano orientaliore, numerari horam quintam cum quadraginta minutis, quando incolis ſub occidentaliore ſit Meridies; & quando ſit Meridies incolis ſub Meridiano orientaliore degentibus, occidentales numerabunt horam ſextam matutinam cum viginti minutis; & differentia inter horas in diverſis his locis numeratas ſemper manet 5 & $\frac{2}{3}$, ſi arcus inter meridianos interceptus ſit 85 graduum.

E contra datâ differentia horarum, quæ in locis pro eodem temporis momento numerantur, dabitur exinde Arcus Æquatoris inter Meridianos locorum interceptus; qui Arcus differentia Longitudinem locorum dicitur, quando ſcil. Longitudines ab aliquo primo Meridiano computantur, habetur autem arcus ille multiplicando horarum differentiam per 15, & productus dabit gradus, & ſi minuta quoque temporis multiplicentur per 15, & productus ſi ſuperet 60 dividatur per 60 quotiens & reſiduum dabunt gradus & minuta, qui prioribus additi, conficiunt differentiam Longitudinum locorum. Exempli gratiâ, horarum differentia ſit 7 & 22 minuta prima; 7 per 15 multiplicatus facit 105, & 22 in 15 ductus efficit minuta 330, ſeu quinque gradus &

30

30. min. unde longitudinum differentia tota erit 110 grad. m. 30. Hisce præmissis.

Si in duobus diversis locis, observetur initium Eclipseos cujusvis e Jovialibus, & notentur horæ quibus in diversis locis accidit Eclipsis, Horarum differentia, si in gradus & minuta Æquatoris vertatur, dabit differentiam longitudinum locorum.

Si habeantur Ephemerides motuum & Eclipsium Jovialium pro Meridiano alicujus loci accuratè supputatæ; vice observatoris in uno locorum, Ephemerides sunt consulendæ, hora & horæ scrupula quibus initium vel finis Eclipseos accidit ex iis sunt eximenda, & tempus in loco dato comparatum cum horâ loci in quo observatur Eclipsis, dabit horarum differentiam, & exinde longitudo loci innotescet.

Longitudo quoque habetur per observationem Eclipseos Lunaris, aut appulsûs Lunæ ad aliquam fixam, sed hæ Phases rariùs conspiciuntur, quàm Eclipses Satellitum Jovis.

In Terrâ & Solo stabili facile observantur Eclipses; & si idem in mari præstare licuerit, Ars Nautica esset fere perfecta; & nulli ferè errori obnoxia: verùm in mari, Motus & Jactationes navis omnem observationem Eclipsium impediunt. Adeoque si aliquis methodum traderet, quâ longitudo navis in medio maris quovis tempore inveniri possit, is solveret Problema Nautis exoptatissimum, & Reipublicæ adeo utile, ut sanctione Senatûs nuper facta, Præmia larga inventori tribuenda sunt: exinde plurimi ingenia sua in illo excolendo exercuêre & torsêre. At nemini hactenus palmam in medio positam rapere licuit, etsi varias vias methodosque tentaverunt & proposuerunt, & plurimi suarum inventionum amore capti, rem à se confectam existimantes, præmia postulaverunt, quorum tamen plerique nesciebant demum quid sit Longitudinem invenire.

LECTIO

LECTIO XVII.

De Cometis.

PRæter Planetas ordinarios, qui semper in viciniâ nostrâ discurrunt; est & aliud quoddam Planetarum Genus, qui temporanei appellari merentur, utpote aliquando in nostro cælo sunt conspicui, & post aliquod apparitionis tempus rursus à nostro visu se subducunt. Eos in cælesti regione collocabant veteres philosophi & longè supra Lunam evehebant. Nam testibus Aristotele, Senecâ, Plutarcho aliisque, Pythagorici & Italica secta asserebant, Cometam esse unam ex stellis errantibus sed longis post temporum Intervallis apparere; idem sensit Hippocrates Chius, ut ex eodem Aristotele constat. Idem quoque sensit Democritus, ut auctor est Seneca in Naturalium quæstionum lib. VII. cap. 3. Sic enim inquit, Democritus subtilissimus antiquorum omnium, *suspicari ait se, plures stellas esse qui currunt*, intelligens Cometas. Sed nec numerum illorum posuit, nec nomina, nondum comprehensis quinque siderum cursibus. Et rursus Seneca dicit, Apollonium Myndium peritissimum inspiciendorum naturalium, asserere Cometas in numero Stellarum errantium poni a Chaldæis, tenerique cursus eorum. Apollonius ipse ajebat, quòd proprium Sidus est Cometes, sicut Solis & Lunæ. Cæterum non est illi palam cursus. Altiora mundi secat, & tum demum apparet, cum in imum cursus sui venit. Huic sententiæ accedit ipse Seneca. Non existimo inquit ille Cometem subitaneum esse ignem, sed inter æterna opera Naturæ. Cometes habet suam sedem, & ideo non citò expellitur, sed emetitur spatium suum, nec extinguitur, sed excedit. Si erratica, inquit, Stella esset, in Signifero esset, sed quis unum Stellis limitem ponit? Quis in angustum divina compellit? nempe hæc ipsa quæ sola moveri credis, alios & alios circulos habent, quare ergo non aliqua sunt, quæ in proprium iter & ab istis remotum secesserint? Ut verò cognoscantur, necessarium esse dicit, veteres ortus Cometarum habere collectos; deprehendi enim propter raritatem eorum cursus adhuc non

Cometæ Planetarum Genus.

Senecæ Opinio de Cometis.

potest, nec explorari an vices servant, & illos ad suum diem certus ordo producat. Tandem sic vaticinatur; Veniet Tempus, quo ipsa quæ nunc latent, dies extrahet, & longioris ævi diligentia. Ad inquisitionem tantorum ætas non una sufficit. Veniet tempus quo Posteri nostri tam aperta nos nescisse mirabuntur; erit qui demonstret aliquando, in quibus cometæ partibus errant, cur tam seducti à cæteris eunt, quanti qualesque sunt.

Peripatetici Cometas inter meteora numerant.

Sed his non obstantibus tota Peripateticorum secta metuens, ne Generationes & corruptiones in cælis admitterentur, Cometas inter sublunaria corpora posuit. Illosque esse Meteorôn genus contendit. Sed ne hic locus iis concedatur, repugnant eorum Phænomena, nam non in aere nostro illos generari exinde patet, quòd longè supra aerem evehuntur; in locis enim Telluris maximè dissitis eodem temporis momento videntur; quod ob humilem aeris locum nulli corpori aerio contingere potest.

Cometæ non sunt aerii.

Cometæ sunt supra Lunam.

At non tantum supra aerem, sed etiam supra Lunam ascendere Cometas, exinde constat, quod ex diversis locis visi, eandem ferè observantur sortiri distantiam à Stellâ aliquâ vicinâ. Exemplum sit Cometes ille, quem Tycho Brahee Uranoburgi & Hageeius Pragæ in Bohemiâ eodem tempore observârunt, quæ duo loca Latitudine differunt sex gradibus, & præterea sunt ferè sub eodem Meridiano. Uterque observabat, quantum Cometa distabat à Stellâ quæ Vultur appellatur, id est quot Gradibus esset infra eam, erat enim in eodem verticali cum illâ; & uterque reperit eandem esse distantiam, & consequenter, uterque inspexit illum in eodem cæli puncto, quod fieri non potuit, nisi Cometa esset supra Lunam.

Demonstratur Cometas esse supra Lunam. Tab. 32. fig. 1.

Circulus A B G exponat orbem Terræ, in quâ sit A Uranoburgum, B oppidum Pragæ, D locus Cometæ. Sit FCE fixarum cælum, & F Stella Vulturis. Ex Uranoburgo locus Cometæ ad punctum E in cælo refertur, ejusque distantia à Vulture erit FE; ex Pragâ autem spectatus Cometa, in C videbitur, distabitque à Vulture arcu F C, qui arcu FE erit minor; verùm deprehensum est Cometam ex duobus

bus hisce locis visum eandem obtinuisse distantiam visibilem à Stellâ Vulturis, & arcus proinde FE, FC, fuisse æquales. Tanta itaque est distantia Cometæ à Tellure, ut arcus CE evanescat. At hoc non quidem Lunæ contingit, adeoque longior abest à nobis Cometa, quàm Luna.

Cometæ locus verus, visus, Parallaxis. E centro Telluris viso Cometâ, locus ejus in cælis sit G, at ex Terræ superficie in A spectato locum E occupare videtur. Prior dicitur locus ejus *verus*, Posterior *visus*, & distantia GE quâ humilior apparet dicitur Parallaxis, eâ semper deprimitur Phænomenon versus horizontem. Est autem Parallaxis Phænomeni, ut superius dictum fuit de Lunâ, semper æqualis angulo sub quo semidiameter Terræ per locum transiens è Phænomeno videtur.

Quod si nulla fuerit Parallaxis sensibilis, neque angulus, sub quo semidiameter Telluris è Cometâ apparet, erit sensibilis. Adeoque oportet, ut Cometa longissime à Tellure distet. Nempe ut diameter Terræ, ut punctum ex Cometâ videatur.

Deprehensio Parallaxis Cometarum. Unico filo, in tantæ subtilitatis negotium advocato; Parallaxis, si modo sit sensibilis, deprehendi potest. Nam cum Cometa in fine apparitionis adeo lentescit proprio motu; ut vix incedere videatur, bis observandus est per filum, hoc modo; primò cum valde ab horizonte sublimis fuerit, notentur binæ stellæ ei viciniores, inter quas ipse sit collocatus, in rectâ linea, quæ sit Horizonti parallela, quod per filum indirectum stellis assumptis expositum atque oculis prætensum experiri oportet. Postea cum occasurus prope Horizontem fuerit, iterum prætenso filo, expendendum est, an in eâdem rectâ lineâ cum iisdem stellis videatur; nam si Parallaxis adsit sensibilis, quæ deprimit sidus, non in eâdem rectâ quæ Stellas conjungit apparebit; sin secus, & in eâdem positione, quoad Stellas maneat, indicium est, Cometam nullam subire Parallaxim, & longissime à nobis distare. Nec quicquam hic à refractione timendum est, quæ prope Horizontem solet sidera supra verum eorum locum elevare, quia hæc ipsius hallucinatio, tam Stellas quàm Cometas æqualiter elevabit, ac proinde eorundem mutuam distantiam ac positionem non mutabit refractio.

Alia methodus inveniendi Parallaxes. Observari etiam potest Cometa juxta Horizontem ortivum, intra binas Stellas, in circulo Horizonti perpendiculari, & postea cum sublimior evaserit & non in eodem verticali cum dictis stellis, si apparuerit in eâdem rectitudine nullam patietur parallaxim, & proinde in alto cælo spatiatur, si verò assumptis stellis fuerit depressior quam in rectâ lineâ fieri debet, habet Cometa Parallaxim. Quod si in his observationibus adsit Cometæ motus proprius, is detrahendus erit pro ratione ejus, & temporis à primâ observatione usque ad secundam elapsi.

Cometæ Parallaxi orbis annui sunt obnoxii. * Ut Defectus Parallaxis diurnæ extulit Cometas supra regiones Lunares, sic ex Parallaxi orbis annui, evincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ, qui progrediuntur secundum ordinem signorum, sunt omnes sub exitu apparitionis, aut solito tardiores, aut retrogradi, si modo Terra sit inter ipsos & Solem: aut justo celeriores, si Terra vergat ad oppositionem, hoc est, si in conjunctione cum Sole videantur, uti fieri in Planetarum motibus observamus. E contra qui pergunt Cometæ contra ordinem signorum, sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem, aut justo tardiores aut retrogradi, si Terra sita sit ad contrarias partes. Contingit hoc maximè ex motu Terræ in vario ipsius situ; perinde ut fit in Planetis, qui pro motu Terræ vel conspirante, vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardiùs progredi videntur, nunc verò celeriùs.

** Vide Newtoni Principia lib. 3.*

Quando Cometa retrogradus videtur. Si Terra pergat ad eandem partem cum Cometâ, & motu angulari tantò celeriùs feratur circa Solem, ut recta per Terram & Cometam perpetuò ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa è Terra spectatus ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus. *Quando directus, & justo tardior.* Sin Terra tardiùs Cometâ feratur, ille (detracto motu Terræ) tardiùs incedere videbitur. *Quando justo celerior.* At si Terra pergat ad contrarias partes, Cometa exinde velocior apparebit.

Idem colligitur ex curvaturâ viæ Cometarum; pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis, quamdiu mo-

moventur celerius, at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa, quæ à Parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abeunt in contrariam: oritur hæc deflectio maximè ex Parallaxi orbis annui, propterea quod respondet motui Terræ, & insignis ejus quantitas observata ostendit Cometas esse satis longè infra Jovem collocandos, ubi consequens est quòd in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpe infra orbes Martis & Inferiorum Planetarum.

A Terrâ recedentibus & ad Solem accedentibus Cometis, augetur eorum splendor & lux, quamvis ob auctam eorum distantiam minuitur apparens diameter.

Cometarum Figuræ variæ, & varia magnitudo.

Cometarum figuræ variæ sunt; alii enim crines undique in orbem vibrant, qui Criniti & Cincinnati appellantur; alii autem ad partem cæli Soli oppositam barbam aut caudam radiosam emittunt, hique Barbati, Caudatique dicuntur. Varia observata fuit Cometarum quoque magnitudo; Plerique seclusâ comâ, quando maximi videntur, stellas tantum primæ aut secundæ magnitudinis adæquant. At multò majores apparuisse testantur auctores, qualis fuit ille, qui Neronis tempore affulsit, & auctore Senecâ Soli magnitudine non cedebat. Sic ille, quem Hevelius observavit Anno 1652. Lunâ non minor apparuit, luce tamen & splendore multùm Lunæ cedebat, nam Lumine suo pallido & obtuso tenebricosum & tristem aspectum præbuit. Cinguntur Cometæ plerique densâ & caliginosâ Atmosphærâ, quæ Solis lucem retundet, intus tamen conspicitur Nucleus, qui dissipatis nubibus, quasi corpus Cometæ solidum aliquandò lucidè splendet.

Cometæ motu communi in occidentem ferri videntur. Cometarum motus proprius.

Cometæ cum tam longe a Terra distent, motum illum apparentem ab oriente in occidentem ex vertigine Telluris ortum & omnibus sideribus communem habebunt. Præter hunc motum est & alius illis proprius, quo non in eodem cæli loco hærent, sed ab eo in quo primum affulserunt, quotidie recedunt, & per spatia cælestia vagantur. Qui motus veteribus etiam cognitus fuit, nequaquam enim eos inter errantia sidera numerassent, nisi eos Planetarum instar, peculiari cursu errabundos cognovissent. Seneca motum hunc agnovit, & observavit, per lineam in cælo rectam fieri, seu, ut loquuntur Astronomi, per circuli maximi portionem. lib. enim Septimo naturalium Quæst. cap. 8. Cometarum dicit cursum lenem & compositum esse, qui destinatum iter carpit; non confuse aut tumultuose eunt Cometæ, ut aliquis credat. causis turbulentis & inconstantibus pelli. In capite 29. meminit duorum Cometarum; quorum unus intra sextum mensem dimidiam cæli partem transcurrit. Alter Claudianus, à Septemtrione primum visus, non desiit in rectum assiduè celsior fieri, donec excessit.

Modus explorandi cursum cometæ in cælis. Si habeatur globus cælestis, in cujus superficie Stellæ rite sunt collocatæ & depictæ, hâc arte Mechanicâ, via Cometæ in cælis explorari potest. Assumantur quotidie Stellæ quatuor Cometam circumstantes, ita ut is sit in concursu duarum linearum quæ oppositas stellas jungant, quod per filum oculis prætensum atque assumptis stellis & Cometæ objectum examinari potest, quod in tanto fixarum numero observare facile erit. *Tab. 32. fig. 2.* Sit v. gr. Cometa in A in medio quatuor stellarum BCDE, ita ut filum per duas BD & Cometam transeat, similiterque filum transeat per Cometam duasque Stellas CE. In globo igitur, quo hæ quatuor stellæ sunt locis suis depictæ, extendantur duo fila per binas & binas stellas, & in communi filorum concursu, invenietur Cometæ locus. Sic quotidie fiat, & pro singulis diebus loca notentur; atque hinc manifestè Cometæ via seu cursus apparebit in cælis, qui deprehendetur esse circulum maximum, omnia enim puncta notata in eâdem peripheriâ circuli maximi invenientur. Datis autem duobus hujus circuli punctis, dantur ejus inclinatio ad Eclipticam & Nodorum loci, scil. ubi extensum filum Eclipticam secat.

Alia methodus observandi semitam Cometæ. Aliter etiam via Cometæ propria invenitur observando ejus distantiam quotidie à duabus Stellis, quarum distantia, Longitudines, & Latitudines notæ sunt, ex quibus dabitur locus Cometæ in cælo, quæ loca postea in globo cælesti notata manifestè ostendent Cursum Cometæ è Tellure visum esse in portioŧione Circuli maximi, nisi per motum Terræ ille aliquantulum exinde deflectere videretur. Distantiæ Cometæ à vicinis stellis, accipi possunt per Quadrantem aut Sextantem, ita situm, ut ejus planum simul per Cometam & Stellam transeat, & Dioptra una Stellam, altera Cometam aspiciens, gradus in circumferentiâ inter utramque interceptos manifestabûnt.

Hinc manifestum est, Cometas moveri in plano, quod per oculum Spectatoris, seu potius per Solem transit, nam motus omnis visibilis qui in illo plano peragitur, semper in Peripheriâ circuli maximi fieri conspicitur. Regularis præterea & maxime proportionatus est Cometarum motus; qui quamvis inæqualis est, summa tamen regularitas in ipsâ inæqualitate continuò observatur. *Moventur Cometæ in plano per Solem transeunte.*

Proprius hic Cometarum motus, non est idem in omnibus; sed varius, nam alii ab occidente in orientem tendunt; aliorum e contra motus fit in Antecedentia, & cursui Planetarum contrarius; omnes diligenter observati deflectunt ad Boream vel ad Austrum; idque varie, neque Planetarum more comprehenduntur in Zodiaco; sed inde migrant & motibus variis, in omnes cœlorum regiones feruntur; alii celeriùs, alii tardiùs. Summa celeritas a Regiomontano observata fuit, quâ Cometa uno die peregit gradus quadraginta. Nonnulli sunt in initio velociores quàm in fine, alii in principio, & fine apparitionis tarde moventur, in medio velocissime feruntur. *Ipsorum Cursus varii.*

Deprehensum est, quòd in nonnullis Cometis, antequam penitus disparuerunt, in ultimis scil. apparitionibus, non adeo præcisè in circulo maximo incesserunt, sed aliquantulum ab isto tramite deviârunt; Angulus enim orbitæ Cometæ & Eclipticæ, in provectiore ætate diversus fuit observatus quàm cum ab ortu adhuc recens fuit, sed deviatio hæc apparens, non ex motu Cometæ, sed ex Telluris motu ortum trahit; ut in superioribus & inferioribus Planetis evenire solet, quorum distantia ab Eclipticâ varia videtur, pro diversâ positione Telluris, cum interim ex sole spectatus Cometa, circulum maximum exactissimè describere videbitur. *Deviatio visa Cometæ a Circulo maximo.*

Quam-

Variæ Cometarum semitæ. Quamvis Cometæ motus videatur plerumque in circulo maximo, ſemita tamen ejus à circulo diverſa & varia eſſe poteſt, ſcil. vel linea Recta, Elliptica, Parabolica, aut Hyperbolica, vel alia quævis in eodem plano deſcripta. Nam omnis motus in quâcunque ſemitâ, qui in plano per oculum tranſeunte peragitur, in circulo maximo fieri conſpicitur. Philoſophi plurimi & Aſtronomi motum rectilineum illis tribuerunt. Quæ tamen eorum Phænomenis optime convenit Semita, Parabolica aut Elliptica videtur, & quidem ſi in Ellipticis ferantur orbitis, eæ maximè excentricæ ſunt, & majores Axes ad minores magnam obtinent proportionem; quâ ratione multùm à Planetis differunt, qui orbitas Ellipticas quidem, at non multum excentricas, ſed ad circuli formam accedentes deſcribunt. Sol autem in communi omnium orbitarum tam Planetarum, quàm Cometarum foco exiſtit; & eâdem lege circa illum moventur Cometæ, quâ Planetæ, deſcribendo ſcil. Areas temporibus proportionales; Unde neceſſe eſt, ut ſimiliter ac Planetæ in Solem ſint graves.

Cometæ quando viſibiles & quando inviſibiles. Cum Cometæ in inferioribus orbitarum partibus verſantur, ſeu cum verſùs Solem deſcendunt, vel ab illo aſcendunt, tunc ſolùm fiunt conſpicui, & deinde à Sole recedentes, in longinquas regiones abeunt, & ex noſtro conſpectu ſeſe ſubducunt; nam ob eorum à Sole receſſum, minuitur lux, quam ab illo recipiunt, & ob auctam à nobis diſtantiam, minuuntur quoque apparentes diametri, donec tandem inſenſibiles evadunt. In Apheliis, ubi in longinquas admodum excurrunt regiones, ob tantam orbitæ excentricitatem, tardiſſime incedunt, in Periheliis ubi Soli vicini ſunt incitatiſſimo feruntur motu.

Tab. 32. fig. 3. Sit S Sol, APDG orbita Cometæ Elliptica, TCE orbita Terræ. Si ponamus ſemiaxem Ellipſeos orbitæ Cometicæ centies majorem diſtantiâ mediâ Telluris à Sole, Cometa ille periodum circa Solem non niſi mille annis abſolvet, nam quadrata Temporum periodicorum Telluris & Cometæ, debent eſſe cubis diſtantiarum a Sole mediarum proportionalia. Et Cometa in conſpectum noſtrum non veniet, niſi cum ver-

versus Solem descendendo, propius ad Tellurem accesserit, ut in F, deinde post decessum a perihelio, à Sole continuo ascendens Cometa, circa G tandem evanescere incipit; & si Aphelii distantia sit ad distantiam Perihelii à Sole ut 1000 ad 1, erit velocitas Cometæ in Perihelio ad velocitatem in Aphelio, in eâdem ratione, nam debet Area ASB æqualis esse Areæ DSP, si modo arcus AB DP sint temporibus æqualibus descripti, Velocitas vero circa Solem angularis, erit in eâ ratione duplicata; adeoque cum Cometa in Perihelio, gradum unum Motu angulari absolverit, in æquali tempore ubi in Aphelio versatur, non nisi gradûs partem $\frac{1}{1000000}$ percurret, & ibi lentissimè circulando plures requiruntur anni, ut unum gradum absolvat.

Ellipsium portiones, quæ a nobis videntur describi per Cometas, pro Parabolis haberi possunt.

Cum Ellipses, quas describunt Cometæ, sint admodum excentricæ, illarum portiones in quibus è Tellure videntur moveri, pro Parabolis haberi possunt; nam si Ellipseos focus, in infinitum alteruter ab altero secedat, vertetur Ellipsis in Parabolam, sicut coeuntibus focis Ellipticis in circulum mutatur; unde illorum calculus fit facilior. Ex illâ enim hypothesi tabulam construxit peritissimus Geometra & Astronomus *Hallejus*, quâ Cometarum motus facillime computentur, & ex illâ Theoriâ ipse plurium Cometarum motus calculo subjecit; & cum observatis tam accurate congruere deprehendit, ut eorum differentia rarò ad tria minuta prima excurrat. Quibus Exemplis abunde satis manifestum est, quod motus Cometarum, ex hâc Theoriâ, non minus accuratè exhibetur, quam solent motus Planetarum per eorum Theorias; quorum loca computata, ab observatis non minore quantitate distare invenimus. Et licet Cometæ longe majori motuum inæqualitati obnoxii sunt quam Planetæ; hæc tamen Theoria ipsorum motibus visis optimè respondet; unde cum iisdem innititur legibus, quibus Planetarum Theoriæ fundantur, eademque causæ Physicæ in utrosque agant, & cum accuratis Astronomorum observationibus exactè congruat; non potest esse non vera.

Cometæ plures ab oriente in occidentem feruntur.

Quamvis Planetæ omnes ab occidente in orientem, motibus propriis ferantur; Cometæ tamen non pauci contrarios cursus tenere observantur; eosque ab oriente in occidentem, maximâ velocitate discurrere cernimus; qualis fuit ille à Regiomontano visus anno 1472, qui quadraginta gradus uno die confecit. Hinc manifeste constat, nullos in cælo existere vortices, qui Planetas in iis natantes rapidissimo motu circa Solem vehant; nam cum Cometæ in regiones Planetarias descendant, necesse erit, ut pernicissimo vorticum Torrente rapiantur; tanta enim foret vorticis juxta Tellurem velocitas, si reverâ darentur vortices, ut illam secum veheret; & plusquam 20000 milliaria in unâ horâ conficere faceret; unde & rapidissimum hoc flumen Cometas etiam secum deferret; eorumque motus, si contrarii essent, citò destrueret. Quis enim non videt nullum corpus contra tam rapidum Torrentem posse diu moveri. At Cometæ observantur plures, qui contrario motu liberrime eunt, & eâdem lege motus conservant, quasi nullum esset medium, quod iis obstaret. At hoc naturæ vorticum plane repugnat, nam quod Planetas secum rapit fluidum, alia etiam corpora omnia inibi locata secum rapere necesse erit. Quod itaque cum non fit, dicendum est, in cœlis nullam esse resistentiam; adeòque nullum medium, quod cum nostro aëre comparatum, sensibilem aliquam obtinet densitatem; nam aer noster Projectorum motum non parum obstruit.

Adeoque nulli sunt Vortices.

Desinant itaque *Cartesiani* & *Leibnitiani*, de Vorticibus suis plura in posterum dicere; cælestia enim Phænomena iis plane repugnant; quique cœlestium corporum motus per illos explicare satagunt, nugas & figmenta impossibilia nobis obtrudunt, nec ulteriùs sunt audiendi.

In cœlo nullum est medium fluidum, quod sensibilem obtinet densitatem.

Cum Resistentia medii ex ejus densitate oriatur, necesse est, ut ubi nulla est resistentia medii sensibilis, ibi quoque nulla sit sensibilis medii densitas; adeòque cum in cœlis Cometæ ne minimam sensibilem resistentiam patiuntur; sed liberrime tanquam in vacuo motus suos peragunt, minima quoque erit medii densitas, & fortasse tanta erit medii istius raritas; ut si Cometas, Planetas, eorumque Atmosphæras excipias, materia illa omnis, quæ totum spatium Planetarium implet, non adæquat illam, quæ in uno digito cubico

no-

nostri aeris continetur. Hoc enim possibile esse, à nobis in *Lectionibus nostris Physicis* demonstratum est.

Desinant etiam Philosophi Metaphysicas suas tricas contra vacuum nobis obtrudere; illæ enim persimiles videntur Veterum Sophistarum, contra motum disputantium, argutiis, quæ non aliam responsionem merentur, quam illam *Diogenis*, qui ambulando illas confutavit. Sic *Philosophos Cartesianos* cœlum intueri jubeamus, & inde non obstantibus subtilissimis illorum tricis, ex phænomenis in illo visis, Vacui necessitatem manifestâ demonstratione colligent. *Cometæ motibus suis vacuum dari demonstrant.*

Pauci Cometæ visi sunt, priusquam ad Solem descendunt; & ex Perihelio, ab illo recedere incipiunt. Nam antequam per Solis viciniam incaluerunt, vix caudas emittunt; adeòque minus notabiles evadunt; post autem ipsorum à Perihelio discessum, ingentes vibrant caudas, quæ constant materiâ lucidâ, rarâ, & subtilissimâ, maximo putà calore Solis attenuatâ, & maximâ vi è corpore Cometico projectâ. Cujus caussa fortasse non dissimilis est illi, quâ nuper ex nostrâ Tellure, Vapores lucidi ad insignem altitudinem ejaculati fuêre; qui per magnam Europæ partem conspecti fuêre, & æmulabatur vapor ille lucidus, tam figurâ quàm splendore, Cometarum caudas, sed deficiente materiâ citò evanuit. *Cometarum Caudæ.*

Illud in Cometis omnibus maximè notandum; quod illorum caudæ semper in partes à Sole aversas extenduntur, id est si Sol sit in occidente, Cometa directè caudam in orientem projicit. E contra, si Sol fuerit in Oriente, Cauda in occidentem rectà dirigitur, mediâ nocte in Aquilonem tendunt. Crescunt caudæ, dum ad Solem descendunt, in Periheliis maximæ sunt, deinde longiùs à Sole recedendo, decrescunt, donec in Atmosphæram Cometicam se contrahunt. *Caudæ semper in partes protenduntur à Sole aversas.*

Caudæ Cometarum, quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus, & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus motu satis lento propagatæ, quæ participando motum illum capitum, quem habuêre sub initio, per cælos unà *Cometarum Caudæ participant de motu capitum.*

 cum

cum capitibus moveri pergunt: Et hinc rursus colligitur, spatia cœlestia vi resistendi destitui, in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores, motus suos liberrimè peragunt, ac diutissimè conservant.

Cometa ille insignis, qui Anno 1680. apparuit, statim post recessum à Perihelio, caudam emittebat plusquam quadraginta gradus in longum exporrectam; nec mirum, nam tam prope fuit Soli, ut non major quam sextâ diametri solaris parte ab ejus corpore distabat: & inde Sol maximam cœli Cometici partem e Cometa spectatus occupare, & sub angulo ferè 120. graduum apparere videbatur. Calor autem è Sole conceptus ardentissimus fuit, nam ferri candentis calorem ter millies superabat. Hinc necesse est, ut corpora Cometarum sint solida, compacta, fixa, & durabilia, ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quàm vapores, aut exhalationes Terræ, Solis, aut Planetarum, Cometa ille in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset.

Lectio XVIII.

Doctrina Sphærica, seu De Circulis Sphæræ.

Oculus spectatoris est ubique in cœli centro.

CUM quilibet Spectator, quemcunque in Universo obtineat locum, sit in centro Prospectûs proprii; si cœlum intueatur, illud tanquam superficiem concavam oculo concentricam, innumerisque stellis refertam conspiciet, Motusque omnes cœlestes in illâ peragi videbit. Verum cum Telluris à Sole distantia exigua admodum sit respectu illius, quâ cœlum stellatum à nobis distat; ubicunque Terra in suâ orbitâ locetur; eadem semper cœli facies, eadem astrorum positio, seu configurationes stellarum ex eâ aspicientur, quæ oculo in ipso Sole constituto apparerent; adeoque nihil refert, sive centrum Universi seu cœli, in Sole, sive in Tellure ponatur. Et si concipiantur circuli quotlibet per Tellurem transire, & ad cœlum produci, aliique his Paralleli per Solem traduci, hi circuli in cœlo coincidere videntur, eva-

Nihil refert sive centrum cœli in tellure sive in sole ponatur.

evanescente ipsorum distantiâ respectu distantiæ fixarum, quæ ad illos refertur, circulique hi, per Solem & Tellurem in planis parallelis ducti, in easdem stellas incidere videbuntur.

Quò meliùs loca stellarum definiantur, motusque in ordinem redigantur, convenit in cœlo plures concipere descriptos esse circulos, quorum alii sunt maximi, alii minores. Circulus in Sphærâ maximus est, qui dividit Sphæram in duas partes æquales, & idem habet centrum cum centro Sphæræ, adeoque omnes circuli maximi, cum idem habent centrum, sese bifariam secabunt. *Circuli Maximi.*

Circuli minores dividunt Sphæram in partes inæquales, eorumque centra à centro Sphæræ diversa sunt; denominantur autem hi circuli ab aliquo circulo maximo, cui paralleli sunt. *Circuli minores.*

Quilibet circulus duos habet polos, qui sunt puncta in superficie Sphæræ, ubique a circulo æquidistantia, ubi scil. linea ad planum circuli recta per centrum ducta, utrinque superficiei Sphæricæ occurrit. *Circulorum Poli.*

Circuli alii per respectum ad Observatorem definiuntur, ut sunt Horizon & Meridianus, alii à motu originem ducunt; hi dicuntur mobiles, quòd unà cum spectatore locum mutant, illi immobiles, quòd in iisdem cœli punctis infixi hærent *Circuli alii immobiles alii mobiles.*

Qui à motu oriuntur circuli, præcipui sunt Ecliptica & Æquinoctialis, eorumque paralleli; nam cum Tellus circa Solem motu annuo in orbitâ feratur, Spectator in Sole constitutus Terram in cœlo illum describere circulum inter fixas, quem Eclipticam dicimus, conspiciet. Estque ille circulus idem, quem nos in Terrâ locati Solem percurrere motu apparenti spatio unius anni videmus, uti superiùs à nobis ostensum fuit. Dividitur Ecliptica in duodecim partes æquales, quæ signa seu Dodecatamoriæ appellantur, nomenque habent à Constellatione vicinâ. Incipiunt ab Æquinoctiali vernali, tenduntque ab occidente in orientem. Tria priora signa ♈ ♉ ♊ scandunt ab Æquinoctiali in Boream, usque ad Solstitium æstivum. Sequentia tria ♋ ♌ ♍ *Ecliptica.*

incipiunt à Cancro deſcenduntque ad æquinoctialem interſectionem autumnalem. Tertia ſignorum Trias ♎ ♏ ♐, incipit à Librâ, deſcenditque verſus auſtrum, uſque ad Solſtitium hybernum. Quarta ♑ ♒ ♓ à Capricorno incipit, tendenſque ad Æquatorem, finitur in æquinoctio verno. Unumquodque ſignum dividitur in triginta gradus, & hinc tota Ecliptica in 360. In hoc circulo ſemper videtur Sol, qui nuſquam ab illo deflectit. At Planetæ ultro citroque eunt, per ſpatium octo circiter graduum, adeoque ſi concipiatur circulus latus ſeu zona ſedecim graduum lata, cujus medium tenet Ecliptica, deſignabit in cœlo ſpatium in quo Planetæ motus peragunt, & Zodiacus à Græcis, à Latinis Signifer dicitur ob ſigna ibi locata.

Zodiacus.

Eclipticæ Secundarii.

Si per polos Eclipticæ traduci concipiantur innumeri circuli Eclipticæ occurrentes, illi dicuntur Eclipticæ Secundarii, quorum ope quælibet ſtella vel quodvis in cœlo punctum ad Eclipticam refertur. Nam ſtellæ cujuſvis locus, ad Eclipticam reductus, is erit, ubi ejuſmodi circulus per ſtellam tranſiens eidem occurrit. Arcus inter hunc locum & initium Arietis interceptus, & in conſequentia numeratus dicitur *Longitudo* ſtellæ. Sicuti arcus circuli ſecundarii inter ſtellam & Eclipticam eſt ejuſdem ſtellæ *Latitudo*. Hinc hi Eclipticæ ſecundarii circuli Latitudinum dicuntur. Latitudo eſt Borealis vel Auſtralis. Nam Ecliptica cœlum ſidereum in Hemiſphærium Boreale & Auſtrale dividit.

Longitudo Stellæ. Latitudo Stellæ.

Cum Tellus circa ſuum Axem vertatur, exinde fit, ut omnes ſtellæ cœlumque omne Sidereum circa Tellurem volvi conſpiciantur, ſpatio viginti quatuor horarum, qui motus apparens Diurnus dicitur, & raptu *Primi Mobilis* fieri concipitur; quaſi revera Tellus quieſceret & cœlum circa ipſam volubile eſſet. Circulus medius inter utrumque Telluris-polum, qui Æquator dicitur, ad cœlum uſque productus, efficit Æquinoctialem cæleſtem, & omnia ſidera, omniaque coeli puncta præter polos hunc æquinoctialem, vel circulum aliquem huic parallelum, majorem aut minorem, prout a Polis remotiora aut viciniora fuerint, deſcribere videntur.

Æquinoctialis cœleſtis.

Æqui-

Æquinoctialis & Ecliptica, cum uterque sit circulus maximus, se mutuò bifariam secabunt, communisque planorum sectio, sibi ubique parallela manens, ad idem cœli punctum semper dirigitur (nam hic abstrahimus à motu illo lentissimo, quo Axis Terræ, vel intersectio Eclipticæ & Æquatoris regreditur). Adeoque cum Sol in Eclipticæ puncto videtur, ubi est illa intersectio, hoc est, cum revera Tellus oppositum tenet, Sol motu diurno æquinoctialem in cœlo circulum describere conspicietur. Bis itaque in quolibet anno Sol motu diurno in Æquinoctiali revolvitur. Scil. cum est in duobus Eclipticæ & Æquatoris intersectionibus Vernali & Autumnali. Quibus temporibus omnes Telluris incolæ dies noctibus æquales habebunt: unde nomen circulus hic adeptus est. Angulus, quem Ecliptica cum æquatore ad intersectionum puncta facit est 23 $\frac{1}{2}$ graduum; exinde discedens Sol, continuò ab æquatore motu apparente declinat versùs Boream vel Austrum, circulosque æquatori parallelos motu apparente describit, donec ad nonagesimum ab intersectione gradum pervenerit, ubi 23 $\frac{1}{2}$ gradibus ab æquatore distare videtur, quæ est ejus Declinatio maxima, & inde rursus ad Æquatorem revertere conspicitur, unde duo minores circuli, quos Sol motu diurno in duabus ejus declinationibus maximis describere apparet, *Tropici* nominantur, à τρέπω *verto*. Hic in Boreali cæli parte *Tropicus Cancri*, ille in Australi *Tropicus Capricorni* dicitur. Quâ ratione hic motus Solis apparens, & Declinationis mutatio, quiescente Sole, ex motu Terræ revera accidunt, superiùs in Lectione VII^ma^ ostensum fuit. *Circuli Tropici.*

Sunt & alii duo circuli minores in Sphærâ notabiles, quos Eclipticæ Poli motu diurno rapti describere videntur, qui 23 $\frac{1}{2}$ gradibus à Polis æquatoris seu Mundi distant & circuli Polares dicuntur. Hic in Boreali Hemispherio Arcticus à vicinis Ursis, alter Australis illi oppositus Antarcticus dicitur. *Circuli Polares.*

Si per polos mundi seu Æquatoris traduci concipiantur circuli innumeri maximi, erunt illi secundarii Æquatoris, quorum ope quævis cæli puncta ad æquinoctialem referuntur,

tur, uti priùs per Secundarios Eclipticæ, ad Eclipticam ea retulimus, & *Ascensio Recta* stellæ, vel puncti cujusvis, est arcus Æquinoctialis inter initium Arietis & punctum intersectionis circuli secundarii per stellam transeuntis. *Declinatio* autem est arcus ejusdem secundarii inter stellam & æquinoctialem interceptus. Estque Borealis aut Australis, prout versus hunc vel illum polum stella declinat, & exinde circuli hi Declinationum circuli nominantur. Horum præcipui sunt duo *Coluri*, quorum alter per puncta æquinoctiorum transiens vocatur Colurus Æquinoctiorum; Alter priorem ad angulos rectos secans & per polos Eclipticæ & Æquinoctialis incedens dicitur Colurus Solstitiorum; quoniam Eclipticæ occurrit in punctis ab Æquatore remotissimis, ubi Sol per aliquod tempus distantiam ab Æquinoctiali vix sensibiliter mutare deprehenditur; & proinde Solstitia hæc puncta dicuntur.

Ascensio Recta. *Declinatio.* *Duo Coluri.*

Circulus in Telluris superficie inter polos exactè medius, est Telluris Æquator, cujus productione ad Fixas Æquinoctialem cælestem generari diximus; & sicuti stellarum loca in cælis, quoad longitudinem & latitudinem definiuntur per Eclipticam & ejus secundarios; sic per Æquatorem Terrestrem ejusque secundarios per polos Terræ ductos, Terrarum loca & urbes quoad Longitudinem & Latitudinem determinari debent. Circulus Æquatoris secundarius per locum quemvis transiens dicitur istius *loci Meridianus*, quoniam quando per vertiginem Terræ circa Axem suum, planum istius circuli per Solem transiverit, erit omnibus incolis sub illo degentibus Meridies. *Longitudo loci* est arcus Æquatoris interceptus inter aliquem Meridianum, quem primum vocant, per determinatum locum transeuntem, & Meridianum loci. Veteres Geographi Primum Meridianum per locum Terræ notum & maximè occidentalem traduci fingebant, atque exinde Terrarum loca omnia, quaquà in longum patent, versùs ortum determinabant. Ex quo verò navigando deprehensum est, nullum dari locum maximè occidentalem, paulatim neglectus est modus, à primo aliquo meridiano computandi. Et quisque locorum Longitudines

Loci Meridianus. *Longitudo loci.*

dines respectu Meridiani urbis propriæ determinat. *Latitudo loci* est arcus Meridiani istius loci, inter locum & Æquatorem interceptus, estque Borealis aut australis, prout locus ab Æquatore, versùs hunc vel illum polum, distat.

Ratione Meridianorum & Parallelorum comparati Incolæ Telluris, alii dicuntur *Periæci* qui sub eodem parallelo, at oppositis ejusdem Meridiani semicirculis degunt; hi Tempestates anni easdem experiuntur, accedente Sole eodem tempore ad utriusque loci verticem, & exinde recedente; at meridiei & mediæ noctis vices subeunt alternas. Alii denique dicuntur *Antæci* sub eodem Meridiani semicirculo, at oppositis parallelis habitantes. Ita ut meridies & media nox utrisque simul contingat; at tempestates anni permutantur. Alii denique dicuntur *Antipodes*, quod sub oppositis Meridianis æquè ac Parallelis versantes, adversis e diametro pedibus incedunt; ideoque vicissitudines æstatis atque hyemis, nec non meridiei & mediæ noctis, ortus & occasus siderum omnino planè adversos sentiunt.

Periæci. *Antæci.* *Antipodes.*

Quatuor circuli in superficie Telluris minores, qui cælestibus ejusdem nominis respondent, nempe duo Tropici & totidem Polares dividunt Terram in quinque portiones, quæ zonæ appellantur. Quarum una vocatur Torrida, utroque Tropico comprehensa, inhabitabilis à veteribus credita est, propter nimium æstum: Regiones tamen, quas illa continet nunc longè feracissimas esse, vitæ commodis, incolisque abundare compertum est; duæ sunt frigidæ Zonæ, sub utroque mundi Polo circulis Arctico & Antarctico inclusæ, & ob gelu perpetuum vix habitabiles; totidem temperatæ sunt inter Frigidas & Torridam comprehensæ, quarum alteram nos incolimus, alteram nostri Antipodes. Has quinque Zonas sic describit Virgilius. 1. *Georgic.* ỿ. 233.

Quinque Zonæ.

Quinque tenent cœlum Zonæ, quarum una corusco
Semper Sole rubens, & Torrida semper ab igni:
Quam circum extremæ dextrâ lævâque trahuntur,
Cæruleâ glacie concretæ, atque imbribus atris.
Has inter, mediamque, duæ mortalibus ægris
Munere concessæ divûm.

Amphiscii. Qui in Zonâ Torridâ degunt, dicuntur *Amphiscii*, eò quod eorum umbra meridiana versùs utrumque polum diversis anni temporibus projicitur. At cum Sol ipsorum verticibus incumbit, fiunt *Ascii*, quia nullam projiciunt umbram meridianam; qui Zonas Temperatas incolunt, dicuntur *Hetroscii*, quorum umbra Meridiana versùs alterutrum tantùm mundi Polum porrigitur; qui in Zonis frigidis sunt incolæ, *Periscii* vocantur, quia Sole non occidente umbra illis in orbem circumagatur.

Ascii. *Hetroscii.* *Periscii.*

Circuli, qui concipiuntur mobiles, & per respectum ad observatorem definiuntur, sunt Horizon & Meridianus. *Horizon* est magnus ille circulus, quem quisque in planitie aut medio maris positus visu circumacto definit, quo cæli pars spectabilis ab inconspicuâ dividitur. Dicitur *Horizon sensibilis*, à quo differt *Rationalis* illi parallelus, transiens per centrum Terræ. Nam Phænomena cælestia referimus ad superficiem Sphæricam, Telluri, non oculo concentricam.

Horizon sensibilis. *Horizon Rationalis.*

Hi duo Horizontes ad fixas producti coincidere videntur, cum Tellus ad Sphæram fixarum comparata puncti tantùm rationem habeat, adeoque qui non nisi puncto distant à se invicem circuli, tanquam congruentes haberi debent. Horizontis poli sunt duo puncta, quorum unum vertici observatoris incumbit & *Zenith* dicitur, alterum huic sub pedibus oppositum *Nadir* vocatur. Ab his innumeri circuli ad Horizontem ducti, sunt ejus secundarii, & circuli *Verticales* & *Azimuthales* appellantur. Horizontis autem paralleli circuli minores *Almicantarath* dicuntur: voces hæ ab Arabibus in Astronomiam sunt introductæ.

Horizontis Poli. Zenith & Nadir. Circuli verticales & Azimuthales. Almicantarath.

Inter circulos verticales, eminent præcipuè Meridianus, & *Verticalis Primarius*; ille per polos & Zenith ductus horizontem intersecat in cardinibus Septentrionis & Austri, illosque signat. Hic alter est Meridianus ad angulos rectos, & in Horizonte Orientem & Occidentem ostendit. Hi circuli Horizontem in Quadrantes dividunt, quorum unusquisque rursus in octo partes æquales, adeoque Horizon totus in triginta duas partes dividi supponitur, quæ venti sive plagæ nominantur.

Verticalis Primarius.

Alti-

Altitudo aut Depreſſio Stellæ. *Azimuthus Stellæ.* *Amplitudo ortiva vel occidua.*

Altitudo aut *Depreſſio* Stellæ cujuſvis eſt arcus verticalis circuli inter Stellam & Horizontem interceptus. Stellæ *Azimuthus* eſt arcus Horizontis inter cardinem Meridiei vel Septentrionis & verticalem per Stellam tranſeuntem interceptus, eſtque vel orientalis vel occidentalis. *Amplitudo ortiva* vel *occidua* ſideris eſt Arcus Horizontis inter punctum, ubi ſidus oritur aut occidit, & cardinem Orientis aut occidentis, eſtque illa Borealis vel Auſtralis.

In Meridiano culminant Stellæ.

Ut in Horizonte omnes Stellæ videri incipiunt, & apparere deſinunt, ſic in Meridiano Stellæ omnes ad maximam altitudinem perveniunt, ubi culminari dicuntur, & infra Horizontem in eodem Meridiano maximam depreſſionem obtinent. Cum Meridianus tam Æquatori quàm Horizonti perpendiculariter inſiſtat, omnium parallelorum ſegmenta ab horizonte facta, tam ſupra quàm infra in æquales partes dividet; unde Tempus inter ortum Stellæ ejuſque Culminationem, æquale erit tempori inter Culminationem & occaſum. Cumque Sol quotidie parallelorum aliquem motu apparenti deſcribit, quando is ad circulum Meridianum appulerit, Meridies fiet, Mediaque nox, cum infra Horizontem ad eundem pertigerit, unde huic circulo nomen. *Nonageſimus gradus* eſt punctum Eclipticæ, quod nonaginta gradibus ab ejus interſectione cum Horizonte diſtat, ejuſque Altitudo metitur angulum, quem Ecliptica cum Horizonte facit. *Medium cœli* dicitur punctum Eclipticæ culminans. In ſignis Aſcendentibus, à ♑ ad ♋ Nonageſimus eſt ad orientem Meridiani; in deſcendentibus à ♋ ad ♑ ad occidentem poſitus.

Horizon & Meridianus ſunt circuli revera mobiles.

Quamvis Horizontem & Meridianum tanquam circulos immobiles ſuppoſuimus, motum apparentem cæli tanquam realem conſiderando; revera tamen illi ſoli ſunt circuli mobiles, & Stella vel Sol oritur, quando planum Horizontis infra deſcendit, ut Sol vel Stellæ conſpiciantur, occiduntque, quando planum Horizontis ſupra attollitur, Stellis & Sole quieſcentibus, Horizonte interea vertigine Terræ rapto. Sic etiam Sol & Stellæ ad meridianum loci alicujus appellunt, cum Meridiani planum, quod motu circa Axem

Telluris angulari fertur, per Solem aut Stellas quiescentes transiverit. Si verò per Solem & Polum traduci concipiatur circulus immobilis, fiet hic Meridianus non alicujus loci determinati, sed Universalis; fietque Meridies, in loco aliquo, cum Meridianus istius loci, qui circa Axem Telluris vertitur, cum plano hujus circuli coinciderit.

Meridianus Universalis.

Cum Meridianus quilibet circuitum seu gradus 360 spatio viginti quatuor horarum motu angulari absolvat, necesse est ut quâlibet horâ quindecim gradus, hoc est graduum 360 partem vicesimam quartam, motu angulari conficiat, adeoque si concipiatur circulus per polos transiens, qui cum Meridiano per Solem ducto angulum quindecim graduum constituat, ad hujus planum cum pervenerit Meridianus alicujus loci, post decessum a Meridiano Universali numerabitur in illo loco hora prima post Meridiem; diciturque circulus horæ primæ. Similiter si alius ducatur per polos circulus, æquatorem secans in tricesimo ab Meridiano Universali gradu, hic erit circulus horæ secundæ, ad quem cum Meridianus loci alicujus pervenerit, numeratur ibi hora Secunda à Meridie. Similiter si per singulos quindecim Æquinoctialis gradus, & Polos duci concipiantur circuli, dicuntur illi *Horarii*, & Æquinoctialem in viginti quatuor partes divident. Et unusquisque ordine suo horam determinat in loco aliquo numeratam, quando Meridiani istius loci planum cum plano circuli Horarii coinciderit. Verbi gratiâ, cum Meridianus loci coincidit cum circulo, qui angulum cum Meridiano Universali facit 75 graduum, numerabitur in illo loco hora quinta post Meridiem. Quando verò 90 gradus à Meridiano per Solem transeunte distat, fit hora Sexta post Meridiem. Verum si Meridianus loci ut immotus spectetur, circulumque per polos & Solem transeuntem concipiamus unà cum Sole motu angulari circa Axem Telluris ferri, ut apparenter fit; quando circulus ille coincidet cum circulo, qui angulum quindecim graduum cum Meridiano loci facit, erit hora prima, & circulus cum quo coincidit, dicitur Horarius primus: huic proximus cum Meridiano loci angulum triginta graduum constituens, erit circulus

Circuli Horarii.

culus horæ secundæ; qui angulum 45. graduum cum Meridiano facit est circulus horæ Tertiæ, atque ita deinceps.

Altitudo seu Elevatio Poli æqualis latitudini loci. *Tab 32. fig. 4.*

In quolibet Terræ loco, Altitudo Poli seu ejus Elevatio supra Horizontem æqualis est Latitudini loci. Sit circulus HZQ Meridianus, HCO Horizon, ÆCQ æquator, Z Zenith, & P Polus, Altitudo poli seu ejus distantia ab Horizonte est arcus PO, & Latitudo loci est ZÆ arcus. Et quoniam arcus PÆ inter polum & æquatorem est circuli quadrans, & arcus ZO inter Zenith & Horizontem interceptus est quoque circuli quadrans, erunt arcus PÆ ZO inter se æquales; Communis auferatur arcus ZP, & restabunt arcus ZÆ PO inter se æquales; hoc est, Latitudo loci æqualis erit Elevationi seu Altitudini Poli supra Horizontem.

Hinc habemus methodum Telluris Perimetrum dimetiendi. Nam si pergamus rectà versus Boream, donec Elevatio Poli uno gradu crescat, & deinde itineris percursi mensura quæratur in milliaribus, dabitur numerus milliarium, quæ sunt in uno gradu Peripheriæ maximi in Tellure circuli, hic numerus per 360. multiplicatus dabit numerum milliarium in toto Perimetro Telluris, & accuratissimis mensuris invenitur Longitudo unius gradus 69 milliaria Anglicana continere, quæ vulgò habetur æqualis tantùm 60. milliaribus.

LECTIO XIX.

De Doctrina Sphærica.

Tab. 32. fig. 5.

ANgulum, quem Æquator & Horizon cum se invicem faciunt, metitur arcus ÆH, qui est complementum Latitudinis ad Quadrantem. Adeoque si angulus ille rectus sit, Latitudo erit nulla, & Æquinoctialis per verticem incedet: omnesque Æquatoris Paralleli erunt ad Horizontem recti, ideoque hæc Sphæræ positio *Recta* dicitur, in quâ paralleli omnes ab Horizonte in partes æquales secantur; unde mora cujusvis stellæ supra horizontem æqualis est tempori quo infra eundem deprimitur; poli hîc in Horizontem procumbunt, uti figurâ manifestum est, ubi punctum æquinoctialis Æ cum vertice seu Zenith coincidit, & *Sphæra Recta.*

Poli P P cum punctis Horizontis HO congruunt.

TAB 32 fig. 6. Si ab Æquatore versùs alterutrum polum recedamus, Æquator quoque à vertice recedet, & ad Horizontem accedet, cum illâ faciens angulum obliquum, unde illa Sphæræ positio dicitur *Obliqua*, Polusque, ad quem acceditur, semper supra Horizontem tantùm elevabitur, quantùm est Latitudo loci; alter tantundem infra deprimetur. Figura annexa hanc Sphæræ positionem exhibet, quam nos, & omnes in Zonis temperatis habitantes, obtinemus, ubi Æquator ÆQ bisecatur ab Horizonte, ut in Sphærâ Rectâ, quapropter ubi Sol illum circulum motu apparenti diurno decurrit, diem facit nocti æqualem; at Æquatoris Paralleli non bifariam ab Horizonte secantur, sed qui sunt versùs Polum elevatum; singuli majorem partem habebunt supra Horizontem extantem, minorem infra depressam, & quò polo propior quilibet circulus, eò major ejus pars supra Horizontem extabit, & qui minus à polo distant quàm est Latitudo loci, toti supra Horizontem attolluntur. Contrarium accidit parallelis versùs Polum depressum sitis, quorum portiones majores infra Horizontem jacent, minores supra elevantur; & qui Polo illi propiores sunt quàm est Latitudo loci, perpetuò unâ cum Stellis, quæ in iis includuntur, sub Horizonte latent, & nunquam fiunt conspicui. Hinc necesse est, cùm Sol quotidie parallelum aliquem decurrat, ut ab Æquinoctio verno ad Solstitium æstivum dies continuo incremento noctes exsuperent; post Solstitium decrescant ad Æquinoctium autumnale; deinde ad Solstitium Hyemale dies noctibus continuò breviores reddantur; denique à Solstitio Hyberno ad Æquinoctium vernum, dies adhuc sunt noctibus breviores, sed rursus continuò augentur, donec in ipso Æquinoctio fiunt tandem noctibus æquales.

Sphæra obliqua.

In Sphærâ obliquâ Stellæ omnes obliquè oriuntur & occidunt, utque Ascensio recta Stellæ est arcus Æquatoris interceptus inter initium Arietis & punctum, quod unà cum Stellâ ad Meridianum pervenit, seu in Sphærâ rectâ, quod simul cum Stellâ ascendit vel oritur: sic *Ascensio obliqua*

qua est arcus Æquatoris interceptus inter initium Arietis & punctum Æquatoris, quod cum Stellâ oritur in Sphærâ obliquâ, eodem ordine numeratus, quæ pro varia Sphæræ obliquitate varia erit. Ascensionis Rectæ & obliquæ differentia dicitur *Differentia Ascensionalis*. *Ascensio obliqua.* *Differentia Ascensionalis.*

In Sphærâ obliquâ est parallelus tantùm à Polo elevato distans, quantùm est latitudo loci, qui *Circulus perpetuæ Apparitionis* nominatur, seu *circulus semper apparentium maximus*, intra quem comprehensæ Stellæ nunquam oriuntur, aut occidunt, sed tamen nunc altiùs ascendunt, nunc humiliùs factæ ad Horizontem propiùs accedunt. Huic ad alterum Polum est oppositus circulus *Perpetuæ Occultationis*, in quo inclusæ Stellæ nunquam oriuntur, sed semper manent inconspicuæ. *Circulus perpetuæ Apparitionis.*

Si Æquator nullum angulum cum Horizonte faciat, sed cum illo coincidat, in tali positione polus quoque cum Zenith congruet, & Æquatoris paralleli omnes erunt Horizonti paralleli, ideo talis sphæræ *Positio Parallela* dicitur, in quâ nullæ fixæ oriuntur aut occidunt, sed in circulis Horizonti parallelis perpetuos gyros ducunt. Sol præterea cum ad Æquinoctialem pervenerit, Horizontem lambit, exinde versùs Polum elevatum digrediens nusquam occidit, sed diem facit longissimum sex mensium. At ubi ab Æquatore recesserit Sol versùs oppositum Polum, è contrario nunquam oritur, noxque illis durat per alteros sex menses. Hunc Sphæræ situm obtinent, qui sub Polis degunt, si qui forte sint, qui has colant regiones. *TAB. 32. fig. 7.* *Sphæra Parallela.*

Veteres Geographi Regiones Telluris per *Parallelos* & *Climata* distinguebant; cum enim in Sphærâ Rectâ, seu sub Æquinoctiali dies noctibus perpetuò æquantur, si inde pergamus versùs alterutrum Polum, dies æstate fiunt noctibus longiores, & quò magis ad Polum accedamus, eò longiores sunt dies longissimi, donec sub ipsis circulis polaribus nulla est nox. Hinc per parallelos Æquatoris, qui augmenta dierum horæ quadrantibus notabant, Tellurem diviserunt Geographi. Hoc est, Paralleli illi tantùm à se invicem distabant, quantò opus sit, ut maxima dies augeatur horæ qua- *Divisio Telluris per Parallelos & Climata.*

dran-

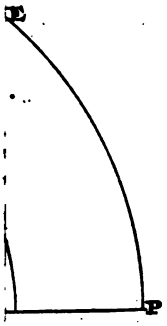
drante de parallelo in parallelum. Poſito ergo Æquatore primo parallelo, ſecundus per ea Terræ loca tranſibat, ubi dies longiſſima eſt horarum 12¼. Tertius ubi dies eſt horarum 12½. Quartus ubi ille 12 horis cum tribus partibus quàrtis adæquat; atque ita denuo. Duo autem ejuſmodi paralleli *Clima* conſtituebant; quæ proinde climata ſemihoræ augmento diſtinguuntur. Poteſt vero exceſſus diei Solſtitialis ſupra 12 horas continuò augeri, magis magiſque ad elevatum Polum accedendo, donec ad Polarem circulum perventum fuerit, & ibi Tropicus unico puncto Horizontem tangens totus eminet, & Sol illum decurrendo, non occidit; quare dies erit horarum viginti quatuor, qui excedit æquinoctialem diem horis duodecim, ſeu viginti quatuor ſemihoris, vel quadraginta & octo horæ quadrantibus, unde conficitur tandem numerus climatum inter æquinoctialem & Polarem eſſe viginti quatuor, & Parallelorum eſſe quadraginta & octo.

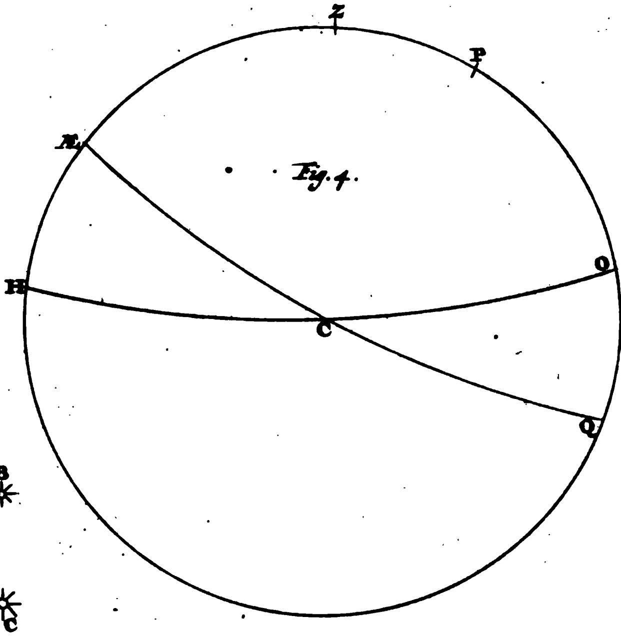
Cum Veterum Annus parum cum motu Solis apparenti congruebat, ex dato die menſis quo factum aliquod notabant, non ſtatim exinde patebat; quâ anni tempeſtate illud evenit. Igitur quando Agricolæ in re Ruſticâ aliquod faciendum in ſtato tempore præcipiebant, tempus illud non per diem Kalendarii Civilis indicabant, quippe eadem dies menſis civilis non ſemper quolibet anno in eâdem Anni tempeſtate incidebat. Sed certioribus opus fuit Characteribus, ad tempora diſtinguenda. Itaque Agricolæ, Rei Ruſticæ ſcriptores, Hiſtorici, & Poetæ tempora per ortus & occaſus Stellarum deſignabant. Ortûs & occaſûs Stellarum vulgò numerantur ſpecies tres; *Coſmicus*, *Achronicus* & *Heliacus*. Oriri dicitur aut occidere Stella coſmicè, quæ oritur aut occidit oriente Sole; ita Stella quæ oritur aut occidit mane, coſmicè oritur aut occidit. Achronicè autem oritur Stella, quæ oritur occidente Sole, hoc eſt quæ veſperi oritur, quando Soli opponitur & totâ nocte fit conſpicua.

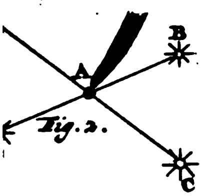
Stellarum ortus & occaſus eorumque ſpecies.

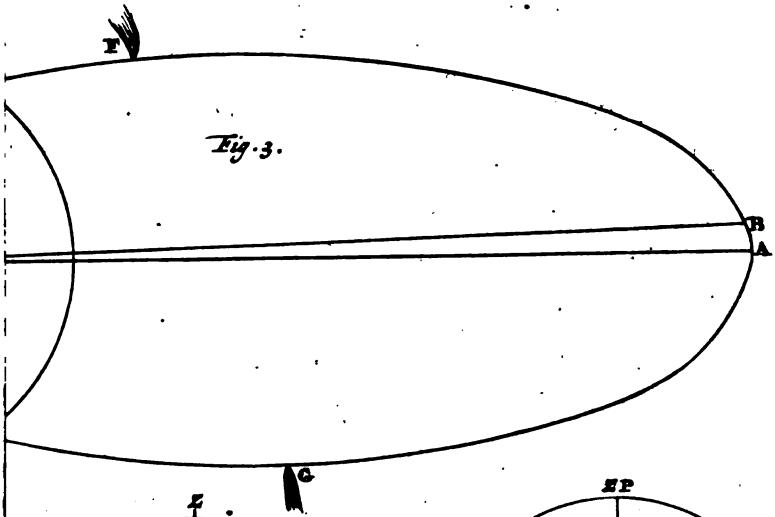
Stella oritur Heliacè, quando è Solis radiis emergens, tantùm ab illo diſtat, ut videatur mane ante Solis ortum, Sole nimirum motu apparente a Stellâ verſûs ortum recedente,

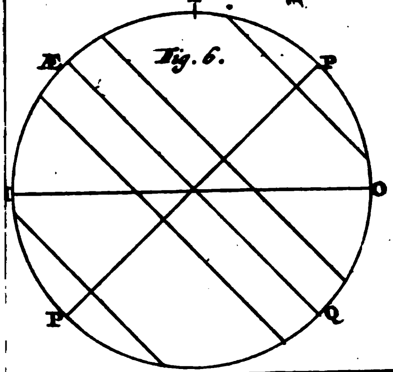
TAB. XXXII.

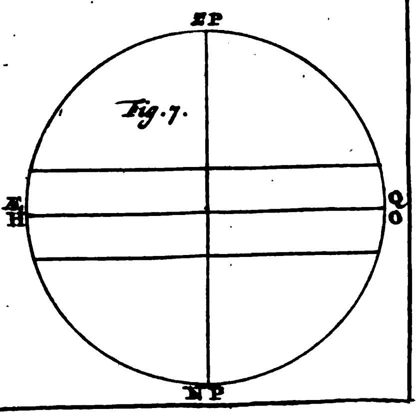

E
P


Z
P
Æ
Fig. 4.
O
H
C
Q


B
A
Fig. 2.
C


F
Fig. 3.
B
A
G


Z
Æ
Fig. 6.
P
O
P
Q


SP
Fig. 7.
Æ
H
Q
O
NP

dente. Occasus autem Heliacus est, quando Sol ad Stellam accedere incipit, illamque radiis suis condens inconspicuam reddit, inde Ortus & Occasus Heliacus potiùs Apparitio, aut Occultatio dici debent.

Stellæ omnes fixæ in Zodiaco sitæ, item Planetæ superiores, Mars, Jupiter & Saturnus oriuntur Heliacè mane, paulo ante Solis ortum, & paucis diebus postquam cosmicè oriuntur; quos nempe Sol motu annuo versùs orientem facto antevertit. Occidunt vero Heliacè vespere, paulo ante quàm Achronicè occidunt. Luna autem, quæ Solem perpetuò antevertit, oritur Heliacè vespere, cum nempe nova ex radiis Solaribus emergit; occidit vero Heliacè mane, cum jam vetus ad conjunctionem cum Sole properat. Inferiores Planetæ Venus & Mercurius, qui aliquando Solem antevertunt, aliquando Solem versùs occidentem post se relinquunt, aliquando Heliacè oriuntur mane, cum nempe retrogradi sunt, aliquando vespere cum sunt directi.

Quomodo Altitudo Solis vel Stellæ observatur. TAB 33. *fig.* 1.

Ad Altitudinem Solis vel Stellæ cujusvis exquirendam utimur Quadrante mobili, E A D cum dioptris fixis A, B, vel Telescopio in alterutro latere collocato, & filo A C pondere instructo ex centro perpendiculariter pendente; & Quadrans in situ verticali compositus sursum deorsumque vertatur, donec lux Solis per foramen anterioris dioptræ in foramen posterioris radiat, in quo situ si sistatur Quadrans, filum ostendit arcum EC altitudini Solis similem. Nam producatur AZ ad Zenith, sitque AH linea Horizontalis, Anguli EAB ZAS sunt æquales, uterque rectus enim est. Sed anguli BAC ZAS sunt quoque æquales, nam ad verticem sunt, quare demptis æqualibus erit angulus EAC æqualis angulo SAH; angulum autem E A C metitur arcus Quadrantis EC, & angulum SAH metitur arcus verticalis circuli inter Solem & Horizontem interceptus, unde arcus ille erit similis arcui EC. Si Altitudo Stellæ capienda sit, loco irradiationis Solis, oculari intuitu Stellam per foramina Dioptrarum comprehendimus, & filum ut ante indicabit quæsitam altitudinem. Inventio Altitudinis Meridianæ Solis vel Stellæ habetur sæpius observando & notando, quando illa maxima est;

Nam maxima altitudo Solis vel Stellæ est in Meridiano.

Inventio Latitudinis loci. Latitudinis loci cognitio est fundamentum omnium observationum Astronomicarum, adeoque in primis necesse est, ut illa accuratè habeatur; Cumque ostensum sit Altitudinem Poli eidem æqualem esse, illa optimè obtinetur per observationem Altitudinis Poli; verùm cum Polus sit tantùm punctum Mathematicum inobservabile, ejus Altitudo non eodem modo ac Solis aut Stellæ, simplici viâ per Quadrantem exquiri potest; alia itaque adhibenda est methodus ut illa cognoscatur. Et primò invenienda est sectio Plani Meridiani cum Horizonte, quæ Linea Meridiana dicitur; quæ fit erigendo Gnomonem, cujus radici seu puncto, apici directè subjecto ut centro, describatur circuli circumferentia, in quam Apicis umbra ante Meridiem incidat, & notetur punctum circumferentiæ in quod umbra cadit: Rursus post Meridiem notetur punctum in eâdem circumferentiâ, ubi Apicis umbra ad illam pertingat, & Recta ducta ex centro circuli ad punctum, quod bisecat arcum inter notata puncta interjectum, erit linea Meridiana; Nam Sol ante & post Meridiem æquialtus æqualiter à Meridiano distat. *Lineæ Meridianæ Inventio.* Collocetur igitur Quadrans super lineâ Meridianâ hoc est in plano Meridiani, & Stellæ alicujus, quæ nunquam occidit, observetur altitudo maxima SO, item minima, SO, Altitudinum differentia erit arcus SS, cujus semissis PS addita altitudini minimæ, vel ab Altitudine maximâ subducta, dabit PO altitudinem Poli supra Horizontem, quæ æqualis est Latitudini loci. *Tab. 33 fig. 2.* Si habeatur Solis Theoria, ex cognitâ Declinatione Solis inveniri potest Latitudo loci, observando distantiam Solis à vertice Meridianam; est enim illa complementum altitudinis ejus, ad quam si addatur declinatio Solis, cum Sol & locus versùs eundem polum ab æquatore distant, aut si declinatio Solis subducatur ab ejus distantia a vertice, cum Sol & locus siti sint ad partes æquatoris contrarias, & habebitur Latitudo loci. Verum si Solis declinatio major sit Latitudine loci, quod cognoscitur quando Sol à Polo elevato minùs distat quàm vertex loci, ut in locis in Zonâ Torridâ sitis sæpe fit, differentia inter declinationem Solis

&

& ejus à vertice distantiam est Latitudo loci.

Obtentâ semel Latitudine loci, Obliquitas Eclipticæ seu ejus Inclinatio ad Æquatorem facile habetur; observetur enim circa Solstitium æstivum minima Solis à vertice distantia. Hæc si à Latitudine loci auferatur, modò locus sit polo propior quàm Sol est, dabit maximam Solis declinationem; quæ obliquitati Eclipticæ est æqualis. Plerique Astronomi inclinationem Eclipticæ ad Æquatorem, seu maximam declinationem Solis æqualem faciunt viginti tribus gradibus cum dimidio, sed accuratissimæ observationes hodiernæ illam uno minuto minorem esse evincunt.

Declinatio Solis observatione cognoscitur.

Eâdem prorsus methodo observari potest Solis pro quâlibet Meridie, vel etiam sideris cujusvis declinatio: nempe quando Sol vel Sidus æquatori propior est quàm locus, capiatur differentia inter Latitudinem loci & distantiam sideris à vertice, quæ restat quantitas erit declinatio sideris; atsi vertex loci inter sidus & Æquatorem situs sit, declinatio sideris erit harum quantitatum summa.

Solis ascensio recta Longitudo, declinatio, & angulus Eclipticæ & Meridiani, ex quibus datis & quo pacto inveniantur.

Tab. 33. fig. 3.

Datâ declinatione Solis, facillimè habetur ejus Ascensio recta & locus in Eclipticâ per resolutionem trianguli rectanguli Sphærici: sit enim ÆQ æquinoctialis circulus, ÆC Ecliptica S Sol, à quo ad æquinoctialem demisso circulo perpendiculari SD erit arcus SD Solis declinatio, & proinde in triangulo rectangulo SDÆ, ex datis SD & angulo Æ, inclinatione Eclipticæ ad æquatorem dabitur per Trigonometriam Sphæricam, arcus ÆD Solis Ascensio recta, & ÆS locus Solis in Eclipticâ: quinetiam angulus ÆSD inclinatio circuli declinationis seu Meridiani ad Eclipticam. Quinetiam in eodem triangulo ÆSD rectangulo., cum angulus Æ constans sit & immutabilis; si detur vel latus ÆD Ascensio recta, invenire possumus declinationem DS & Longitudinem puncti S, quod unà cum D ad Meridianum appellit, mediumque cœli dicitur, & angulum DSC, qui est inclinatio Meridiani ad Eclipticam. Vel si detur ÆS Longitudo puncti S, exinde quoque reliqua invenire possumus, scil. ÆD Ascensionem rectam, DS Declinationem puncti S, & DSC angulum Eclipticæ & Meridiani.

Si quotidie methodo ostensâ observetur Solis Declinatio, dabitur motus Solis apparens in Eclipticâ, cui æqualis est motus Terræ realis interea factus; & observationibus deprehensum est, Solem non æquabili motu in Eclipticâ incedere, adeoque Telluris motus realis circa Solem inæquabilis erit, & in solstitiis nostris æstivis tardiùs progreditur Terra, in Hybernis velociùs, eâ vero lege perpetuò incedit, ut in Ellipseos perimetro feratur, radiisque ad Solem in ejus umbilico locatum per illam ductis semper describat areas temporibus proportionales.

Quomodo Ascensiones rectæ &c. Declinationes fixarum inveniuntur.

Ex dato loco Solis in Eclipticâ, Horologii automati ope, inveniuntur Ascensiones rectæ fixarum; quod ut fiat, motus Horologii sic temperandus est, ut index viginti quatuor horas numeret, labente tempore, quo fixa aliqua à Meridiano digressa ad eundem revertitur, quod tempus die naturali paulo brevius est, ob motum Solis versùs orientem interea factum; Horologio sic ordinato, index ad initium numerationis constituatur, quando Sol Meridianum occupat. Notetur deinde tempus Horologio indicatum, quando stella aliqua eundem Meridianum attingit; horæ earumque partes ab indice percursæ in partes æquatoris conversæ dabunt intervallum Ascensionum Solis & fixæ, quod additum ascensioni rectæ Solis exhibet fixæ Ascensionem rectam quæsitam. Datâ autem unius cujusvis stellæ Ascensione rectâ, dantur reliquarum omnium ascensiones. Nempe observandum est tempus, Horologio prædicto notatum, inter appulsum stellæ, cujus Ascensio recta data est, & appulsum alterius cujusvis stellæ ad eundem Meridianum; & hoc tempus in gradus & minuta Æquatoris conversum dabit ascensionum differentiam, & proinde ipsa Ascensio stellæ dabitur.

Sed ex datâ unius cujusvis stellæ Ascensione rectâ, aliarum Ascensiones optimè habentur methodo sequenti, ubi non opus est, ut exspectetur appulsus stellæ ad Meridianum, sed solummodò Telescopium est adhibendum in cujus foco aptantur fila quatuor, quorum duo AB, CD, sese perpendiculariter secent, reliqua duo EF, GH his ad angulos semi-

Tab. 36. fig. 2.

minrectos insistant in communi sectione O. Quibus constructis dirigatur Telescopium ad stellam aliquam, cujus ascensio recta & declinatio notæ sint. Atque continuò vertatur Telescopium, donec in filo AB videatur stella, ejusque motus apparens fiat secundum rectam AB, in quo situ recta AB exponet portionem paralleli, quem stella motu diurno apparenti percurrere videtur, cumque CD hanc ad rectos angulos secat, illa circulum aliquem horarium exponet: In hoc situ figatur Telescopium, & notetur ope Horologii tempus, quo stella cujus Ascensio nota est lineam CD attingit. Deinde observetur in Telescopio alia quælibet stella, illa in rectâ aliquâ LK, ad AB parallelâ ferri videbitur, & notetur tempus, quando ad circulum horarium CD in Q pervenerit. Differentia temporis inter appulsum prioris stellæ & hujus, ad eundem circulum horarium CD, si in gradus & minuta æquatoris convertatur, dabit differentiam Ascensionum rectarum; adeoque si detur alterutrius stellæ Ascensio recta, dabitur quoque Ascensio alterius.

Cum anguli QHO & QOH sint æquales, utpote semirecti, erit QH æqualis QO; quòd si notetur tempus inter appulsum stellæ ad filum OG, & ejus appulsum ad filum OC, dabitur tempus, quo stella arcum QH paralleli percurrit; hoc tempus in gradus & minuta convertatur, & dabuntur gradus & minuta in arcu paralleli QH; sed huic arcui æqualis est arcus circuli maximi QO; sed in inæqualibus circulis, gradus, quos æquales arcus continent, sunt reciprocè ut circulorum radii, ut inferiùs demonstrabitur. Fiat itaque, ut radius circuli maximi, ad radium paralleli IK, qui à radio paralleli noti OB non sensibiliter differt; hoc est, ut Radius ad sinum distantiæ stellæ à polo, ita numerus graduum & minutorum in arcu QH, ad numerum graduum & minutorum in arcu QO, qui proinde dabuntur; sed est arcus QO differentia declinationum stellæ parallelum QK describentis, & illius quæ describit parallelum OB; unde datâ unius stellæ declinatione, dabitur declinatio alterius. Hâc methodo plurimarum

rum stellarum Ascensiones rectæ & declinationes inveniri possunt.

Quòd in inæqualibus circulis numeri partium similium in arcubus æqualibus sunt reciprocè ut radii, sic demonstratur.
TAB. 33. fig. 4. Sint inæqualium circulorum, quorum centrum C, arcus AF, BE æquales, ducatur CE, & erunt arcus AD, EB similes; partesque similes numero æquales continebunt, partes voco similes, quæ ad circumferentias totas eandem habent proportionem, & ob æquales AF, BE; erit AD ad AF, ut AD ad BE, sed ut AD ad BE, ita est radius CA ad radium CB; adeoque AD est ad AF, ut CA ad CB; sed est AD ad AF, ut numerus partium in AD, hoc est numerus partium in BE, ad numerum partium similium in AF; quare erit numerus partium in BE, ad numerum similium partium in AF, ut CA ad CB.

Quomodo inveniuntur fixarum Longitudines & Latitudines. TAB. 33. fig. 5.

Datâ stellæ Ascensione rectâ, & declinatione, ejus Longitudo & Latitudo inveniuntur, per resolutionem Trianguli Sphærici. Nam per polos Æquinoctialis & Eclipticæ B, P, transeat circulus PBÆQ, is erit Colurus Solstitiorum. Sit ÆQ Æquinoctialis circulus, EC Ecliptica, quorum communis sectio sit ♈ sitque stella S, per quam & polum ducatur circulus declinationis PSF, cum æquatore conveniens in F, erit ♈ F Ascensio recta stellæ, & SF ejusdem declinatio; ducatur per polum Eclipticæ B, & stellam circulus Latitudinis BSO, cum Eclipticâ conveniens in O; erit ♈ O Longitudo stellæ, & SO ejus Latitudo. In triangulo Sphærico BPS datur PS arcus, qui est complementum declinationis datæ, item arcus BP, qui metitur inclinationem Eclipticæ ad Æquatorem, datur præterea angulus FPQ quem metitur arcus FQ, complementum Ascensionis rectæ, adeoque datur angulus BPS; in triangulo BPS, ex tribus datis invenitur primò angulus PBS, cujus mensura est OC, & ejus complementum ad quadrantem est arcus ♈ O Longitudo stellæ, & invenietur præterea BS, cujus complementum ad quadrantem est SO Latitudo stellæ quæsita. Similiter ex notis Longitudine & latitudine stellæ possumus Ascensionem rectam & declinationem exquirere.

Com-

Comparando Fixarum loca à veteribus observata, cum locis, quæ nunc in Eclipticâ obtinent Fixæ, invenimus Latitudines non mutari, at Longitudines à vernali Eclipticæ cum Æquatore intersectione continuò crescere deprehendimus; non quòd stellæ revera progrediuntur, sed quòd retrocedunt puncta æquinoctialia, à quibus Longitudines computantur. Pristina Longitudo alicujus fixæ, collata cum eà quæ hodie observatur, ostendet quantitatem præcessionis Æquinoctiorum, quæ in 70. annis ferè unum gradum adæquat. *Fixarum Longitudines continuo crescunt, Latitudines non item.*

Atque hâc ratione, stellarum Longitudines & Latitudines inveniuntur, & in catalogum rediguntur Fixæ. Quibus semel stabilitis, Planetarum & Cometarum quoque loca per observationes & calculum innotescunt. Nam si observentur Planetæ aut Cometæ alicujus distantiæ, a duabus stellis fixis notis; hoc est, quarum Longitudines & Latitudines notæ sint, hoc pacto exquiritur Planetæ aut Cometæ Longitudo & Latitudo ad tempus observationis.

Sit EF Eclipticæ portio, cujus polus B, A & C duæ stellæ quarum Longitudines & Latitudines sunt datæ, sitque P Planeta cujus distantiæ à duabus stellis A & C observatione notæ sint. In triangulo ABC, ex datis AB, CB complementis Latitudinum stellarum & angulo ABC, cujus mensura est arcus EF, differentia longitudinum, dabitur AC distantia stellarum, & angulus BCA. In triangulo APC, dantur omnia Latera, unde invenietur angulus PCA, quo ex angulo BCA substracto, relinquetur angulus BCP. Denique in triangulo BCP, dantur BC, CP latera, & angulus BCP, quare dabitur angulus CBP, cujus mensura est arcus OF, differentia longitudinum stellæ C & Planetæ P, item dabitur arcus BP, qui est Complementum Latitudinis Planetæ. *TAB 33. fig. 6.*

Eâdem ratione, si observentur distantiæ alicujus Phænomeni a duabus fixis, quarum Ascensiones rectæ, & declinationes notæ sunt, dabitur exinde Ascensio recta & Declinatio Phænomeni.

LE-

LECTIO XX.

De Crepusculis, & Siderum Refractione.

Aer cœlum lucidum reddit.

PRæter alia innumera Atmosphæræ beneficia, hoc etiam commodi ex illâ nobis derivatur, quòd lucente Sole, cœli nostri faciem undique lucidam & splendentem reddat. Nam si Tellurem nulla ambiret aut involveret Atmosphæra, ea sola cœli pars luceret, quam Sol occupat; aversâ a Sole spectatoris facie, is nocturnas tenebras statim sentiret, & interdiu lucente Sole, minimæ etiam stellæ micarent; cum nullum foret corpus Solis radios ad nostros oculos reflectens; & radii illi omnes, qui non in ipsam Telluris superficiem impingant, oculos præterlabentes, aut Planetas & alias stellas illuminarent, aut in spatium sese spargentes infinitum, ad nos nunquam detorquerentur.

Sublatâ Atmosphærâ, ex clarissimâ luce densissimis tenebris in momento involveremur.

Verum circumfusa Telluri Atmosphæra, a Sole validè illustrata, lucis radios ad nos repercutiens, cœlum omne clarescere facit; & inde fit, ut Atmosphæræ splendore, stellarum lumen obscuretur & offundatur.

Præterea, sublatâ Atmosphærâ, immediatè ante Solis occasum splendidissimè luceret Sol, at in momento, cum occidit, statim densissimæ ingruerent tenebræ: tamque subitaneus noctis adventus, & a luce ad tenebras transitus, parum Terricolis commodus esset. Sed per Atmosphæram fit, ut post Solis occasum, etsi nulli directi ad nos pervenire possunt Solares radii, reflexâ tamen luce per aliquod tempus fruamur, & non nisi paulatim obrepunt noctis tenebræ. Nam postquam Tellus vertigine suâ nos e Solis conspectu subduxerit, nobis sublimior aer ab illo illustratus manet, cœlumque omne ejus luce perfunditur. Verum magis magisque descendente Sole, minus continuò illustratur aer; adeo ut postquam decimum octavum infra Horizontem attigerit Sol gradum, Atmosphæram ulterius illustrare desinat, & aer totus tenebrescit.

Crepusculorum causa.

Similiter mane, cum Sol ad decimum octavum ab Horizonte gradum pervenerit, incipit Atmosphæram illuminare, cœlumque luce perfundere, quæ usque ad Solis ortum conti-

ti-

tinuo crescit. Crepera illa & dubia lux mane ante Solis ortum & Vespere post ejus occasum conspicua *Crepusculum* dicitur & ab Atmosphæræ illuminatione oritur.

Quod ut clariùs elucescat, sit ADL circulus in Telluris superficie, concentricus verticali in quo Sol infra Horizontem existit, circa quem sit alius circulus CBM, includens in eodem plano aeris portionem, quæ radios Solis potest reflectere, & oculus sit in superficie Telluris in A, cujus Horizon sensibilis sit AN: Cum nulla recta duci potest ad A, inter tangentem AN & circulum AD *per* 16 *El. tertii.* Sole infra Horizontem depresso, nulli radii possunt ad oculum in A directè pertingere. Verum Sole in rectâ GC existente, ab illo duci potest recta, quæ in Atmosphæræ particulam C incidat, ibique potest radius in CA reflecti, & oculum in A ingredi; atque hâc ratione Solis radii infinitas Atmosphæræ particulas illustrantes ab iisdem in oculum detorquentur. Tangens AB occurrat superficiei aeris, lucem reflectentis in B puncto, a quo ducatur BD circulum Telluris tangens in D, sitque Sol in hâc lineâ, tunc Radius SB in BA reflectetur, & oculum ingredietur, ob angulum DBE incidentiæ æqualem angulo reflectionis ABE; eritque ille radius, qui primus mane ad oculum pervenire possit, & tunc Crepusculum Matutinum, seu Aurora incipit, vel ultimus Vespere, qui ibidem pertinget, in quo casu erit Crepusculi finis. Nam Sole inferiùs descendente, particulæ aeris ad B vel ultra existentes, ab ejus luce illuminari non possunt.

Tab 33. fig. 7.

Reflectio Atmosphæræ non videtur esse sola Crepusculorum causa, sed circumfusa Soli aura Ætherea, illiusque quasi Atmosphæra etiam splendet post Solis occasum, cumque hæc oriendo & occidendo longius impendit tempus quàm Sol, ante Solis ortum, Aurora circulari figurâ enitetur; quæ scil. est segmentum circuli Atmosphæræ Solaris ab Horizonte secti, cujus lux diversa prorsus est ab illâ, quæ ex illustratione Atmosphæræ Terrestris oritur. Verum Crepusculi ex aurâ Ættereâ Soli vicinâ provenientis, brevior est duratio, quàm illius quæ à nostrâ Atmosphærâ

Alia Crepusculorum causa Atmosphæra Solaris.

oritur, quæ Vespere non finitur, nisi cum Sol octodecim circiter gradus infra Horizontem deprimitur. At verò nulli certi statui possunt limites, qui initia aut fines Crepusculorum definiant. Eorum enim duratio pendet ex quantitate materiæ in aere suspensâ ad lucis reflectionem idoneâ, & ex altitudine aeris. Hyeme frigore condensatus aer humilis est, & exinde citò finiuntur Crepuscula. Æstate rarefactus aer altior est, & diutius à Sole illustratur, unde protrahuntur Crepuscula. Quin etiam duratio Crepusculi Matutini brevior est Vespertinâ duratione, ob aerem mane densiorem & humiliorem quàm Vespere. Censentur autem Crepuscula incipere aut desinere, quando stellæ sexti ordinis primum mane desinunt conspici vel vespere fiunt conspicuæ, quæ priùs ob claritatem aeris latebant.

Hyeme Crepuscula breviora quam Æstate.

Ricciolius ex observatis à se Bononiæ, reperit Crepusculum matutinum circa Æquinoctia perdurare mane quidem horâ unâ min. 47., vespertinum autem horis duabus, & non priùs desinere, quàm Sol vicesimum primum gradum infra Horizontem attigerit. Æstivum autem matutinum Crepusculum circa Solstitium horis tribus min. 40. Vespertinum totam ferè seminoctem tenere.

Ex duratione Crepusculi inveniri potest Altitudo Aeris.

Tab. 33. fig. 7.

Hinc si detur initium Crepusculi matutini, aut finis vespertini, inveniri potest altitudo aeris lucem reflectentis. Nam tunc desinit Crepusculum, quando lucis Radius à Sole prodiens, Terramque stringens seu tangens, à supremo aere ad observatoris oculum reflectitur. Et ex noto tempore, dabitur depressio Solis infra Horizontem; ex quâ elicitur altitudo aeris. Sit enim SB, radius lucis Tellurem tangens, quæ à particulâ aeris B, in supremâ ejus regione locatâ, reflectatur in lineam AB Horizonti parallelam; erit angulus SBN mensura depressionis Solis infra Horizontem. Et quia AB Tellurem quoque tangit, erit angulus AED ad centrum, æqualis angulo SBN, seu depressioni Solis, ejusque dimidium AEB hujus dimidio æquale. Sit Solis (exeunte Crepusculo) depressio octodecim graduum, angulus AEB, fiet novem gr. quod verum esset, si radius SB, irrefractus Atmosphæram transiisset, verum quoniam radius in aere per Refractionem versùs H incurvatur, minuendus est angulus AEB, quantitate æquali refractioni Horizontali Solis, hoc est, dimidio circiter gradûs, unde erit anguli AEB vera quantitas octo cum dimidio graduum; porro est AE ad BH, ut radius ad excessum secantis anguli AEB, supra radiùm, id est, ut 100000, ad 1110. Posito igitur semidiametro Telluris in numeris rotundis 4000, milliarium, quibus quàm proximè est æqualis, erit BH altitudo Atmosphæræ radios Solares reflectentis 44 circiter milliarium: nam ut 100000, ad 1110, ita 4000, ad 44, per regulam proportionis.

In Sphærâ rectâ Crepuscula brevissima.

In Sphærâ rectâ Crepuscula citò finiuntur, ob rectum Solis descensum; in obliquo, longiùs durant, quia obliquè descendit Sol; & quò obliquior est Sphæra, hoc est, quò major est loci Latitudo, eò longior est Crepusculi duratio, adeo ut, qui ultra 48 gradibus ab Æquatore distant, in Solstitiis æstivis aerem per totam noctem clarescentem habeant, nullusque fiat Crepusculorum finis, in quo meræ sunt tenebræ.

In Sphærâ parallelâ Crepuscula per plures menses durant, unde per totum ferè annum Solis lumine vel directo vel reflexo fruuntur incolæ.

Si infra Horizontem concipiatur duci circulus Horizonti parallelus, tantùm ab illo distans, quantùm est depressio Solis, cum finiuntur Crepuscula; hic circulus dicitur Crepusculorum Finitor. Nam quotiescunque Sol, motu diurno apparente, hunc parallelum tempore matutino attigerit, initium sumet Crepusculum matutinum, in quocunque Æquatoris parallelo versetur Sol. Vespertinum autem cessabit Crepusculum, cum Sol post occasum, ad eundem Horizontis parallelum pervenerit.

Circulus Crepusculorum finitor. TAB. 33. fig. 8.

Sit in figurâ HQO Horizon: circulus V*a*X ei parallelus Crepusculorum Finitor; HZO Meridianus; ÆQR Æquator. Patet, quò obliquior est Æquator ad Horizontem, eò arcus Æquatoris, ejusque parallelorum interceptos inter Horizontem, ejusque parallelum R*a*X longiores esse. Hi arcus QR, *da*, *ee*, *gb*, *kl*, portiones Æquatoris & parallelorum, intercepti inter Horizontem & Finitorem, dicuntur Crepusculorum arcus; eorum enim durationem determinant, & prout quilibet arcus ad suum circulum, majorem aut minorem obtinet proportionem, eò longior aut brevior erit Crepusculi duratio; quando Sol illum parallelum decurrit. In Finitore Crepusculorum capiatur quodlibet punctum *a* per quod parallelus Æquatoris *da* transeat; & per *a*, concipiatur duci circulus maximus M*a*N, qui tangat circulum perpetuæ Apparitionis. Cumque Horizon eundem circulum tangat, hi duo circuli cum Æquatore ejusque Parallelis æquales facient angulos: nam utriusque anguli Mensura est distantia paralleli à suo circulo maximo; eruntque arcus omnes Parallelorum Æquatoris, inter Horizontem & circulum M*a*N intercepti similes, *per* 13. *lib.* 2*di Theodosii Sphærici*; adeoque Sol æqualibus temporibus hos parallelorum interceptos arcus describet. Circulus M*a*N finitorem V*a*X, vel in duobus punctis secabit, vel in unico puncto tanget. Primò eum in duobus punctis secet, quæ sint *a* & *b*; unde erunt arcus parallelorum *da*, *gb*, similes; adeoque, quando Sol hos duos parallelos motu diurno describit, Crepuscula erunt æqualia, at quando aliquem parallelum intermedium percurrit, Verbi gr. *ce*, Crepusculi duratio brevior erit, nam in hoc casu *cm* crepusculi arcus minor est *ce*, qui similis est arcui *da* vel *gb*, & *ce* & *da* æqualibus temporibus à Sole describuntur. At in Parallelis longiùs ab Æquatore distantibus quàm *gb* commorans Sol longiora efficit crepuscula; nam est arcus crepusculi *lk* major quàm *qk*, qui à Sole describitur in tempore, quod est æquale durationi Crepusculi, Sole in parallelo *gb* existente.

Diversæ Crepusculorum durationes. In Parallelis, qui versùs elevatum polum jacent, versante Sole, continuò crescunt crepuscula, prout Paralleli illi polo viciniores fuerint; longior enim est Crepusculi arcus *op*, quàm QR, & YU longiori tempore describitur quàm *op*. At si Sol parallelum ST describat, qui cum Finitore non conveniat, Crepusculum per totam noctem durabit.

Hinc valde dissimilem servant rationem Crepuscula, ac dies noctesque, in incrementis & decrementis. Nam Sole

per

TAB. XXXIII.

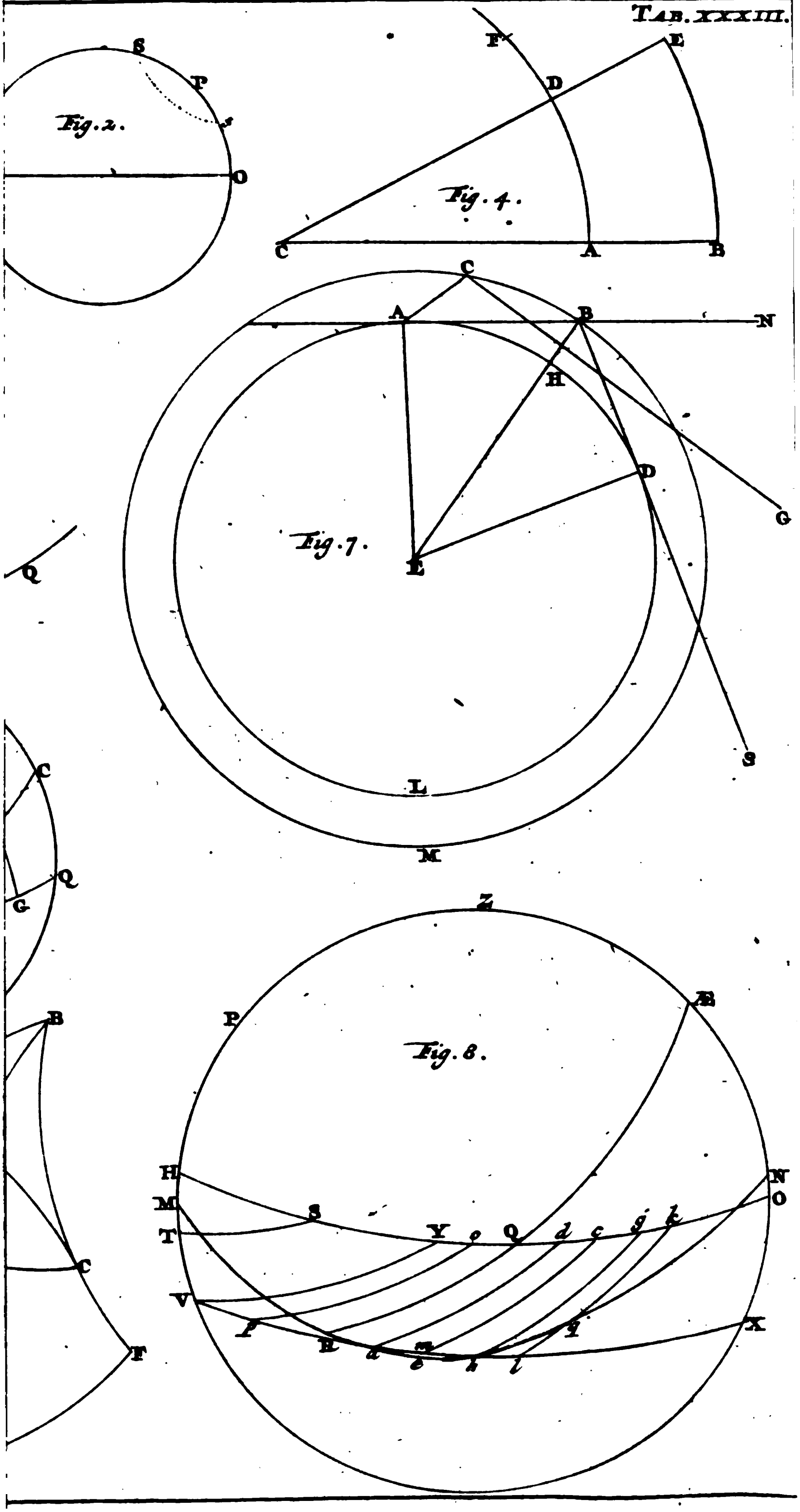


Fig. 2.
S
P
s
O
Fig. 4.
F
D
E
C
A
B
Fig. 7.
C
A
B
N
H
D
G
E
L
M
S
Q
C
Q
G
B
C
F
Fig. 8.
Z
P
Æ
H
M
T
S
Y
o
Q
d
c
g
k
N
O
V
f
R
a
m
e
h
l
q
X

pergente ab initio Cancri, ubi dies ſunt longiſſimi, ad initium Capricorni, ubi ſunt breviſſimi, dies continuò nobis decreſcunt, è contrario noctes ſine intermiſſione augentur. At vero in Crepuſculis aliter ſe res habet; nam licet in principio Cancri, ſeu in Solſtitiis, Crepuſculum ſit longiſſimum, indeque ſimul cum diebus decreſcant, ſed non continuò uſque ad Capricornum fit hæc diminùtio: nam in quodam Eclipticæ puncto inter Libram & Capricornum fit Crepuſculum omnium breviſſimum; ac deinceps ab hoc iterum augentur Crepuſcula, efficieturque unum Crepuſculum æqualè illi, quod in Æquatore fit, antequam ad Capricornum Sol perveniat. Et ſi Sol ultra Tropicum Hyemalem excurreret, Crepuſcula adhuc ſemper fierent longiora, etiamſi dies decreſcerent. Et licet dies à Capricorno ad Arietem ſemper fiunt longiores; Crepuſcula tamen minuuntur, uſque ad quoddam punctum, inter Capricornum & Arietem, in quo breviſſimum fit Crepuſculum: hoc ex ſequentibus patebit, in quibus illud punctum determinatur.

Secundò, Circulus M *a* N Finitorem in unico puncto tangat, quod ſit *a*, per quod ducatur Parallelus Æquatoris *d a*, in hoc parallelo ſi Sol verſetur, erit Crepuſculum omnium breviſſimum. Nam quia arcus parallelorum in Q *n*, *d a*, *g i*, inter Horizontem & circulum M *a* N intercepti, ſunt omnes ſimiles, æqualibus temporibus à Sole deſcendente deſcribuntur, ſed ob arcus Crepuſculorum *c e*, *g h*, majores quàm *c m* vel *g i*, major erit mora Solis in arcu *c e*, quam in *c m*, & in arcu *g h* quàm in *g i*, hoc eſt, quàm in arcu *d a*. Adeoque Crepuſcula in parallelis *c e*, *g h* longiora erunt, quàm in parallelo *d a*, in quo igitur Crepuſculum fit omnium breviſſimum. *Crepuſculum Breviſſimum.* TAB. 34. *fig.* 1.

Diſtantia paralleli ab Æquatore, in quo fit breviſſimum Crepuſculum, ſic invenitur. Quoniam Circulus M *a* N & Horizon HO eundem Parallelum tangunt, ſcil. circulum perpetuæ Apparitionis, æqualiter ad Æquatorem inclinantur, uti oſtenſum fuit. Eſt igitur angulus *a n* T, quem Æquator & circulus M *a* N comprehendunt, æqualis angulo FQ *d* Æquatoris & Horizontis: per Zenith Z & punctum *a*

 du-

ducatur circulus verticalis ZY *a*, Æquatorem secans in T. In triangulis itaque Sphæricis *an* T TQY, anguli ad *a* & Y sunt recti. Et anguli ad Q & *n* æquales ostensi sunt; item anguli ad T sunt quoque æquales, ad verticem enim sunt. Quare triangula *an* T TQY sibi mutuò æquiangula existentia, sunt quoque sibi mutuò æquilatera; ac proinde T*a* æqualis erit TY, seu dimidio arcûs *a* Y distantiæ Finitoris ab Horizonte & præterea erit *an* æqualis QY, sed est *an* æqualis Q*d*, *per* 13. *lib.* 2*di Theodos.* propterea quòd QR & *da* sunt paralleli, adeoque erit *d*Q æqualis QY.

In Triangulo Sphærico TQY Rectangulo ad Y; datur latus TY semidistantia Finitoris ab Horizonte, item angulus YQT æqualis FQ*d*, qui metitur complementum Latitudinis Loci, quare innotescet QY, & huic æqualis Q*d*. A puncto *d* in Æquatorem ducatur circulus Declinationis *d* F; & in Triangulo rectangulo Sphærico *d*QF, datur *d* Q & angulus ad Q, inde innotescet arcus *d* F, distantia paralleli minimi Crepusculi ab Æquatore, seu ejus declinatio, quæ erat invenienda.

Unicâ tantum Analogiâ solvi potest Problema: nam in Triangulo TQY, Radius: Tang: TY:: *co* Tang. Q: sin. QY, vel ad sin *d*Q. Sed est sin. Q. cosin Q:: Radius: *co* Tang. Q, quare ex æquo erit Radius ductus in sin. Q: Tang. TY $\times$ cosin. Q:: Radius: sin, Q*d*. (hoc est in triangulo rectangulo Q*d*F):: sin. Q: sin. *d*F:: Radius $\times$ sin. Q: Radius $\times$ sin. *d*F. Adeoque in Analogiâ, cum Antecedentes sint æquales, æquales quoque erunt Consequentes. Et erit Radius $\times$ sin. *d*F æqualis Tang. TY $\times$ cosin. Q. Et resolvendo æquationem in Analogiam, erit Radius ad Tangentem TY, ut cosin. Q seu sinus Latitudinis loci, ad sinum *d*F distantiæ paralleli ab Æquatore. QEI.

Initium & Finis crepusculi determinantur. Datâ Declinatione Solis, Tempus initii Crepusculi Matutini, aut finis vespertini sic invenitur; sit *op* parallelus Solis, cum Finitore Crepusculorum conveniens in *p*, Ducatur è Polo circulus Declinationis P*p*, & in Triangulo Sphærico PZ*p*, dantur omnia latera. scil. PZ complementum Latitudinis Loci. P*p* complementum Declinationis Solis, & Z*p* æqua-

æqualis Quadranti plus distantiâ Finitoris ab Horizonte $= Zl + lp$: unde dabitur angulus ZPp, hujusque complementum ad duos rectos, scil. angulus pPV, unde Arcus Æquatoris, qui hunc angulum metitur in tempus conversus ostendet tempus initii vel finis Crepusculi QEI.

ATMOSPHÆRA Terrestris non tantùm Radios Solares reflectendo claritatem producit matutinam & vespertinam, sed & reliquorum omnium siderum radios in se incidentes refrangendo, hoc est, eorum directiones mutando, eosque per alias rectas propagando, facit, ut Stellarum loci apparentes sint a veris diversi. *Atmosphæra vis in refrangendo.*

Multiplici experimento deprehensum est, radios corporis luminosi, vel etiam cujusvis objecti visibilis, incidentes in medium Diaphanum diversæ densitatis ab eo, per quod priùs propagati fuerint, non tendere directè per easdem rectas lineas, sed veluti frangi & flecti, hoc est per aliam viam propagari; & si medium, in quod incidunt radii, sit densius priore, flectuntur versùs rectam perpendicularem in superficiem ad punctum incidentiæ. Si verò rarius sit medium Diaphanum, franguntur radii à perpendiculari divergendo. Multos Refractionum effectus in naturâ cernimus. Baculus, cujus una pars in aere extat, altera in aquâ, Fractus videtur, & altior apparet quàm reverà est; & Astra omnia altiora seu vertici propiora cernuntur, quàm forent, si irrefracti ad oculum pervenissent. *Varii Refractionis effectus.*

Sit in Figurâ ZV Quadrans circuli verticalis, ex centro Terræ T descriptus, sub quo sit Quadrans circuli Telluris maximi AB, & correspondens Atmosphæræ Quadrans GH. Sitque S sidus quodlibet, à quo exeat Radius lucis SE, in superficiem Atmosphæræ in E incidens, cumque hic radius ex aurâ Ætherea & rarâ, seu potiùs ex vacuo, in aerem nostrum densiorem incidat, in E refrangetur versùs propendicularem; cumque aer superior sit rarior inferiore, adeoque densitas medii continuò augeatur, Radius lucis ulteriùs in aere pergendo, continuò curvabitur; & in curvâ EA ad oculum deferetur; hanc curvam tangat in A recta AF, & secundum ejus directionem radius EA in oculum recipietur; *Siderum Refractio. TAB. 34. fig. 2.*

cum-

cumque objectum omne videtur in rectâ, secundùm quam sit Directio radiorum, qui sensorium vellicant; objectum S apparebit in rectâ AF, hoc est, in cœli puncto Q vertici propiore, quàm reverà sidus existit. Et fieri quidem potest, ut sidus appareat supra Horizontem, quod infra eundem adhuc latet.

Per refractionem Eclipsis Lunæ videtur, Lunâ infra Horizontem commorante.

Hinc fit, ut Refractio Luminaria Solem & Lunam ex diametro opposita, & quorum unum infra Horizontem locatur, supra Horizontem repræsentet, adeo ut Lunæ Eclipsis videatur, Lunâ infra Horizontem commorante, Sole autem supra, ut sæpius observatum fuit.

Ubi nulla est Refractio. Ubi maxima. Ubi non sensibilis.

Sidus in vertice constitutum nullam patitur refractionem; nam radius perpendicularis rectà progreditur; at quò obliquior est radius in aerem incidens, eò major est refractio, adeoque in Horizonte refractio est maxima. Et Stella magis quàm 50 gradibus supra Horizontem elevata, nulli sensibili obnoxia est Refractioni. In æqualibus à vertice distantiis apparentibus, Refractiones sunt æquales, adeoque Solis, Lunæ, & fixarum omnium in pari Altitudine, refractiones sunt æquales, contra quàm censuit Astronomiæ Instaurator, Refractionumque primus Investigator, Nobilis Braheus. Hinc si inveniantur Fixarum Refractiones, dabuntur etiam Solis Lunæque & Planetarum omnium Refractiones; & per Observationes, faciliùs investigatur fixæ alicujus Refractio, quàm Solis & Lunæ, quippe horum siderum non satis accuratè notæ Parallaxes, investigationem Refractionum dubiam reddunt, dum incerta sit quanta loci mutatio Parallaxi, quanta Refractioni debetur. At Stellæ fixæ nulli Parallaxi obnoxiæ sunt, & tota loci variatio à Refractione pendet.

Omnium siderum in pari Altitudine æquales refractionis.

Fixarum, quæ ad altitudinem majorem 50. gradibus perveniunt, dantur Declinationes, Ascensiones rectæ, Longitudines, & Latitudines, satis accuratè; nam in tantâ altitudine, earum refractiones sunt quàm proximè nullæ. Quibus cognitis refractiones prope Horizontem sequenti methodo inquiruntur. Sit OPZH Meridianus, HO Horizon, ÆQ Æquator, Polus P, Vertex Z, A Stella, cujus refractio est investiganda, Verticalis per Stellam transiens ZD, Stellæ locus visus

Tab. 34. fig. 3.

C;

C; arcus AC erit Stellæ refractio. Observetur Distantia Stellæ à vertice visa, scil. arcus ZC, & habeatur, vel per Altitudinem observatam alterius Stellæ extra Refractionis aleam positæ, vel per Horologium automaton, Temporis momentum quo observatio facta fuit. Ex hoc tempore & Adscensione rectâ Solis, dabitur punctum Æquatoris eodem momento culminans, scil. punctum Æ. Sed datur quoque Stellæ Ascensio recta; adeoque punctum Æquatoris B, ubi circulus Declinationis PAB per Stellam ductus, Æquatori occurrit. Itaque dabitur Æquatoris arcus ÆB, qui est mensura anguli ZPA: In Triangulo igitur Sphærico ZPA, ex datis lateribus ZP distantiâ verticis à Polo, & PA complemento Declinationis Stellæ, & angulo ZPA, invenietur per Trigonometriam Sphæricam latus ZA, vera distantia Stellæ à vertice, à quâ si substrahatur ZC distantia visa observatione cognita, habebitur arcus AC Stellæ Refractio, quæ erat invenienda. *Refractionis Investigatio.*

Potest enim Fixæ Refractio inveniri, si observetur ejus Azimuthus, seu arcus Horizontis inter Meridianum & verticalem per Stellam ductum interceptus, scil. DO, nam arcus ille metitur angulum PZA, ex quo dato, & lateribus PZ, PA, invenietur ZA vera distantia Stellæ à vertice, & si ab hâc auferatur distantia observata, restabit CA Refractio quæsita.

Azimuthus sideris cujusvis observatione optimè innotescet, si ducatur in plano Horizontis, linea Meridiana AE, super quam erigatur filum perpendiculare CA; quod pondere appenso facile fit: deinde aliud filum BD, pondere similiter instructum, ita suspendatur, ut Stella ab illis duobus filis tegatur; adeoque erit Stella in plano verticalis circuli per duo fila CA DB ducti; notetur deinde punctum B, ubi filum BD plano Horizontis occurrit, & in lineâ Meridianâ punctum A cui filum CA incumbit; sumptoque in Meridiano quolibet puncto E, ducantur AB BE, & regulâ in partes æquales satis minutas divisâ, capiantur mensuræ trium laterum Trianguli BAE; ex quibus per Trigonometriam investigetur angulus BAE; & innotescit Azimuthus sideris quæsitus. *Sideris Azimuthus quomodo observatione capitur.* TAB. 34. fig. 4.

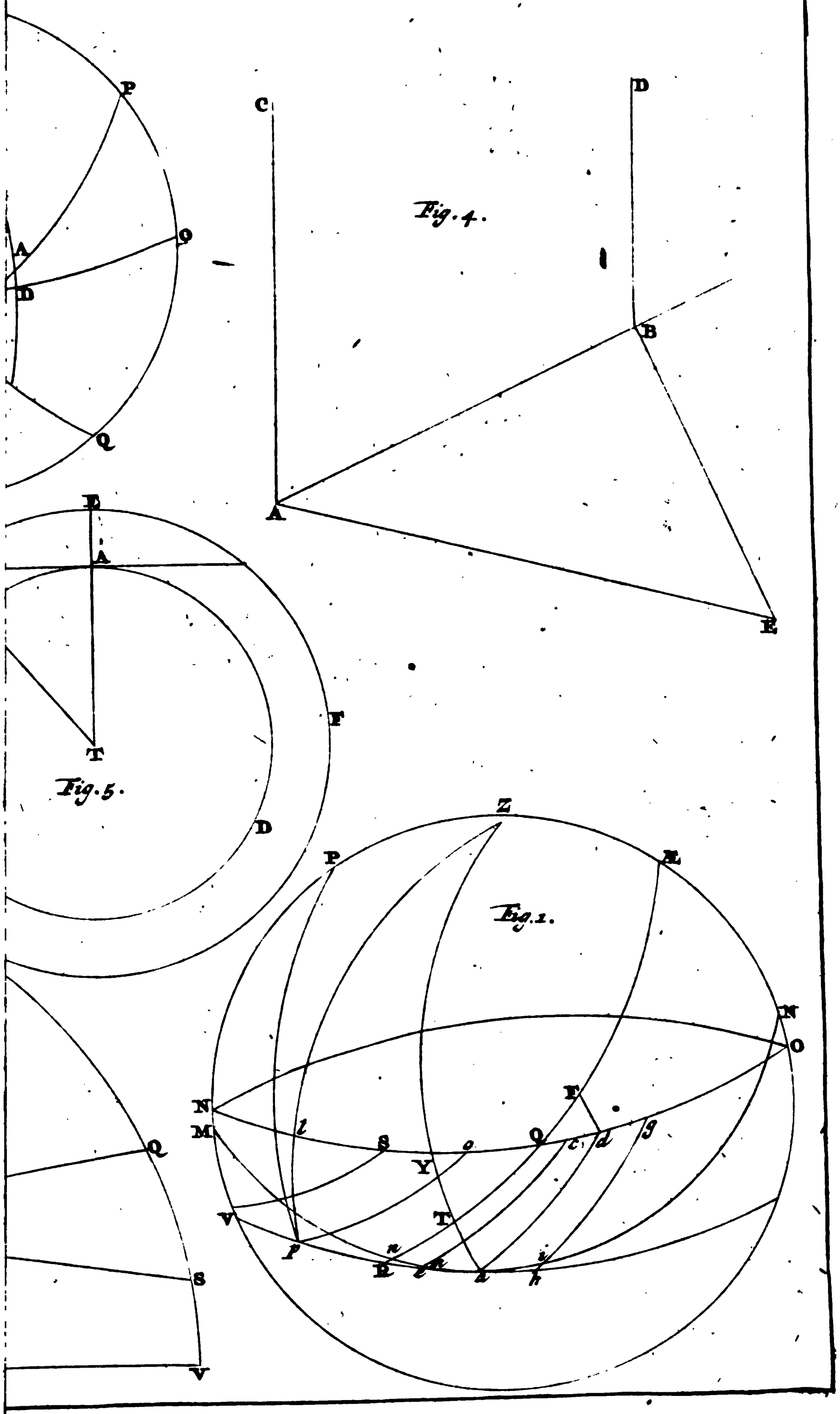
Ex Refractione ratio redditur, cur Sol & Luna prope Horizontem visi, ovalem induunt figuram; nam eorum margines inferiores per refractionem multùm elevantur, non item superiores margines; adeoque hæ margines sibi appropinquare videntur, & contractiores justo apparent; interim utrique termini Horizontalis diametri æqualiter per refractionem elevati cum sint, invariata manebit eorum distantia.

TAB. 34. fig. 5. Radii Solares, cum Sol est in Horizonte, longiore multò itinere per aerem feruntur, quàm cum is prope verticem versatur. Sit enim ABD Tellus, & ECF circumfusa Atmosphæra, cujus Altitudo vulgò æstimatur 50 milliarium. Sit CA radius Horizontalis, EA verticalis, patet esse CA longiorem quàm EA; earum autem rationem sic investigare licet. Ponatur semidiameter Telluris AT in numeris rotundis, esse milliarium 4000, & EA 50. Erit ET = CT milliarium 4050, cujus quadratum æquale est quadratis TA CA. Adeoque si à quadrato ab CT auferatur quadratum ab AT, restabit quadratum à CA, hoc est si ab 16402500 auferatur 16000000, restabit 402500 pro quadrato lineæ CA; cujus radix est 634. Est igitur CA ad EA ut 634 ad 50, hoc est in majore ratione quàm 12 ad 1. Hinc patet ratio, cur illæsis oculis, possumus Solem orientem aut occidentem intueri; at in Meridiano non sine oculorum damno aspiciendus est Sol: nam radii Solares in Horizonte per tam crassum Atmosphæræ corpus progrediendo, in particulas innumeras in aere volitantes impingunt, à quibus reflectuntur, eorumque vires multùm exinde debilitantur. Patet etiam, cum per tam exiguum spatium progrediendo tantùm debilitantur Radiorum vires, si Atmosphæra nostra ad Lunam eâdem densitate se extenderet, non Solem, nedum Lunam aut Stellas, videri posse.

Radii Solares prope Horizontem profundiùs in Atmosphærâ immerguntur.

LE

TAB. XXXIV.



P
Q
A
D
Q
C
D
Fig. 4.
B
A
E
E
A
F
T
Fig. 5.
D
Z
P
E
Fig. 1.
N
O
N
M
F
l
S
o
Q
c
d
g
Y
V
T
p
n
R
e
a
i
h
Q
S
V

LECTIO XXII.

De Parallaxi Siderum.

CUM motus omnes apparentes diurni circa Axem Telluris, non circa locum ſpectatoris ejus ſuperficiem incolentis, peragi videntur, neceſſe eſt, ut qui motus ſiderum ex Telluris ſuperficie obſervat, ea inæqualiter moveri aſpiciat; nam ſi mobile aliquod æquabiliter in circuli peripheriâ deferatur, motûs æquabilitas ex nullo alio puncto, præter ea, quæ in Axe Circuli locantur, ſpectari poteſt; unde Phænomeni in cælo locus viſus diverſus erit, cum è ſuperficie Terræ obſervatur, quàm ſi ex ejuſdem centro ſpectaretur. Et hæc locorum differentia, cum ſidus è ſuperficie Telluris videtur, & ab ejus centro ſpectatur, Parallaxis dicitur. *Motus circularis æquabilis ex nullo alio loco quàm axe æquabilis videtur.*

Sit AB Quadrans circuli in Telluris ſuperficie maximi, cujus centrum T. A locus in ſuperficie, ejuſque vertex in cælis V, circuluſque VNH referat cælum Stellatum, linea AD Horizontem ſenſibilem, in quo ſit ſidus in C, cujus diſtantia à Telluris centro ſit TC. hoc ſidus è Telluris centro ſpectatum in cælo Stellato in E conſpicietur, ſupra Horizontem arcu DE elevatum; punctum E dicitur locus Phænomeni verus. At ſi è Telluris ſuperficie in A Obſervator illud intueatur, in Horizontis puncto D ipſum conſpiciet, quod locus ejus apparens nominatur. Et arcus DE differentia inter locum verum & viſum dicitur *Parallaxis Aſtri.* *Parallaxis Quid?* TAB. 35. *fig.* 1.

Si ſidus altiùs elevetur ſupra Horizontem in M, ejus locus verus è Telluris centro viſus eſt P, at viſus è ſuperficiei puncto A, eſt N, & Parallaxis eſt arcus PN, qui arcu DE minor eſt: unde Parallaxis ſideris in Horizonte exiſtentis eſt omnium maxima; quò altiùs attollitur ſidus, eò minorem patitur parallaxim; ſi autem ad verticem pervenerit, nulli parallaxi eſt obnoxia; nam cum in Q exiſtit, tam ex T quàm in A, in eâdem rectâ TV videtur, nullaque eſt differentia inter locum verum & viſum. Quò longiùs ſidus aliquod à Terra diſtat, eò ejus Parallaxis eſt minor; ita ſi- *In majori à Tellure diſtantiâ minor eſt Parallaxis* deris F à Tellure longiùs remoti Parallaxis est GD, sideris propioris C parallaxi minor. Hinc patet Parallaxim esse differentiam inter veram sideris à vertice distantiam, è Terræ centro visam, & eam quæ ex ejus superficie conspicitur. Nam sideris M vera distantia à vertice est arcus VP, at ex A conspecto sidere, distantia ejus à vertice est VN.

Has distantias metiuntur anguli VTM, VAM, comprehensi rectâ TV ad verticem ductâ, & rectis TM, AM, ex centro & superficie Telluris ad sidus ductis; horum autem angulorum differentia est angulus TMA. Nam est angulus VAM externus æqualis duobus internis ATM & TMA; adeoque est TMA differentia angulorum VAM & VTM; qui itaque parallaxim metitur; & ideo ipse Parallaxis dicitur. Est autem ubique hic angulus ille, sub quo semidiameter Terræ, per locum observatoris ducta, è sidere videtur, adeoque ubi semidiameter illa directè videtur, maximus est; hoc est sideris in Horizonte existentis maxima est Parallaxis; & ascendendo minuitur parallaxis, in eâ ratione, quæ in sequenti Theoremate demonstratur.

Parallaxis est Angulus, sub quo semidiameter Terræ per loci verticem ducta, è sidere videtur.

THEOREMA.

Sinus Parallaxeôs est ad sinum distantiæ sideris à vertice visæ, in datâ ratione, scil. in ratione semidiametri Telluris ad distantiam sideris.

Parallaxes minuuntur in ratione sinuum distantiarum à vertice.

Nam per notissimum Trigonometriæ Theorema. In Triangulo ATM, est sinus anguli AMT, ad sinum anguli TAM vel VAM, ut AT ad TM; scil. in constante ratione semidiametri Telluris ad sideris distantiam. Hinc sinus Parallaxis sideris in C, est ad sinum Parallaxis in M, ut sinus anguli VAC, ad sinum anguli VAM. Itaque si detur sideris Parallaxis in aliquâ à vertice distantiâ, dabitur ejus Parallaxis in aliâ quâvis à vertice distantiâ.

Si Phænomenon aliquod longius 15000 semidiametris Telluris ab ejus centro distet, ejus Parallaxis etiam Horizontalis insensibilis evadit. Nam si sit TF ad TA, ut 15000 ad 1. seu ut Radius ad sinum anguli TFA, invenietur ille angulus minor scrupulis secundis 13. qui angulus tam exiguus est, ut nullis instrumentis observari possit.

Si-

Si detur ſideris alicujus diſtantia à Telluris centro, dabitur ejus Parallaxis. Nam in triangulo TAC, rectangulo ad A, ex datis TA ſemidiametro Telluris, & TC diſtantiâ ſideris, invenietur per Trigonometriam angulus ACT, Parallaxis ſideris Horizontalis: & viciſſim ſi detur Parallaxis, dabitur diſtantia ſideris à Terræ centro, in eodem ſcil. triangulo, ex datis AT & angulo ACT, elicietur diſtantia TC.

Si ſidus nullum habeat motum ſibi proprium, ejus diſtantia vera à quâlibet fixâ, per arcum circuli menſuranda, ſemper eadem & immutata manet, in omni ſideris ſupra Horizontem elevatione; at ſi Parallaxi ſenſibili ſit obnoxium ſidus, ejus diſtantia viſa à Fixâ aliquâ continuò mutabitur; & ſi fixa ſit in eodem circulo verticali cum ſidere, ſed illo altior, minuitur diſtantia aſcendendo, ſi humilior ſidere ſit fixa, aſcendendo ſidus à fixâ remotius videbitur, quamvis è centro Telluris conſpectum, eandem ubique retinebit diſtantiam, ideoque diſtantiæ ſideris propinqui à fixis viſæ non ſunt reales, ſed apparentes.

Per Parallaxes, ſiderum à fixis diſtantiæ continuò mutantur.

Sit Phænomenon ſeu ſidus in Horizonte in C viſum, è Telluris centro T cum fixâ E conjungi videbitur; at à ſpectatore in A exiſtente, in eâdem rectâ cum fixâ D cernitur, & diſtare videbitur à fixâ E, arcu DE; at ubi ſidus ad M aſcendit, ſemper videbitur è Telluris centro in conjunctione cum eâdem ſtellâ E, quæ nunc in P exiſtit. At è ſuperficie Telluris ex A ſcil. ſpectatum ſidus videtur in N, propiùs quidem fixæ quàm fuit, dum Horizontem occupabat; quare non in eodem loco cum fixâ D videbitur, à quâ diſtabit ſpatio N*d*, poſito arcu P*d* æquali ED. Hinc ſequitur, ſi ſidus aliquod eandem ſemper inter fixas conſervet poſitionem, neque diſtantias arcuales ab iiſdem mutare videatur, nulli Parallaxi ſenſibili erit obnoxium. Quin etiam ſi à fixis diſtantia quidem varietur, ſed mutatio ſit ea ſolùm, quæ motui ſideris proprio debetur, in illo caſu nulla quoque eſt Parallaxis ſenſibilis; ſin ſidus magis vel minus à fixâ aliquâ receſſerit, vel ei acceſſerit, quàm poſtulat motus ejus proprius, differentia illa erit Parallaxeôs effectus.

Parallaxium species. Parallaxis sideris in circulo verticali, mutationem in ejus loco inducit quoad reliquos Sphæræ circulos, efficitque ut ejus Longitudo, Latitudo, Ascensio Recta, & Declinatio diversæ videantur à veris, quæ è centro Telluris conspiciendæ erunt, unde quatuor præcipuè oriuntur Parallaxium species.

Tab. 35 fig. 2. Sit HO Horizon, cujus polus V, EQ Ecliptica, ejusque polus P, VA verticalis circulus per sidus transiens, cujus verus locus sit C, at visus sit D, in eodem verticali magis à vertice distans, Parallaxis altitudinis est arcus DC. Per polum Eclipticæ P, & sideris locum verum transeat secundarius Eclipticæ, seu circulus Latitudinis PCG, & G erit verus locus sideris ad Eclipticam reductus, punctumque G ejus Longitudinem veram ostendet; at per locum visum D traductus Latitudinis circulus PDH cum Eclipticâ conveniet in H puncto, quod erit sideris locus in Eclipticâ visus, arcus Eclipticæ GH, interceptus inter duos Latitudinis circulos, per verum & visum locum transeuntes, dicitur *Parallaxis Longitudinis.* *Parallaxis Longitudinis* *Parallaxis Latitudinis.* Sideris in C existentis vera Latitudo est CG; at cum in D videtur, Latitudo visa est DH; harum differentia CN *Parallaxis Latitudinis* vocatur.

Si sidus sit in circulo verticali, qui Eclipticam in nonagesimo gradu ab oriente puncto intersecat, hoc est, qui Eclipticæ sit perpendicularis *v. gr.* in circuli VE puncto *c*, Parallaxis Longitudinis nulla erit; nam cum circulus verticalis VE, in hoc casu Eclipticæ ad angulos rectos occurrit, per ejus polos transibit, idemque erit circulus Latitudinis, in quo existit verus & visus sideris locus, adeoque loci hi ad Eclipticam reducti in idem punctum incident, & in hoc casu Parallaxis Latitudinis coincidit cum Parallaxi Altitudinis.

Quadrans Orientalis Eclipticæ est, qui inter nonagesimum gradum & punctum ejus oriens intercedit. Occidentalis autem Quadrans est, qui inter nonagesimum & occidentem Eclipticæ gradum interjicitur. Sideris in orientali quadranti existentis Longitudo visa major est quàm vera: nam oriente sidere, Parallaxis illud magis in orientem deprimit,

primit. Sic in figurâ, locum in Eclipticâ visum signat punctum H, magis in orientem promotum quàm est locus verus G. At si sidus sit in Quadranti occidentali, Longitudo visa minor est quàm vera, quoniam Parallaxis in hoc situ sidus versùs occidentem detrudit.

Referat jam circulus EQ Æquatorem, P ejus polum, PVH Meridianum, VCA circulum Verticalem, per sidus transeuntem; in quo sit C locus sideris verus, D visus; sintque PCG, PDH Secundarii Æquatoris, sive circuli Declinationum per locum sideris verum & visum traducti, Æquatori occurrentes in G & H. Punctum G ostendet Adscensionem rectam sideris veram, H visam, quarum distantia GA est *Parallaxis Ascensionis rectæ*. Declinatio sideris vera est GC, visa DH, differentia Declinationum NC dicitur *Parallaxis Declinationis*. Si sidus sit ad orientem Meridiani, Ascensio recta visa major est verâ, si ad occidentem, fiet visa minor verâ; at cum sidus in Meridiano culminat, nulla est Parallaxis Ascensionis rectæ, propterea quòd idem Declinationis circulus per visum & verum locum transit.

Parallaxis Ascensionis rectæ.

Parallaxis Declinationis.

Varias excogitaverunt Astronomi methodos, ut siderum Parallaxes investigent; & ut exinde eorum distantiæ à Tellure innotescant. His enim cognitis, judicium aliquod de Amplitudine mundanâ ferre licebit. Modos aliquos, quos ad rimandas Parallaxes adhibuerunt Astronomi, liceat nunc vobis exponere.

Modus primus explorandi Parallaxim. TAB. 35. *fig.* 3.

Primò observetur sidus, quando est in eodem verticali circulo cum duabus stellis fixis, sit VB verticalis, in quâ simul videntur Fixæ C & D, & sidus S, cujus locus visus erit quoque in eundem verticali, qui sit E, unde si sidus nullum habeat motum proprium, eundem semper ad fixas C & D conservabit situm, eritque ejus locus verus in lineâ per fixas CD transeunte. Post aliquod tempus rursus observetur sideris positio respectu fixarum, quando scil. non in eodem verticali, sed potiùs in Circulo Horizonte æquidistante videntur, scil. sunt fixæ *c* & *d*, sitque locus sideris visus *e*, at verus erit in lineâ *dc*, quæ fixas conjungit: observentur di-

distantiæ fixarum & sideris à vertice, scil. arcus *d*V, *c*V, & *e*V. Capiantur etiam loci visi *e*, distantia *de* à fixâ *d*, & fixarum distantia *dc*. Locus verus sideris est in verticali V*e*, per locum visum transeunte, est etiam in lineâ *dc*, erit ergo in intersectione S. Adeoque Parallaxis sideris est *es*. In triangulo *d*V*c*: dantur omnia latera, quare innotescet angulus V*dc*: rursus in triangulo V*de*; dantur omnia latera, innotescet igitur angulus *d*V*e*, vel *d*VS. Denique in triangulo *d*VS, datur latus *d*V, distantia fixæ *d* à vertice observata cum angulis *d*VS & V*d*S, mox inventis; quare invenietur latus VS, quod ab V*e* ablatum, relinquit arcum S*e*, Parallaxim quæsitam.

Methodus secunda. Potest sideris Parallaxis hâc quoque ratione facillimè obtineri; nempe observetur, quando sidus est in aliquo verticali cum quâvis stellâ fixâ vicinâ, ejusque distantia à fixâ capiatur: deinde observetur rursus, quando sidus & fixa parem obtinent ab Horizonte altitudinem, harum distantiarum differentia erit quàm proximè sideris Parallaxis. Sit Horizon HO, vertex loci V, circulus verticalis VB, in quo observetur sidus in E, & fixa in D, locus autem sideris verus sit S, & SE Parallaxis. Altitudinum differentia DE erit sideris & Fixæ distantia visa: observetur deinde fixa in *d*, & sidus in loco viso *e*, in eâdem à vertice distantiâ, erit distantia sideris & fixæ *de*, quàm proximè æqualis veræ illorum distantiæ. Nam sit *s* locus sideris verus. Et quoniam Parallaxis *se* respectu arcûs V*e*, parva admodum est; erunt *ds* & *de* fere æquales, quod adéo verum est, ut si Parallaxis *se* foret unius gradûs, tamen *de* & *ds* vix uno minuto different. Si itaque instrumento observetur distantia *de*, notus erit arcus *ds*, ipsi quàm proximè æqualis; & est *ds* æqualis DS, in primâ observatione; à DS itaque auferatur arcus notus DE, & restabit SE Parallaxis sideris in E observati.

Tab. 35. fig. 4.

Modus tertius. Tab 35. fig. 5. Phænomeni alicujus Parallaxis inveniri quoque potest, observando ejus Azimuthum, distantiam à vertice, & tempus inter observationem, & ejus ad Meridianum appulsum. Sit HVPO Meridianus, in quo sit vertex V, Polus P, & sit

HO

HO Horizon, VB circulus Verticalis, per sideris locum verum S & visum E transiens. Traducantur quoque per locum verum & visum circuli Declinationum PSPE; observeturque sideris Azimuthus BO, vel angulus BVO, eo modo, quo in Lectione de Refractione siderum Azimuthos capere docuimus. Observetur quoque sideris distantia a vertice visa VE, & notetur momentum temporis, quo observatio facta est. Expectetur deinde, dum sidus ad Meridianum appulerit, & momentum appulsûs accuratè definiatur, quod fit vel per Horologium Automaton, vel per Altitudinem fixæ alicujus notæ. Temporis intervallum inter observationem primam sideris in Verticali, & ejus appulsum ad Meridianum, in gradus & minuta Æquatoris conversum, dabit arcum Æquatoris ÆC, qui est mensura anguli VPS. Itaque in triangulo VPS, datur latus VP, distantia Poli a vertice, & anguli VPS & PVS, unde innotescet arcus VS, vera distantia sideris a vertice, quâ ex observatâ VE sublatâ, restabit arcus SE Parallaxis quæsita.

Notandum est, ut convertatur tempus in gradus & scrupula Æquatoris, reducendum est prius tempus in horas & minuta primi mobilis, quæ horis Solaribus sunt aliquantulum minores; vel si adhibeantur horæ Solares, pro earum singulis numerandi sunt in Æquatore gradus 15. minut. 2, secund. 27, tert. 51; & proportionaliter pro particulis adjunctis.

Sit HO arcus Horizontis, AM Meridianus, in quo sit P polus, V vertex loci, sideris locus visus E, ante appulsum sideris ad Meridianum observetur ejus a vertice distantia VE, sideris locus verus sit S, Parallaxis SE, inveniatur Azimuthus EVM; & notetur tempus observationis; deinde post appulsum sideris ad Meridianum, observetur illud iterum, quando eandem obtinet a vertice distantiam V*e*, unde cum visæ distantiæ sunt æquales, erunt quoque veræ distantiæ VS, V*s* æquales. Notetur intervallum temporis inter primam observationem & secundam; hoc tempus in gradus & minuta Æquatoris conversum, dabit angulum SP*s*, cujus dimidium est angulus SPV. Itaque in triangulo SPV, dantur an- *Modus quartus.* *TAB 35. fig. 6.*

guli SPV & SVP, qui est complementum Azimuthi ad 180 gradus, item latus VP distantia verticis & Poli; exinde innotescet arcus VS, distantia vera sideris a vertice, quæ si ab VE observatâ distantiâ auferatur, dabit SE Parallaxim quæsitam.

Modus quintus. Hæ praxes ex observatione Azimuthi pendent; at absque illius observatione Parallaxeôs cognitio obtineri potest, per Ascensiones sideris veras & visas, ex quibus Azimuthi calculo eliciuntur. Nam observentur distantiæ sideris a duâbus quibusvis fixis, quarum distantia & Ascensiones rectæ notæ sunt; & exinde quæratur sideris Ascensio recta, uti in Lectione XX docuimus; deinde cum sidus ad Meridianum pervenerit, rursus capiatur ejus distantia a duâbus fixis, ex quibus, habebitur eâdem methodo, Ascensio recta sideris vera, seu punctum, ubi circulus Declinationis per verum sideris locum transiens Æquatori occurrit.

Tab. 36. fig. 1. Ex Ascensione rectâ visâ sideris in Verticali VB observatâ, & puncto Æquatoris culminante, dabitur angulus VPE, quare in triangulo VPE, ex datis lateribus VP, VE, & angulo VPE, inveniri potest angulus PVE, qui est Azimuthalis angulus; datâ autem sideris Ascensione verâ, quæ in Meridiano observata fuit, & puncto Æquatoris culminante, dabitur angulus VPS, unde in triangulo VPS, ex datis angulis PVS & VPS, & latere VP dabitur latus VS, vera sideris a vertice distantia, quæ si ab observatâ VE auferatur, relinquetur SE Parallaxis sideris.

Ad Ascensiones siderum rectas determinandas, non satis fida est in subtili hoc negotio Temporis observatio, quæ fit Penduli vibrantis ope; si enim unius scrupuli secundi error in numerando commissus fuerit, hic error producet in Ascensione rectâ errorem 15. scrup. secund.

Ut habeatur vera sideris Ascensio recta, non opus est ejus appulsum ad Meridianum observare; sed melius perficitur per duas observationes, quarum una peragitur in Orientali coeli quadrante; altera in Occidentali, at in utrâque par sit altitudo sideris visa. Nam si capiatur distantia sideris a duâbus fixis notis, in orientali coeli plagâ, elicietur

exin-

exinde ejus Aſcenſio recta viſa, quæ verâ major erit; quoniam Parallaxis deprimit ſidus versùs orientem; rurſus cum ſidus ad eandem à vertice diſtantiam, in Occidentali plagâ pervenerit, capiatur ſimiliter ejus Aſcenſio recta viſa, quæ tantundem minor erit verâ, quantùm priòr veram ſuperabat. Nam Parallaxis in æquali altitudine tantùm ſidus ad occidentem deprimit, quantùm priùs versùs orientem illud protrudebat. Adeoque ſi Aſcenſionum viſarum differentia biſecetur, & ſemidifferentia minori addatur, vel à majori auferatur; habebitur vera ſideris Aſcenſio: adeoque punctum Æquatoris, ubi circulus Declinationis per ſidus tranſiens eidem occurrit; hoc eſt, punctum C ſed ex dato momento temporis obſervationis primæ, datur Aſcenſio recta medii coeli, ſeu punctum Æquatoris culminans Æ, unde dabitur Arcus ÆC, qui metitur angulum ÆPC, unde in triangulo, VPS, ex datis VP latere, & angulis PVS & VPS, invenietur, ut prius, VS diſtantia ſideris à vertice, quæ ex viſa ablata, relinquit arcum SE Parallaxim Altitudinis, quæ erat invenienda. *Tab. 35. fig. 5.*

Modus Sextus. Omnium optimè & facillimè exquiritur Parallaxis Aſcenſionis rectæ, ſi adhibeatur Teleſcopium, in cujus foco ſunt quatuor fila ad angulos ſemirectos ſe interſecantia, ut in Lectione XX. expoſuimus; & Teleſcopium dirigatur versùs ſidus, atque continuò vertatur, donec in filo tranſverſo AB videatur, ejuſque motus apparens diurnus fiat ſecundùm hujus fili directionem; in quo ſitu, filum AB exponet portionem paralleli, quem percurrit ſidus, & filum CD illud ad angulos rectos interſecans, circulum aliquem horarium repræſentabit. Notetur deinde temporis momentum, quando ſidus in circulo horario CD videtur; dehinc Teleſcopio immoto manente, obſervetur tempus, quando alia aliqua ſtella, cujus nota eſt Aſcenſio recta, ad eundem circulum horarium appulerit. Intervallum temporis inter ſideris & Fixæ appulſus ad circulum horarium, in gradus & minuta Æquatoris converſum, dabit differentiam inter Aſcenſionem rectam fixæ, & ſideris Aſcenſionem viſam. Cum verò ſidus ad Meridianum appulerit, rurſus Teleſcopio obſer- *Tab. 36. fig. 2.*

servetur, & eâdem methodo quæratur ejus Ascensio recta visa, quæ in Meridiano coincidit cum verâ. Unde dabitur punctum Æquatoris, ubi Declinationis circulus per verum locum sideris Æquatori occurrit; datur itaque sideris Ascensio recta vera, & datur quoque visa, unde dabitur harum differentia, seu Parallaxis Ascensionis rectæ, quæ est angulus SPE. Et quoniam datur Ascensio visa sideris, & punctum Æquatoris tempore observationis culminans, datur Arcus Æquatoris inter hæc duo puncta interceptus, qui est mensura anguli VPE; itaque in triangulo VPE, dantur latera VP, VE, & angulus VPE, quare innotescet angulus PVE: ab angulo VPE auferatur angulus SPE, Parallaxis Ascensionis rectæ, & dabitur angulus VPS; denique in triangulo VPS, ex datis angulis PVS & VPS, & latere VP, innotescet latus VS, vera sideris à vertice distantia, quæ ex visâ ablata, relinquet SE sideris Parallaxim.

TAB. 36. fig. 1.

Investigatio Parallaxeos quando sidus habet motum proprium.

Si sidus motum habeat proprium, ejus Ascensio recta per illum motum continuò mutabitur, nisi in aliquo Declinationum circulo feratur; adeoque habenda est ratio istius mutationis; quod fiet, si observetur sideris in Meridiano existentis Ascensio recta, & cum proximo die rursus ad Meridianum pervenerit, iterum observetur ejus Ascensio recta, Differentia dabit mutationem Ascensionis rectæ, quæ tempori intermedio competit; nam in Meridiano existente sidere, nulla est Parallaxis Ascensionis rectæ. Ex his Observationibus cognoscetur motus diurnus proprius sideris secundùm Æquatorem, & ex motu diurno dabitur motus pro quolibet tempore intermedio: *v gr.* si motus diurnus secundum Æquatorem sit 30. min. hoc est, si sideris locus in Æquatore quotidie promoveatur spatio 30 min. sitque tempus inter observationem primam in orientali quadranti, & secundam in Meridiano factam æquale sex horis, huic temporis spatio debetur motus septem ½ minutorum. Supponamus jam differentiam inter Ascensionem rectam in Verticali, & in Meridiano observatam, esse 20. minutorum, horum septem cum dimidio motui proprio sideris debentur; unde Parallaxis Ascensionis rectæ erit duodecim cum dimidio minutorum.

Si-

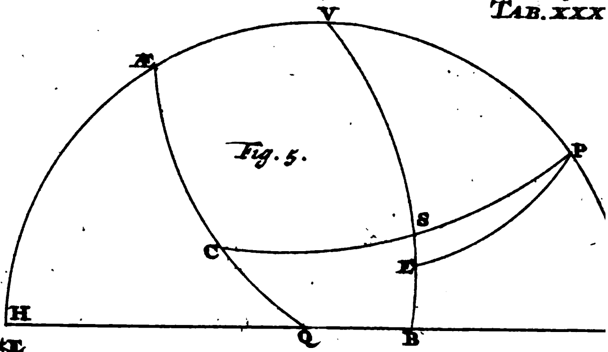
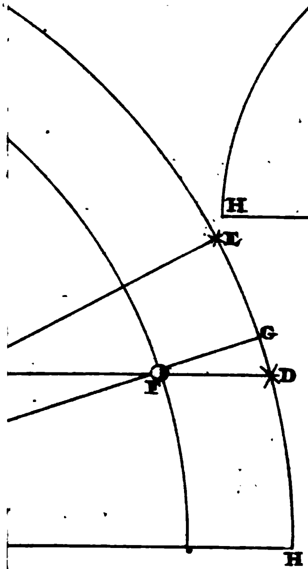


Fig. 5.



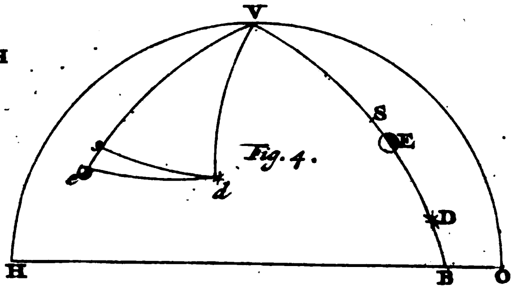
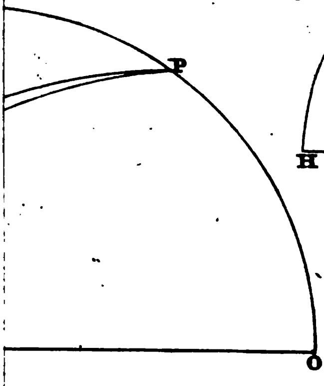
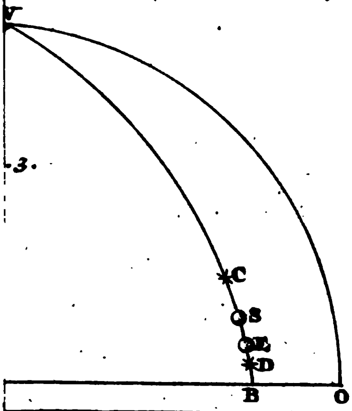


Fig. 4.





3.

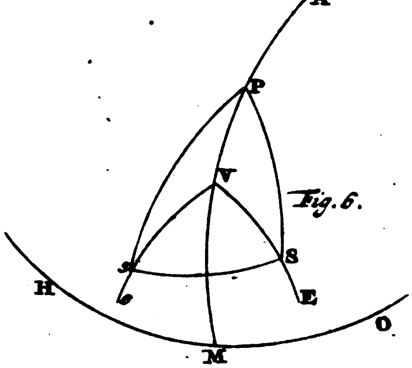


Fig. 6.

Simili methodo, per Longitudines ſideris viſas & veras, inveſtigari poſſunt Parallaxes; Viſa Longitudo habetur obſervando ſideris diſtantias à duabus fixis, quarum loca nota ſunt; vera autem Longitudo habetur, capiendo diſtantias a fixis notis, cum ſidus eſt in nonageſimo Eclipticæ Gradu; ubi Longitudo viſa coincidit cum verà.

His & ſimilibus methodis, ſi ſidus aliquod habeat Parallaxim ſcrupulo primo non minorem, illa inveniri poteſt. In Lunâ quidem ſatis notabilis deprehenditur Parallaxis, quæ in Horizonte ſæpe gradui & amplius æquatur. Sed præterea non deſunt aliæ Methodi Lunæ peculiares, quibus ejus Parallaxis habetur, quarum unam hic indicare liceat.

Parallaxis Lunæ inveſtigatio per methodum peculiarem.

In Eclipſi Lunæ, obſervetur quando cornua in eodem verticali circulo videntur, & in eo momento capiatur utriuſque cornu Altitudo; Altitudinum ſemi-differentia ad Altitudinem humilioris cornu addita, vel ab Altitudine ſublimioris ablata, dabit Altitudinem viſam medii inter cornua puncti, quæ quàm proximè eſt æqualis Altitudini centri Lunæ. Sed vera Altitudo centri Lunæ eſt quàm proximé æqualis Altitudini centri Umbræ ſupra Horizontem. At datur Altitudo centri Umbræ, quia datur pro illo temporis momento locus Solis in Ecliptica, & proinde punctum Eclipticæ huic loco oppoſitum, in quo eſt centrum Umbræ, cujus proinde Altitudo pro tempore dato computari poteſt; nam eſt illa æqualis depreſſioni Solis infra Horizontem in eodem momento; quare dabitur vera Lunæ Altitudo; ſed datur per Obſervationem Altitudo viſa, unde & earum differentia, quæ eſt Lunæ Parallaxis, datur.

Quoniam Lunæ diſtantia à centro Telluris pro vario ejus ab Apogeo receſſu, continuò minuitur, neceſſe eſt, ut Parallaxis ejus Horizontalis in eâdem ratione continuò augeatur, ſicuti per acceſſum ad Apogeum minuatur, ideo Tabulam condunt Artifices, quæ Lunæ Parallaxim Horizontalem pro ſingulis ejus Anomaliæ gradibus oſtendit.

Solis Parallaxis methodis prædictis non poteſt obtineri.

Quamvis methodi ſuperiùs traditæ Lunæ Parallaxim ſatis notabilem eſſe manifeſtant, illarum tamen nullæ ſufficiunt

 ad

ad Solis Parallaxim explorandam; ea enim tam exigua eſt, ut obſervationes requiſitæ tam accuratè capi non poſſint, quæ ipſam determinent; & error in obſervando vix evitari queat, qui non toti Solis Parallaxi æqualis evadat.

Hic obſervationum defectus Veteres impulit Aſtronomos ad alias Soli peculiares ineundas vias, quibus ejus Parallaxim eruerent; quæ quidem methodi, etſi maximum acumen & ingenium veterum oſtendunt, parum tamen ſunt idoneæ in tam ſubtili indagine, ad rem ipſam inveſtigandam. Utiles tamen ſunt ad demonſtrandum, diſtantiam Solis a Tellure immenſam eſſe reſpectu diſtantiæ Lunæ ab eâdem, ideoque à propoſito noſtro non alienum erit eas vobis exponere.

Hipparchi methodus pro inveniendâ Parallaxi Solis. TAB. 22. *fig.* 2.

Prima Methodus eſt Hipparchi, eamque adhibuêre Ptolemæus ejuſque ſequaces, & alii Aſtronomi non pauci. Nititur autem in obſervatione Eclipſeôs Lunaris, & Principia ex quibus pendet hæc ſunt: Primò in Eclipſi Lunari, Parallaxis Solis Horizontalis æqualis eſt differentiæ inter Solis ſemidiametrum Apparentem, & ſemiangulum Coni Umbroſi. Quod hac ratione facile oſtenditur. Circulus AFG repræſentet Solem, DHE Tellurem, ſitque DMH Conus Umbroſus, DMC ſemiangulus Coni. Ducatur a centro Solis S recta SD Tellurem tangens, Erit angulus DSC ſemidiameter apparens Telluris e Sole ſpectata, quæ æqualis eſt Solis Parallaxi Horizontali. Et angulus ADS eſt apparens ſemidiameter Solis e Terra viſa. Eſt autem per 32. *Elem. Primi*, angulus ADS externus æqualis angulis DMS & DSM internis; adeoque angulus DSM æqualis eſt differentiæ angulorum ADS & DMS. Secundo ſemiangulus Coni æqualis eſt differentiæ Parallaxis Horizontalis Lunæ, & ſemidiametri apparentis Umbræ ad Lunæ cælum; ſit enim CDE Tellus, CME Conus umbroſus, qui plano tranſverſe ad diſtantiam Lunæ ſecetur; ſectio erit circulus, cujus ſemidiameter eſt FG, quæ ex Telluris centro videtur ſub angulo GTF; ſed per 32. *Elem. Primi* eſt angulus CFT æqualis angulis FMT & GTF; Adeoque angulus FMT æqualis eſt differentiæ angulorum CFT & FTG; ſed eſt angulus CFT ille ſub quo Terræ ſemidiameter e Lunæ cælo videtur, hoc eſt

TAB. 22. *fig* 5.

est æqualis Parallaxi Lunæ Horizontali. Et angulus FTG est semidiameter apparens Umbræ, unde patet semiangulum Coni esse differentiam inter Parallaxim Horizontalem Lunæ, & Umbræ semidiametrum apparentem. Quare si Solis semidiametro apparenti addatur semidiameter apparens Umbræ, & a summa aufertur Parallaxis Horizontalis Lunæ, restabit Parallaxis Horizontalis Solis, quæ proinde ex illis accurate datis habebitur. Verum horum datorum nullum tam accurate innotescit, ut sufficiant ad Parallaxim determinandam; nam ex parvis (in his angulis capiendis) erroribus, qui vix evitari possunt, ingentes prodibunt errores in Parallaxi Solis, & maximæ discrepantiæ in ejus distantia a Tellure quæ ex illa pendet. Exempli gratia, Parallaxim Lunæ Horizontalem ponamus esse min. prim. 60. sec. 15. Solis semidiam. min. 16, & semidiametrum Umbræ 44. min. prim. 30. secund. Ex his colligitur Parallaxim Solis esse 15. secund. & distantiam ejus à Tellure æquari 13000. semidiametris Terræ; At si error commissus fuerit, in determinanda semidiametro Umbræ, sitque ille tantum 12. secund. in defectu, & sane semidiameter Umbræ vix tanta præcisione obtineri potest; hoc est, si loco 44′: 30′ capiantur 44′: 18″, reliquis manentibus, prodibit Parallaxis Solis 3. secund. & ejus distantia à Tellure æqualis fere 70000. semidiametris Terræ, plus quam quintuplo major quam prior. Si vero in excessu peccatum fuerit, atque semidiameter Umbræ ponatur 44′: 42″. reliquis manentibus, elicietur Parallaxis 27. minutorum secundorum, & distantia Solis 7700. semidiametrorum Terrestrium, fere decuplo minor quam per æqualem errorem in defectu elicitur. Si error in defectu admissus fuerit 15. secund. Prodibit Solis Parallaxis nihilo æqualis, ejusque distantia infinita. Quare cum ex tantillis erroribus, Parallaxis & distantia Solis tam diversæ prodeunt, manifeste patet, hac methodo veram Solis Parallaxim ejusque distantiam obtineri non posse.

Hipparchi methodus non sufficit ad Solis parallaxim explorandam.

Cum igitur angulus ad Solem, quem Terræ semidiameter subtendit, tam exiguus sit, ut observatione deprehendi non possit, excogitavit *Aristarchus Samius* methodum qua angulum

Aristarchi methodus.

lum ad Solem, quem Lunaris orbitæ ſemidiameter ſubtendit, determinare conatus eſt. Hic enim angulus ſexaginta circiter vicibus priore major eſt; Ad hujus anguli inveſtigationem ſequentia ponit principia.

Oſtenſum fuit in Lectione de Lunæ Phaſibus, quod ſi per Lunæ centrum tranſeat planum ad quod recta, Solis & Lunæ centra conjungens, ſit normalis, hoc planum Hemiſphærium Lunæ illuminatum ab obſcuro dividere; adeoque ſi planum hoc tranſeat per ſpectatoris oculum in Tellure, Luna tunc dimidiata ſeu biſecta apparebit, & recta a Terra ad Lunæ centrum ducta erit in plano illuminationis; adeoque ad rectam quæ Solis & Lunæ centra conjungit perpendicularis erit. Sit S Sol, T Terra, AL*q* Quadrans orbitæ Lunaris, recta SL a Sole ducta Lunæ orbitam tangat in L, & erit angulus TLS rectus; adeoque cum Luna in L videtur, dichotoma apparet: Si itaque obſervetur momentum Temporis cum Luna biſecta videtur, atque eodem momento, capitur angulus LTS elongatio Lunæ a Sole, dabitur hujus anguli complementum ad rectum angulus LST, ſed datur latus TL, unde in triangulo SLT rectangulo dantur anguli, & latus TL, ex quibus dabitur latus ST diſtantia Solis a Tellure.

Tab. 36. fig. 3.

Ariſtarchi methodus non idonea eſt ad inveniendam Solis diſtantiam.

Verum maxima eſt difficultas in determinando temporis momentum, quando Luna eſt in vera Dichotomia, nam per ſpatium temporis ante, & poſt Dichotomiam notabile, immo in ipſa Quadratura, ejus Phaſis a phaſi Dichotomiæ diſtingui nequit, uti obſervatio nos docet, & hac etiam ratione oſtenditur. In Lectione de Lunæ Phaſibus demonſtratum a nobis eſt, Diametrum Lunarem eſſe ad ejus partem a Sole illuſtratam, & a nobis viſam, ut Diameter circuli ad ſinum verſum elongationis Lunæ a Sole quamproxime; accurate autem, ut Diameter circuli ad ſinum verſum exterioris anguli ad Lunam, in triangulo, quod lineæ jungentes Solis Terræ & Lunæ centra faciunt; Uti in Lectione de Veneris Phaſibus oſtenſum fuit. Ponamus jam tempore veræ Dichotomiæ angulum LST eſſe min. prim. 15, Et ſemidiametrum orbis Lunaris æquari 60. ſemidiametris Telluris, in-

inde elicietur distantia Solis æqualis 13758. semidiametris Terræ. His positis; sit primo Luna in Quadratura in *q*; hoc est, sit angulus *q* TS rectus, & erit exterior angulus trianguli ad Lunam, æqualis 90. grad. min. 15, cujus sinus versus æqualis est radio, una cum sinu recto min. 15. Itaque ut Diameter circuli ad Radium una cum sinu recto minutorum 15. sic Lunæ Diameter ad partem ejusdem a Sole illustratam e Tellure visam; quare capiendo dimidia Antecedentium, & dividendo, erit ut Radius ad sinum rectum min. 15, ita semidiameter Lunæ, ad excessum quo pars illustrata e Terra visa semidiametrum superat; est autem sinus min. 15, partium 436. qualium Radius est 100000, & apparens Lunæ semidiameter est circiter min. 15. Quare fiat ut Radius 100000. ad 436. ita 15. min. ad quartum, qui prodit minor quam quatuor scrupula secunda; At hæc quantitas adeo exigua est, ut omnem sensum effugiat; adeoque Luna in Quadratura (cum ejus Phasis tantilla quantitate Dichotomiam superat) adhuc ut Dichotoma apparebit. Quod si vera Dichotomia in ipsam Quadram incidisset, distantia Solis fuisset infinita, in illo enim casu, angulis S*q*T & ST*q*, existentibus rectis, lineæ ST, S*q* essent parallelæ & non concurrerent nisi ad distantiam infinitam.

Sit secundò elongatio Lunæ à Sole seu angulus STL 89. gr. min. 30. in illo casu, erit angulus exterior ad Lunam grad. 89. min. 45. æqualis scil. angulis STL&LST simul, cujus sinus versus æqualis est radio, dempto sinu recto min. 15: cumque sit ut Radius circuli ad sinum versum anguli exterioris ad Lunam, hoc est, ad Radium sinu recto min. 15. diminutum; ita semidiameter Lunæ ad partem ejus à Sole illustratam & à nobis visam, erit dividendo Radius ad sinum min. 15. ita semidiameter Lunæ seu 15. min. ad excessum quo eadem semidiameter partem illustratam & visam superat, quæ itaque ut in priore casu erit æqualis quatuor scrupulis secundis; atque Luna tantilla parte à Phasi Dichotomiæ deficiens, tanquam Dichotoma videbitur, seu ejus Phasis a Dichotomiæ Phasi distingui nequit. Si itaque in illa apparenti Phasi ponatur momentum Dichotomiæ veræ; hoc eſt, cum 30. min. à Quadratura diſtat, elicietur inde diſtantia Solis æqualis 6876. ſemidiametris terreſtribus.

Obſervationes teſtantur Lunam cum à Quadratura 30. min. diſtat tanquam Dichotomam apparere, & ſub ipſa Quadratura, ejus Phaſin à Phaſi Dichotoma diſtingui non poſſe, immo Dichotoma apparet Luna optimo Teleſcopio viſa, poſtquam Quadraturam ſuperavit, ut ipſe Ricciolus agnoſcit in Almageſti p. 734. Itaque Luna ad minimum per ſpatium unius horæ, tanquam biſecta videbitur, cujus temporis momentum quodlibet eodem jure quo aliud quodvis tanquam momentum veræ Dichotomiæ aſſumi poteſt; & pro infinitis diverſis quæ aſſumi poſſunt temporum momentis, infinitæ diverſæ elicientur Solis à Terra diſtantiæ. Hinc manifeſte patet, diſtantiam Solis accurate hac methodo obtineri non poſſe.

Cum incertum ſit veræ Dichotomiæ momentum, certum tamen ſit Phaſin illam ante Quadraturam accidere; Ricciolus aſſumit articulum temporis medium inter tempus quo phaſis Lunæ ſit dubia & momentum Quadraturæ. Sed rectius feciſſet, ſi aſſumpſiſſet tempus medium inter Phaſim dubiam quando primo Luna cava videri deſiit, & tempus antequam primo convexa apparere incipit, quod tempus contingit poſt Quadraturam, hac ratione Tellurem ad majorem à Sole ſemoviſſet diſtantiam, quam eſt illa quæ ex ejus calculo elicitur.

Non opus eſt hanc methodum ad Dichotomiæ phaſim alligari, nam in alia qualibet phaſi vel à Dichotomia deficiente; vel illam ſuperante, poſſumus Solis diſtantiam inveſtigare æque accurate ac in Dichotomia. Obſervetur enim optimo Teleſcopio Phaſis Lunæ & eodem temporis momento ejus elongatio à Sole, dabiturque per obſervationem pars ſemidiametri Lunæ illuſtrata à nobis viſa, ſi hæc à ſemidiametro deficiat, ab illa auferatur, ſin ſuperet, ſemidiameter Lunæ ab illa ſubſtrahatur & notetur reſiduum. Fiatque ut ſemidiameter Lunæ ad hoc reſiduum, ita Radius ad quartum, hic erit ſinus anguli qui ad rectum additus,

tus,

tus, vel ab eo ablatus, dat angulum exteriorem trianguli ad Lunam, sed datur Angulus ad Tellurem, qui est Elongatio observatione cognita, quare hic ab exteriore angulo ablatus dabit angulum ad Solem; quare in triangulo SLT dantur omnes anguli, & latus TL, ex iis innotescet ST, distantia Telluris à Sole. Sed difficile est observare accurate quantitatem Phasis Lunaris, ita ut non in aliquibus secundis error admittatur; adeoque neque hac methodo satis præcise obtineri potest Telluris à Sole distantia. Ex similibus autem observationibus certum est, Solem longius 7000. semidiametris Telluris ab illa distare.

Certius cognoscitur Parallaxis Solis per Parallaxes Martis & Veneris.

Cum itaque tanta sit Solis distantia, ut neque per Eclipses, neque per Lunæ Phases, ejus cognitio obtineri possit, ad Planetarum Parallaxes Martis scil. aut Veneris investigandas confugiunt Astronomi, quæ si darentur, Solis quoque Parallaxis & distantia per se inscrutabiles, facile elicerentur. Nam ex Theoria motuum Telluris & Planetarum, dantur pro quolibet temporis momento, ratio distantiarum Solis & Planetæ à Terra; & Parallaxes Horizontales sunt in harum distantiarum ratione reciproca; quare si detur Parallaxis Planetæ cujusvis, dabitur quoque Parallaxis Solis.

Mars autem in situ Achronichio, hoc est, Soli oppositus, Telluri plusquam duplo propior est quam Sol, unde ejus Parallaxis plusquam duplo major erit: at Venus, cum est in conjunctione cum Sole inferiore, Terris fere quadruplo est vicinior quam Sol, ejusque proinde Parallaxis in eadem ratione major erit: quare etsi exigua Solis Parallaxis sit sensibus inobservabilis, Veneris autem & Martis duplo vel quadruplo majores Parallaxes possunt oculis nostris manifeste se prodere. In perscrutanda Martis Parallaxi in situ Achronichio, non parvam impenderunt operam celeberrimi nostri ævi Astronomi. Eandemque circiter 25. scrupulorum secundorum, saltem non majorem pro certo statuerunt; unde facili negotio colligetur Solis Parallaxim non majorem esse $12\frac{1}{2}$ secundorum scrupulorum; & inde prodit distantia Solis à Terra circiter 17200. Telluris semidiametris æqualis.

Ex observatione Veneris per Solis Discum transcurrentis, quod Anno 1761. continget, methodum exposuit Dominus Hallejus (cui in primis Astronomia plurimum debet) qua Parallaxis Solis ejusque distantia satis præcise, scil. intra quingentesimam sui partem obtineri possit; cujus itaque vera quantitas ad illud tempus dubia manebit.

Quo pacto Lunæ Parallaxis ad datum tempus calculo innotescat. Quoniam methodus ab Astronomis tradita, qua Eclipses Solis prædicentur, postulat, ut Lunæ Parallaxes tam in Longitudine quam Latitudine calculo innotescant; quinetiam quotiescunque locus Lunæ in cælo observatus cum eo, qui Tabulis elicitur ad comprobandam Lunæ Theoriam comparandus sit, necesse est ut locus verus reducatur ad visum, quod fieri non potest, nisi per Parallaxeos calculum. Convenit, ut modum exponamus, quo Lunæ Parallaxis ad datum quodlibet temporis momentum calculo innotescat.

TAB. 36. fig. 4. Primo ex Tabulis Astronomicis, computetur locus Lunæ in Ecliptica, ad datum temporis momentum. Et in figura sit HO Horizon, HZO Meridianus, Z vertex; EC Ecliptica, in qua sit locus Lunæ, ex Tabulis Astronomicis notus L; sitque primo Lunæ Latitudo nulla. Ex vertice Z cadat in Eclipticam circulus Latitudinis ZN, erit punctum N nonagesimus Eclipticæ gradus. Quoniam datur Recta Solis Ascensio, & ex hora data, distantia Solis æquatoria à Meridiano, dabitur punctum Æquatoris culminans. Quod est Ascensio recta medii cæli, seu puncti Eclipticæ quod sub Meridiano jacet; unde & hoc Eclipticæ punctum dabitur, sicuti angulus ZEN Eclipticæ cum Meridiano, quod fiat vel per calculum à nobis in Lectione de Doctrina Sphærica explicatum, vel per Tabulas Astronomicas; unde dabitur arcus Eclipticæ EL. Sed datur arcus EÆ declinatio medii cæli seu puncti E, datur etiam ZÆ, quare dabitur arcus ZE; itaque in triangulo rectangulo ZNE, datur latus ZE, cum angulo ZEN; quare invenietur EN, & punctum N seu nonagesimus Eclipticæ gradus, & ZN ejus à vertice distantia, cujus complementum NA est mensura anguli Horizontis & Eclipticæ. Et quoniam datur locus Lunæ L, datur arcus NL. In triangulo

gulo itaque ZNL rectangulo, dantur latera ZN & NL, inde invenietur angulus ZLN, qui angulus Parallacticus dicitur, & latus ZL distantia Lunæ à vertice. Fiat ut Radius ad sinum arcus ZL ita Parallaxis Lunæ Horizontalis è Tabulis eruenda ad Parallaxim ejus in L, quæ itaque invenietur, sit illa OL; ab O in Eclipticam cadat perpendicularis O*m*. In triangulo exiguo LO*m* quod pro rectilineo haberi potest, datur præter angulum rectum, latus LO, & angulus OL*m* æqualis angulo ZLN; quare dabitur arcus L*m* Parallaxis Longitudinis, & O*m* Parallaxis Latitudinis, quæ erant inveniendæ. *Angulus Parallacticus quis.*

Habeat jam Luna Latitudinem aliquam, ita ut ejus locus in Ecliptica sit punctum L, sed in circuli Latitudinis LP, puncto P. Et quoniam angulus NLP rectus est, & datur angulus NLZ, dabitur ejus complementum ZLP. In triangulo ZLP, dantur duo latera scil. ZL prius inventum & LP Latitudo Lunæ, & angulus ZLP, quare invenietur latus ZP, cum angulo ZPL: fiat ut Radius ad sinum arcus ZP ita Parallaxis Lunæ Horizontalis ad quartum, sit is P*q*, hic arcus erit Parallaxis Lunæ in circulo Altitudinis. Sit *qd* arcus Eclipticæ parallelus & in triangulo exiguo *d*P*q*, quod pro plano haberi potest, datur præter angulum rectum, latus P*q* cum angulo *d*P*q* complemento anguli noti ZPL ad duos rectos; quare dabitur P*d* Parallaxis Latitudinis & *qd* Parallaxis Longitudinis. Nam ob parvam Lunæ Latitudinem paralleli arcus *dq*, inter duos circulos Latitudinis interceptus vix differt ab arcu Eclipticæ qui iisdem interjicitur.

LECTIO XXII.

Theoria Motus Telluris Annui.

Hucusque generales Planetarum affectiones recensuimus, & Phænomena quæ ex illorum motu, & motu Telluris conjunctim oriuntur, explicavimus. Transeamus nunc ad particulares motuum Theorias contemplandas, quibus singulorum Periodi, à Sole distantiæ, Orbitarum species, *Planetarum particulares Theoriæ sunt inveniendæ.*

& Positiones determinantur; ex quibus datis, eorum loca in Zodiaco, ad datum tempus computari possunt. Et quoniam Planetarum Theoriæ in motu Telluris fundantur, & ejus ope investigantur; convenit ut à Theoria Terræ incipiamus.

Hæ à Theoria Terræ pendent.

Locus Terræ per observationem loci apparentis Solis cognoscitur.

Ostensum fuit in Lectione septima, quod ex Telluris motu circa Solem, oritur apparens Solis motus in Ecliptica annuus, & quod Sol ex Tellure conspectus videtur eundem in cælo circulum describere, Eclipticam scil. quem spectator in Sole constitutus Tellurem percurrere conspiceret. Locus autem Telluris è Sole spectatus semper è diametro opponitur ei, in quo Sol è Terra visus in Ecliptica apparet; adeoque quando Sol à nobis videtur in ♈, Tellus revera signum ♎ occupat; cum hic in ♋ cernitur, illa ♑ tenet. Adeoque ex loco Solis apparente, observatione cognito, semper habebitur Locus Telluris in propria orbita è Sole visus.

Puncta Æquinoctialia & Solstitialia.

Cum Ecliptica Æquinoctialem secet in duobus punctis oppositis, Sol bis in quolibet anno, in Æquinoctiali circulo videbitur, cum scil. ad sectiones motu apparenti pervenerit; in reliquo omni anni Tempore, vel in Boream, vel in Austrum declinare videbitur; maxime autem ab Æquatore distat, in punctis Eclipticæ ab utraque sectione æque distantibus; hoc est, 90. gradibus ab utraque sectione remotis; in quibus dum Sol videtur, Declinationem per aliquot dies vix mutare observatur, diesque iidem fere manent longitudine. Et proinde puncta illa quæ sunt initium ♋ & initium ♑ Solstitia dicuntur. Sicuti puncta Intersectionum Æquinoctialis & Eclipticæ, Æquinoctia appellantur, quoniam Sol in iis visus, dies noctibus æquales efficit.

Dies non sunt noctibus æquales nisi Sol in meridie puncta Æquinoctialia ingrediatur.

Cum Sol continuo in Ecliptica incidere, & singulis diebus gradum circiter unum versus orientem promoveri videtur; in punctis Æquinoctialibus nunquam morabitur, & eodem temporis momento, quo illa attinget, eadem relinquet. Adeoque licet dies in quo Æquinoctium celebratur, Æquinoctialis dicitur; quod dies ille nocti æqualis censetur, hoc tamen præcise verum non est, nisi Æquinoctium in in ipsa Meridie celebretur; nam si Sol oriens æquinoctium vernale ingressus fuerit, vespere occidens spatio 12. minutorum ab æquinoctio declinabit; adeoque dies ille erit duodecim horis longior, & nox sequens brevior. Sed differentia tantilla est, ut in rebus physicis negligi possit.

Temporis momentum, quo Sol æquinoctia ingreditur, ex data Latitudine loci, sic observatione innotescet. In ipso die Æquinoctii aut circiter, instrumento affabre facto, & in gradus & minuta minutorumque partes diviso, capiatur Solis Altitudo Meridiana; si hæc æqualis fuerit Altitudini Æquatoris, seu complemento Latitudinis loci, Æquinoctium illo ipso momento celebratur, sin differant, notetur differentia, erit illa Solis Declinatio. Die deinde sequente; rursus observetur Solis Altitudo Meridiana, & exinde eliciatur ejus Declinatio, si Declinationes sic inventæ fuerint diversi nominis, puta una Australis, altera Borealis, cadet Æquinoctium in aliquo temporis intermedii puncto, inter observationes, elapsi; sin ejusdem sint nominis, nondum factum erit Æquinoctium, vel præteritum: ex his declinationibus observatis, momentum Æquinoctii hac ratione exquiritur; sit CAB portio Eclipticæ, ÆAQ Æquatoris arcus, eorumque intersectio punctum A, sit CÆ Declinatio Solis in prima observatione, ED ejus Declinatio in secundâ, erit CE motus Solis in Ecliptica, uni diei competens. In triangulo Sphærico rectangulo CÆA, datur angulus A, qui est Inclinatio Eclipticæ ad Æquatorem, (quam Lectione XX. invenire docuimus.) Item CÆ Declinatio Solis observata; invenietur itaque arcus CA. Et in triangulo AED rectangulo ad D, ex datis DE, & angulo A, invenietur AE, inde dabitur arcus CE, Arcuum scil. CA, AE summa vel differentia. Fiat igitur ut CE ad CA, ita 24. horæ ad spatium temporis inter observationem primam, & momentum Æquinoctii, quod proinde dabitur.

Tempus Æquinoctii observatione determinatur.

Tab. 36. fig. 5.

Si proxime sequenti anno, rursus observetur ejusdem Æquinoctii momentum, tempus intermedium dabit spatium unius anni Tropici, seu Tempus in quo Sol, vel potius

Quantitas Anni Tropici determinatur.

Ter-

Terra Eclipticam percurrit, quod annus Tropicus dicitur; quia illo peracto, Anni tempestates eædem redeunt. Verum per observationes, spatio temporis tantum annuo distantes, non tuto determinatur Quantitas Anni, nec exinde pendens motus Solis apparens, seu Terræ verus definiri potest; nam error parvus, puta unius minuti, observando admissus, continuo auctus, & annorum decursu, eorum numero multiplicatus, in enormem excresceret magnitudinem. Igitur Astronomi accuratius annum definiunt, capiendo duas Æquinoctii observationes, longissimo annorum intervallo à se invicem dissitas, & dividendo tempus inter observationes elapsum, per numerum revolutionum Solis; Quotiens exhibebit tempus uni revolutioni seu anno congruens; nam sic error, si quis sit in observando commissus, is in plures annos distributus, insensibilis evadit.

Annus Anomalisticus.

Anni tempus sic definitum invenitur constare diebus 365. horis 5. min. 48. secundis 57; quod Tempus minus est Periodo Telluris circa Solem in propria orbita, qui Annus Anomalisticus, vel Periodicus dicitur: nam ob Præcessionem Æquinoctiorum, à nobis in Lectione octava explicatam, qua puncta Æquinoctialia quotannis minutis secundis 50. regrediuntur, Solique obviam eunt, Sol prius Æquinoctio occurret, quam totum circulum seu orbitam absolverit, est autem Periodus seu Annus Anomalisticus dierum 365. horarum 6. min. 9. secundis 14.

Motus Solis in Ecliptica inæquabilis observatur.

Si motus Telluris circa Solem æquabilis esset; hoc est, si æquales angulos circa Solem temporibus æqualibus describeret Tellus, motus Solis in Ecliptica visus, esset etiam æquabilis; ejusque motus diurnus esset 59. minut. prim. & 8. min. secund. unde motus Solis visus, ejusque locus in Ecliptica ad quodlibet tempus, facili computatione innotesceret; verum ex observationibus constat, motum Solis apparentem minime æquabilem esse, & illum aliquot Eclipticæ portiones velociore gradu percurrere, in aliis lentius incedere; & speciatim in Boreali Eclipticæ semicirculo describendo, Sol octo plures dies impendit, quam dum per Australem movetur, qui æquali præcise tempore hunc semicirmicirculum apparenter percurreret, ac priorem, si motu æquabili lata esset Tellus. Præterea si quotidie observationibus factis, exploretur motus Solis apparens in Ecliptica, is aliquibus diebus deprehendetur minuta 61. adæquare, & in aliis minuta 57. non superare.

Qua ratione Solis motus diurnus exploretur. *Tab. 36. fig. 5.*

Solis motus in Ecliptica diurnus hac ratione exquiritur, sit CB Ecliptica, ÆQ Æquator, eorum intersectio A, capiatur instrumento Altitudo Solis Meridiana, & nota quoque sit Altitudo Æquatoris in loco observatoris, harum Altitudinum differentia erit Declinatio Solis, quæ proinde dabitur. Sit G locus Solis in Ecliptica, FG Declinatio, in triangulo rectangulo GFA, ex dato latere FG & angulo A, invenietur arcus A G distantia Solis ab æquinoctio, seu ejus Longitudo, & proinde ejus Locus in Ecliptica in momento observationis; die deinde sequente, similiter in Meridie exploretur Solis Declinatio, quæ sit ML, ex qua & angulo A, eodem modo innotescet arcus MA, ex illo sublato AG, relinquetur arcus Eclipticæ G M à Sole uno die descriptus, cujus quantitas pro vario Telluris in orbita sua loco, varia erit.

Hypothesis veterum circularis quâ Phænomena explicabant.

Veteres Astronomi, qui nullum in cælis motum præter circularem & æquabilem admittebant, quo hanc inæquabilitatem apparentem solverent, statuebant Tellurem circa Solem, vel Solem circa Tellurem (perinde enim est) æquabiliter deferri in circulo excentrico; hoc est, in circulo cujus centrum à centro Eclipticæ (in quo vel Solem vel Terram ponebant) distabat, hunc circulum æquabili, ut dixi, motu describi voluerunt, ideoque cum centrum Eclipticæ à centro motùs æquabilis distet, Telluris vel Solis motus ex centro Eclipticæ visus inæquabilis videbitur

Tab. 36. fig. 6. *Excentricitas quid?*

Sit circulus ♈♋♎♑ Ecliptica, cujus centrum tenet Sol, MPNA orbita Terræ, ejusque centrum C, distans à centro Eclipticæ recta CS quæ Excentricitas dicitur; Tellus in hoc circulo motu æquabili moveri supponitur; ideoque erunt anguli omnes circa centrum C descripti temporibus proportionales, & ex C visa Tellus, non tardius videbitur incedere in A, quam in P. At ex centro Eclipticæ spectata, quoniam in A longius distat, quam in P, minores Eclipticæ arcus temporibus æqualibus videbitur describere, in illo, quam in hoc situ. Adeoque Tellure in A existente, ex illa spectator Solem aspiciens in ♋, illum lentiore motu in Ecliptica ferri videbit, quam cum Tellus est in P, & Sol in ♑ exinde spectatur.

Et quoniam Arcus Excentrici NAM major est semicirculo, & NPM semicirculo minor, patet longiore tempore describi arcum NAM quam NPM; sed tempore, quo Tellus fertur per peripheriam NAM; Sol videtur semicirculum Eclipticæ borealem ♈♋♎ percurrere, & dum Tellus movetur per arcum MPN, Sol per alterum australem Eclipticæ semicirculum deferri conspicitur, unde patet ratio brevioris moræ in hoc quam in illo.

Quaratione Excentricitas & Apsidum positio in hac Hypothesi determinantur.

His positis, Excentricitatem orbitæ, Apsidumque positiones, hac ratione determinare licet. Observentur eodem anno, momenta utriusque Æquinoctii, Vernalis scil. & Autumnalis; item locus Solis in Ecliptica, in alio quovis tempore intermedio, qui sit ♌, Tellure in ♒ existente. Cum Tellus est in orbitæ suæ puncto N, videtur Sol in Eclipticæ puncto ♈, deinde ad L delata Terra, Sol in ♌ apparet; ad M vero diventa Tellure, in ♎ conspiciendus erit Sol. Ducantur ad Telluris locum in L, rectæ SL, CL; item CM, MN, CN jungantur, & CM, SL se intersecent in O. Ex observatis Solis locis, dabitur angulus ♈S♌, & hujus ad duos rectos complementum ♒S♈. Porro ex intervallis temporum inter observationes datis, dantur arcus LM seu angulus LCM, item arcus NAM temporibus proportionales, unde & arcus NPM angulus NCM quoque dabuntur. In triangulo Isoscele MCN, ex dato angulo MCN, dabuntur anguli M & N ad basim; uterque enim est dimidium complementi anguli MCN ad duos rectos. Sed in triangulo MOS, datur ex observatione angulus MSO, hoc est, ♈S♒; unde dabitur quoque angulus MOS datorum complementum ad duos rectos, & huic æqualis angulus LOC. Ponatur LC Radius Excentrici esse partium 100000. Et in triangulo LCO, ex datis angulis, & latere re LC, dabitur latus OC, ſed datur MC æqualis LC; ergo innoteſcet MO. In triangulo MOS dantur omnes anguli, & latus MO, inde invenietur OS. Denique in triangulo SOC, ex datis SO, OC & angulo SOC, qui eſt anguli SOM complementum ad duos rectos; invenietur SC Excentricitas, & angulus OSC, ad quem addatur angulus MSO, & habebitur angulus MSA; ſeu arcus ♈ ♑ diſtantia Aphelii ab Æquinoctio, ex quo, datur poſitio lineæ Apſidum. Q. E. I.

Hac methodo, inveniebant Aſtronomi Excentricitatem SC eſſe partium 3450, qualium Radius Excentrici eſt 100000. Unde motum locumque Solis ad datum tempus calculo facili ſequente inveſtigabant: ſit in orbita Terræ AP linea Apſidum, A Aphelion, L Tellus orbitam circularem uniformiter deſcribens, arcus AL vel angulus ACL tempori proportionalis erit Anomalia Terræ media; ſicuti Arcus Eclipticæ ♑ ♒, ſeu angulus ASL Anomalia ejus vera, data jam Anomalia media AL, datur ejus ſinus LQ; & coſinus QC, cui addatur nota Excentricitas, & dabitur tota SQ. Fiatque ut SQ ad LQ, ita Radius ad Tangentem anguli QSL; qui itaque erit notus. Vel ſic. In triangulo SCL, dantur latera SC, CL & angulus SCL complementum Anomaliæ mediæ ad duos rectos, unde invenietur angulus LSC vel LSA Anomalia vera: nempe fiat, ut CL + CS ad CL — CS, ita Tangens ſemiſſis anguli LCA, ad quartum qui erit Tangens ſemiſſis differentiæ angulorum CSL & CLS; hinc cum SC & CL ſint datæ & conſtantes quantitates, differentia Logarithmorum CL + CS & CL — CS, erit conſtans quantitas; adeoque ſi illa ſemper auferatur à Tangente Logarithmicâ ſemiſſis anguli LCA, dabitur Tangens Log. ſemidifferentiæ angulorum CLS & CSL, ſed datur eorum ſumma, unde innoteſcet angulus LSA, qui oſtendet locum Telluris in Ecliptica è Sole viſum; & punctum Eclipticæ huic oppoſitum, erit locus Solis ex Tellure apparens. Q. E. I.

In primo Anomaliæ ſemicirculo ALP, Anomalia media ACL major eſt verà ASL. Nam eſt angulus externus ACL

 ma-

major interno & opposito ASL. Et si ab Anomalia media ACL auferatur angulus CLS restabit angulus LSC Anomalia vera. In secundo Anomaliæ semicirculo PRA, Anomalia media est minor vera; sit enim Terra in R, erit Anomalia media arcus APR, vel rejecto semicirculo arcus PR, vel huic proportionalis angulus PCR. At Anomalia vera, rejecto semicirculo, est angulus PSR, qui æqualis est PCR & CRS, unde si ad Anomaliam mediam addatur angulus CRS, habebitur Anomalia vera PSR, locusque Terræ in Ecliptica; Angulus CLS vel CRS dicitur *Æquatio & Prosthaphæresis*, eo quod nunc addendus sit, nunc subtrahendus à motu æquabili, quo habeatur motus verus.

Æquatio & Prosthaphæresis Quid?

Hæc veterum Theoria, cum motu Solis apparente ex crassis eorum observationibus elicito, satis accurate congruebat; at aliorum Planetarum motus non secundum similem Theoriam peragi, observationes testantur, & agnoscit Ptolemæus. Est præterea in ipso Sole Phænomenon, cui non respondit veterum Theoria, quodque illam falsam esse evincit, scil. observationes accuratissime factæ ostendunt Solis diametrum apparentem in Aphelio, esse minutorum 31. secund. 29, in Perihelio, min. 32. secund. 33, sed diametri Solis Apparentes sunt reciproce ut solis distantiæ à Tellure, unde prodit veram Solis distantiam cum Terra est in Aphelio, esse ad distantiam Solis in Perihelio, ut 1953. ad 1889. Sed si superius tradita Theoria vera esset, distantia Aphelii esset ad distantiam Perihelii, ut 10345 ad 9655, quæ ratio major est priore; nam si Excentricitas esset partium 345, qualium Radius Excentrici est 10000. Et si diameter apparens Solis in Perihelio sit 32′ 33″, Diameter in Aphelio erit tantum 30′ 22″; contra observationes. Falsa est itaque illa Theoria, quæ tantam ponit Excentricitatem. Nam bisectâ Excentricitate, ejus semissis melius respondet diametris Solis apparentibus observatis. At talis Excentricitas, posito quod centrum Excentrici sit centrum quoque motus medii, non æque Phænomenis motuum congruit. Nam observationes testantur Æquationes seu Prosthaphæreses duplo majores esse, quam quæ ex bisecta Excen-

cen-

centricitate eliciuntur; adeoque necesse est ut falsa sit illa veterum Theoria.

Hæc perspiciens sagacissimus Keplerus, docuit Excentricitatem bisecandam esse, ita ut centrum Excentricæ orbitæ sit in D, medio loco inter Solem & punctum C, ex quo Telluris motus visus æquabilis apparet, punctumque illud C ab excentrici centro diversum & dimidiâ veterum Excentricitate ab eo distans, centrum medii motus dicebatur, quia ex illo, motus Telluris semper videndus sit ad sensum medius inter celerem & tardum ejus in Ecliptica incessum.

Kepleri correctio hujus Theoriæ.

Verum Copernicus, aliique Astronomi absurdum esse censebant, Tellurem in circulo deferri, cujus centrum diversum sit à centro motûs æquabilis, ex quo sequeretur Tellurem inæquabili motu peripheriam orbitæ suæ percurrere contra Axioma ab iis stabilitum quo motum omnem in cælis æquabilem statuebant. Ideoque Keplerus cum demonstrasset Martem, & Planetas reliquos, non in orbitis circularibus, sed Ellipticis deferri circa Solem in Ellipseos focorum uno constitutum, eaque lege motus eorum temperari, ut Radii à Planetis ad Solem ducti verrant Areas Ellipticas temporibus proportionales, æquum esse censebat ut Tellus eadem lege, in simili orbita circa Solem quoque deferatur: hæc Theoria omnibus Phænomenis ad amussim respondet, sed ex illa sequitur, nulla dari centra motuum æquabilium, ex quibus angulos temporibus proportionales describentes videri possunt Planetæ. Hinc factum est, ut plurimi Astronomi centrum motûs æquabilis dari statuentes, hanc Kepleri Theoriam rejiciebant, sed Ellipticam tamen orbitæ formam retinebant; & quoniam in Ellipseos Axe sunt duo puncta in æqualibus à centro distantiis quæ foci appellantur, in quorum altero Sol locatur, & alter à centro Ellipseos tantum distat, quantum Sol; hunc focum dupla excentricitate à Sole distantem, tanquam centrum motus æquabilis ponebant, & ex illo Planetas describere angulos temporibus proportionales dicebant. Quod quidem in Ellipsibus parum Excentricis, quam proxime verum est, uti agnoscit Keplerus & in sequentibus demonstrabitur.

Huic Hypothesi eo magis favebant, quod nulla illis innotuit methodus directa & Geometrica in Kepleri Theoria, inveniendi Anomaliam veram, ex media; quod per alteram Theoriam facillime præstabant. Ob hunc itaque defectum, Astronomi non pauci Keplero ἀγεωμετρησίαν objicientes ad alias Hypotheses veris naturæ legibus minus congruas confugiebant; fingendo punctum aliquod, quod esset centrum motus æquabilis, è quo Planetæ angulos temporibus proportionales describere videantur. Cum tamen Theoria Kepleri locum revera in natura obtineat; & observationes testentur Planetas omnes secundum ejus leges motus suos temperari, illa ob defectum Geometriæ rejicienda non est; nec video cur culpa in Theoriam transferenda sit, quæ Astronomorum in Geometria imperitiæ potius debetur. Quo autem ἀγεωμετρίας labes in posterum deleatur, in sequenti Lectione methodum ostendemus directam, eliciendi Planetæ Anomaliam veram ex media.

LECTIO XXIII.

De Motu Planetæ in Ellipsi. Et Solutio Problematis Kepleri, de sectione Areæ Ellipticæ.

KEplerus primus demonstravit Planetas non in orbitis circularibus, sed Ellipticis deferri, Solemque in Ellipseos focorum alterutro situm, ea ratione circumire; ut Radius à Planeta ad Solis centrum protensus semper verrat Areas Ellipticas, quæ temporibus quibus describuntur sunt proportionales.

Divinum hoc sagacissimi Kepleri inventum, exactissimis Tychonis Braheæ observationibus debetur, & tanto magis est suspiciendum, quod illius ope, Universales motuum leges, totumque systema Mundanum, hoc est, Philosophiam cælestem felicissime à nemine antea perspectam patefecit Dominus *Newtonus*.

In Planetis quadrata Temporum Periodicorum sunt ut Cubi distantiarum à Sole.

Demonstravit etiam Keplerus ex observatis motibus, in Universis Planetis Tempora Periodica esse in sesquiplicata ratione distantiarum à Sole mediarum, seu Axium majorum El-

Ellipsium quæ sunt distantiarum mediarum dupla; hoc est, Quadrata temporum Periodicorum sunt ut cubi Axium majorum. Adeoque si in duabus diversis Ellipsibus, Axes majores nominentur A, *a*, Tempora Periodica T, *t*, erit $T^2 : t^2 :: A^3 : a^3$ & $T : t :: A^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{3}{2}}$.

Areæ Ellipticæ à diversis Planetis eodem tempore descriptæ sunt ut in subduplicata ratione Laterum Rectorum Ellipsium.

Hinc sequitur in diversis Ellipsibus, Areas simul, vel æqualibus temporibus descriptas esse, in subduplicata ratione Laterum Rectorum Ellipsium: quod sic ostendo. Notum est ex natura Ellipseos quod ejus Area tota sit ut rectangulum sub Axibus. Hoc est, si Ellipseos majoris Axes dicantur A & M, minoris *a* & *m*; erit Area Ellipseos majoris ad Aream minoris ut $A \times M$ ad $a \times m$; adeoque cum de Arearum ratione agatur, hæc rectangula loco Arearum poni possunt. In majore Ellipsi dicatur Area in aliquo tempore descripta X, in minore Area eodem tempore descripta vocetur *x*, & tempus quo describuntur Areæ vocetur *y*. Ellipsium Latera Recta sint L. & *l*. Tempora Periodica T. *t*. Ex supra explicata Theoria est,

$$X : A \times M :: y : T. \text{ item}$$

$$a \times m : x :: t : y \text{ unde ex æquo}$$

$$X \times a \times m : x \times A \times M :: t : T :: a^{\frac{3}{2}} : A^{\frac{3}{2}}.$$

sed quoniam est Axis minor media proportionalis inter Axem majorem & Latus rectum erit $M = A^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}}$ & $m = a^{\frac{1}{2}} \times l^{\frac{1}{2}}$ unde $X \times a^{\frac{3}{2}} \times l^{\frac{1}{2}} : x \times A^{\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} :: a^{\frac{3}{2}} : A^{\frac{3}{2}}$, quare $X \times l^{\frac{1}{2}} = x \times L^{\frac{1}{2}}$ & $X : x :: L^{\frac{1}{2}} : l^{\frac{1}{2}}$ sunt itaque in diversis figuris, Areæ simul descriptæ in subduplicata ratione Laterum Rectorum. Q.E.D.

Cum itaque Lex secundum quam Planetarum motus reguntur, sit æquabilis arearum descriptio, necesse est, ut non uniformi, sed inæquali celeritate Planetæ in orbitis ferantur, & à Perihelio ad Aphelium tendentes, remissiore gradu continuo incedant, ab Aphelio autem ad Perihelion descendentes, gradum accelerent, & in Apheliis tardissime, in Periheliis celerrime moveantur. Et velocitas erit ubique reciproce, ut perpendicularis à centro Solis demissa in rectam quæ per Planetam transit & orbitam tangit. Sit DAF El- *Tab. 36. fig. 7.*

Ellipsis, cujus focus S; & sint arcus AB, *ab* æqualibus temporibus quam minimis descripti; erunt triangula SAB S *ab* æqualia, sunt enim Areæ quas Radius vector æqualibus temporibus describit. Ex foco S in tangentes AP; *ap* demittantur perpendiculares SP, *sp*; & erit triangulum SAB æquale $\frac{1}{2}$ SP × AB, sicut triangulum S *ab* æquale $\frac{1}{2}$ *sp* × *ab*. Adeoque erit SP : *sp* : : *ab* : AB; sed *ab*, AB cum sint lineæ æqualibus temporibus descriptæ, sunt ut velocitates. Quare erit velocitas in *a* ad velocitatem in A ut perpendiculum SP ad *sp* perpendiculum.

Sequentia duo de Planetarum motibus invenit Theoremata Cl. Geometra *Abrahamus De Moivre*.

THEOREMA I.

TAB. 37. *fig.* 1. Sit APB orbita Elliptica, in qua movetur Planeta circa Solem in foco S locatum. Sit C centrum Ellipseos, CB semiaxis major, CD semiaxis minor; F alter focus, & sit Planeta in P; ductis rectis SP FP, erit velocitas Planetæ in P ad velocitatem in distantia ejus media SD, in subduplicata ratione distantiæ ejus FP ab altero Ellipseos foco F, ad ejusdem distantiam à Sole SP. Recta EPG tangat Ellipsim in P, & à focis in tangentem demittantur perpendiculares SE FG; & DH tangat orbitam in D in quam cadat perpendicularis ex S recta SH.

Per Corol. Prop. primæ *Princip. Newtoni.* Est velocitas in P ad velocitatem in D, ut SH seu CD ad SE. Adeoque quadratum velocitatis in P, erit ad quadratum velocitatis in D, ut CD*q*: ad SE*q* hoc est, ex Ellipseos natura, ob CD*q* = SE × FG ut SE × FG, ad SE*q*; seu ut FG ad SE: sed ob æquiangula triangula SPE FPG, est ut FG ad SE, ita FP ad SP. Quare quadratum velocitatis in P, est ad quadratum velocitatis in D, ut FP ad SP. Adeoque velocitas in P est ad velocitatem in D ut $\sqrt{FP}$ ad $\sqrt{SP}$. Q. E. D.

THEOREMA II.

Iisdem positis Radius est ad sinum anguli SPE ut $\sqrt{SP \times FP}$ ad CD.

Nam est SP*q*: SP × FP : : SP : FP : : SE : FG : : SE*q*: SE × FG

$SE \times FG :: SEq : CDq$ unde permutando $SPq : SEq :: SP \times FP : CDq$: adeoque $SP : SE :: \sqrt{SP \times FP} : CD$: sed ut SP ad SE, ita Radius ad sinum anguli SPE. Adeoque ut Radius ad sinum anguli SPE, ita $\sqrt{SP \times FP}$ ad CD. Q. E. D.

Velocitas Planetæ angularis, seu angulus, quem ad Solem dato tempore minimo describit Planeta, est ubique reciproce in duplicata ratione ejus distantiæ à Sole; seu reciproce ut Quadratum distantiæ: sint AB *ab* arcus Elliptici æqualibus temporibus percursi. Centro S, intervallis SB, S*b*, describantur arcus minimi BE, *be*, in S*b* capiatur S*m* æqualis S*b* & describatur arcus *mn*. Et erit velocitas angularis in *b* ad velocitatem angularem in B, ut arcus *be* ad arcum *mn*. Sed ratio *be* ad *mn* componitur ex ratione *be* ad BE, & BE ad *mn*; & quoniam triangula BSA, *b*S*a* sunt æqualia, erit *be* ad BE, ut SB ad S*b*. Est vero BE ad *mn* (quia sunt arcus similes) ut SB ad S*m*, seu ut SB ad S*b*. Quare erit velocitas angularis in *b* ad velocitatem angularem in B, in ratione composita SB ad S*b* & SB ad S*b*, hoc est, ut quadratum SB ad quadratum S*b*. Tab 36. fig. 7.

Sed ut inæquales Planetæ motus, variaque velocitatis incrementa & decrementa manifestius vobis exponantur; convenit Planetæ motum in diversis orbitæ suæ locis cum motu æquabili corporis in circulo lati comparare. Sit itaque Planetæ orbita AEBF, cujus focus in quo Sol S, Axis major AB, minor OQ. Centro S intervallo SE, quod sit medium proportionale inter AK, & OK, scil. inter semiaxem majorem & minorem, describatur circulus CFGF; hujus circuli Area erit æqualis Areæ Ellipseos, uti facile est ex Conicis demonstrare. Ponamus punctum aliquod peripheriam CEGF æquabiliter percurrere, eodem tempore quo Planeta in Ellipsi periodum suam absolvit, cumque Planeta in Aphelio A existit, punctum æquabiliter incedens sit in lineæ Apsidum puncto C, hoc punctum motu suo, Motum Planetæ medium seu æquabilem exponet; & describet circa S sectores circulares temporibus proportionales, & æquales Areis Ellipticis à Planeta eodem tempore scriptis. Tab 37. fig. 2.

 Sit

Sit jam motus æquabilis, seu angulus circa S descriptus tempori proportionalis CSM, capiatur Area ASP æqualis sectori CSM, & locus Planetæ in propria orbita erit P, angulusque MSD differentia inter motum Planetæ verum & medium erit Æquatio seu Prosthaphæresis, & Area ACDP erit æqualis sectori DSM; est itaque Area AGDP Prosthaphæresi seu Æquationi proportionalis. Adeoque ubi hæc Area est maxima, ibi æquatio erit maxima, sed Area illa est maxima in puncto E, ubi circulus & Ellipsis se mutuo secant, nam ulterius descendente Planeta ad R, Æquatio fit proportionalis differentiæ Arearum ACE & *m* ER; seu Areæ GBR*m*; sit enim V locus puncti peripheriam circularem æquabiliter describentis, & erit sector CSV æqualis Areæ Ellipticæ ASR, unde ablatis spatiis communibus, erit Area ACE demptâ Areâ RE*m* æqualis sectori VS*m*, seu Æquationi. In Perihelio B coincidit motus æquabilis cum motu vero, nam est semicirculus CEG æqualis semi-ellipsi AEB.

Ubi Æquationes seu Prosthaphæreses sunt maximæ.

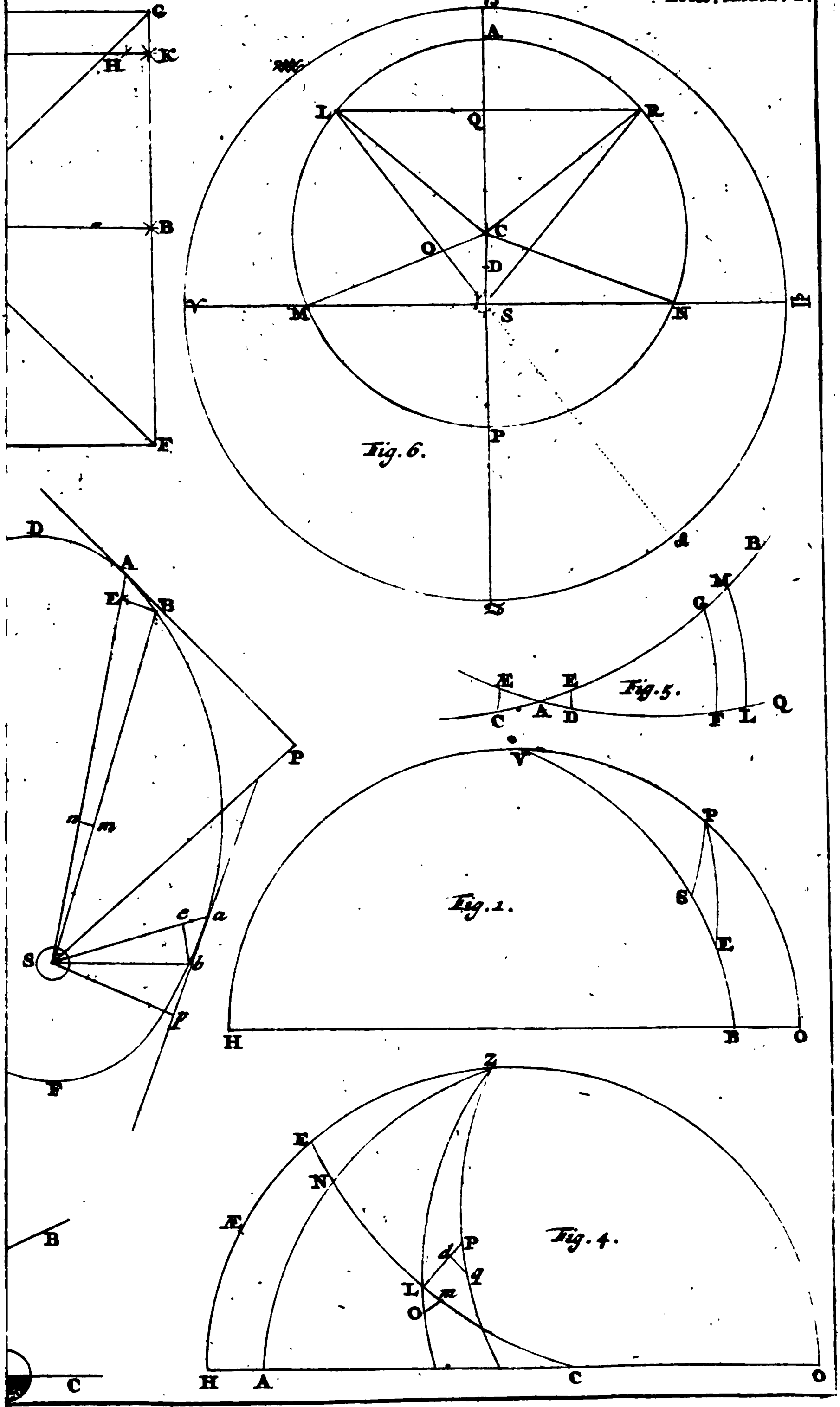
Post decessum Planetæ à Perihelio B, ejus motus motum medium semper antecedet; sit enim angulus GSZ tempori proportionalis. Capienda est Area BSY æqualis sectori GSZ, & erit Y locus Planetæ in sua orbita; unde angulus BSY major erit angulo GSZ, & Area GBYL æqualis erit sectori ZSL, qui Æquationem designat, & ubi Area GBYL fit maxima, ibi æquatio erit maxima, scil. in puncto F, ubi circulus & Ellipsis se mutuo secant. In A velocitas Planetæ est omnium minima, ob distantiam SA omnium maximam, deinde continuo crescit Planetæ velocitas, manet tamen velocitate media minor, usque dum ad E intersectionem circuli & Ellipseos pervenit Planeta, ubi ejus velocitas angularis fit mediæ æqualis, quod sic ostendo. Cum Planeta est in E, sit punctum medio motu in circulo incedens in *m*, sintque Areæ circa S eodem tempore quam minimo descriptæ *n*SE, & sector IS*m*, erunt illæ æquales, unde *h*E × ES æqualis I*m* × S*m*, quare ob S*m*, ES æquales, erit arcus E*h* = arcui I*m*, & angulus *n*SE æqualis angulo IS*m*, ad punctum itaque E est velocitas Planetæ angularis æqualis velocitati mediæ. Exinde descendente Planeta

Ubi velocitas est omnium minima.

Ubi Planetæ velocitas fit velocitati mediæ æqualis.

Ubi velocitas fit maxima.

TAB. XXXVI.



ta versus Perihelion , velocitas sit major mediâ, & continuo crescit ob continuo diminutam distantiam, donec in Perihelio B sit omnium maxima, ob distantiam SB omnium minimam. Ex quo discedens planeta, & ad Aphelion ascendens, punctum medio motu incedens post se relinquet, sed ejus velocitas semper minuitur, quo longius à Sole recedit, semper tamen manet velocitate media major, usque dum ad intersectionem F pervenit, ubi rursus velocitas fit velocitati mediæ æqualis. Deinde ulterius pergendo, continuo decrescit velocitas, donec Aphelion attingit, ubi fit omnium minima.

Cum itaque Planeta quilibet in diversis orbitæ suæ punctis, inæquali velocitate feratur, & sola æqualitas, quæ in ejus circulatione circa Solem observatur, in Arearum descriptione consistat; nam Area una cum tempore uniformiter augetur. Quo Planetæ locus in propria orbita ad datum tempus determinetur, capienda est Area, quæ sit Tempori proportionalis, quod ut fiat, necesse est ut solvatur Problema quod sequitur.

PROBLEMA KEPLERI.

Invenire positionem rectæ, quæ per datæ Ellipseos focum alterutrum transiens, abscindat Aream motu suo descriptam, quæ sit ad Aream totius Ellipseos in ratione data.

Sit nempe Ellipsis APB, cujus focus alteruter S, invenienda est positio rectæ SP, quæ abscindat aream trilineam ASP, ad quam Area totius Ellipseos eam habeat rationem, quam habet tempus Periodicum Planetæ Ellipsim describentis, ad aliud tempus datum; qua positione inventa, dabitur punctum P, quod Planeta ad tempus illud datum occupat. Vel sit AQB semicirculus super Ellipseos Axem majorem descriptus, ducenda est per S recta SQ abscindens Aream ASQ, ad quam Area totius circuli est in eadem ratione. Nam per hanc circuli sectionem, sectio Ellipseos quæsita facile invenitur, demittendo à puncto Q in Ellipseos axem perpendicularem QH, Ellipsi occurrentem in P, & ducta SP, erit illa recta quæsita, & P locus Planetæ. Est enim semisegmentum Ellipticum APH ad semisegmentum

TAB. 37. fig. 3.

 cir-

circulare AQH, ut HP ad HQ, hoc eſt, ut Area totius Ellipſeos ad Aream totius circuli, uti conſtat ex natura Ellipſeos: ſed eſt triangulum SPH ad triangulum SQH, in eadem ratione, *per* 1 *El.* 6*ti*. Adeoque *per* 12. *El.* 5*ti*. erit Area Elliptica ASP ad Aream circularem ASQ, ut Area totius Ellipſeos ad Aream totius circuli; & alternando, Area Elliptica ASP eſt ad ejus Aream totam, ut Area circularis ASQ ad totum circulum. Adeoque ſi habeatur methodus ducendi rectam per S, quæ ſecet Aream circuli in data ratione, facile erit in hac ipſa ratione ſecare Aream Ellipticam.

Ipſi Keplero, qui primus problema propoſuit, nulla innotuit methodus directa computandi locum Planetæ ex dato tempore: ille enim expreſſe dicit, nullam eſſe viam directam, ex dato tempore, inveniendi locum Planetæ ſeu Anomaliam ejus veram. Ideo illi neceſſe fuit, per ſingulos ſemicirculi AQB gradus progrediendo, ex dato arcu AQ, quam Anomaliam excentri vocat, tam tempus per Aream ASQ, quæ Anomaliæ mediæ eſt proportionalis, quam Angulum ASP, hoc eſt locum Planetæ ſeu Anomaliam veram, & coæquatam tempori reſpondentem calculo eruere, & quoniam Geometrice non potuit Keplerus problema ſolvere; illi ἀγεωμετρίαν objiciebant Aſtronomi, & eum, quaſi cauſis Phyſicis nimium indulgentem, à Geometria in diverſum abiiſſe cenſebant, ejuſque Aſtronomiam ex hac Theoria pendentem, tanquam minus Geometricam, labefactabant; & ut vitium hoc effugerent, ad alias tranſiverunt Hypotheſes, fingendo punctum aliquod circa quod motus foret æquabilis, ſeu anguli deſcripti temporibus eſſent proportionales, & exinde data Anomalia media coæquatam ſeu veram determinabant. Sed computus his Hypotheſibus innixus, obſervationibus non congruere deprehenſus eſt. Nullum enim eſt revera punctum fixum, quod eſt centrum motus æquabilis, circa quod ſcil. Planetæ, radiis ad illud ductis, deſcribant angulos temporibus proportionales. Solaque Theoria, quæ Planetarum motibus ad amuſſim congruit, eſt ſupra explicata Kepleriana. Omnes itaque Aſtronomi

nomi in æternum laudabunt hoc Kepleri Inventum, ejusque cum cælo consensum; præsertim cum elegantem motuum è causis suis demonstrationem nobis patefacit: illud sane Keplerus tanti fecit, (non improbantibus æquioribus arbitris) ut methodum calculi indirectam sectari maluit, quam aliam Hypothesim à Natura minus probatam comminisci.

Quo itaque ἀγεωμετρησίας labem ex Astronomia deleamus, methodum Geometricam hic ostendemus, qua Ellipseos seu (quod illi æquipollet) circuli Area in data ratione secanda sit.

Sit AQB Semicirculus super Ellipseos Axem majorem descriptus, cujus Centrum C, Ellipseos focus in quo Sol locatur sit S, per locum Planetæ intelligatur duci ad Axem perpendicularis recta QH circulo occurrens in Q; erit Area ASQ ad Aream totius circuli, ut tempus datum ad tempus Periodicum Planetæ; ducatur CQ, in quam productam, si opus sit, cadat perpendicularis SF; est Area ASQ æqualis sectori ACQ una cum triangulo $CSQ = \frac{1}{2} CQ \times AQ + \frac{1}{2} CQ \times SF$, adeoque ob datam $\frac{1}{2}CQ$, erit Area ASQ semper proportionalis Arcui $AQ +$ recta SF, cum scil. motus sit ab Aphelio versus Perihelion; at cum à Perihelio ad Aphelion tendit Planeta, fit Area BSq æqualis sectori $BCq -$ Triangulo CSq, adeoque erit illa proportionalis arcui $BQ -$ recta Sf. Hinc, si capiatur arcus AN vel Bn tempori proportionalis, erit $AQ + SF = AN$ vel $BQ - Sf = Bn$, quare erit $SF = QN$ vel $Sf = qn$. TAB. 37. fig. 4.

Hinc patet, si habeatur arcus AQ, & ei addatur arcus NQ qui sit æqualis rectæ SF, erit arcus AN tempori proportionalis, seu Planetæ Anomaliæ mediæ æqualis. Adeoque ex data Planetæ Anomalia vera, facile innotescit ei congrua Anomalia media, seu tempus. Fiat enim ut QC ad SC ita 57, 29578, qui arcus radio est æqualis, ad quartum, & dabitur Arcus æqualis SC in gradibus gradûsque partibus decimalibus. Dicatur hic arcus B. Et quoniam est SC ad SF, ut Radius ad sinum anguli SCF vel ACQ. Fiat ut Radius ad sinum arcus AQ, ita arcus B ad quartum; & dabitur in gradibus & partibus decimalibus; arcus in peripheria AQB, qui æqualis est rectæ SF; cumque SF sit æqualis QN, dabitur arcus QN, & proinde AN tempori proportionalis.

Hoc exemplis in orbita Martis declarare liceat. Hujus Planetæ Excentricitas est ad distantiam mediam, seu semiaxim Ellipseos, ut 14100 ad 152369: adeoque Logarithmus arcus B, qui æqualis est SC est o. 7244446. Si itaque quæratur Anomalia media, cum Anomalia Excentri est unius Gradus; addatur sinus Log. unius gradus qui est 8. 2418553 ad Log. arcus B, fiet summa 8. 9662999 qui est Logaryhthmus numeri o. 092533, & exprimit valorem arcus QN in partibus gradûs decimalibus. Est itaque arcus AN tempori proportionalis 1, 092533 seu 1° 5′ 33″. Similiter si Anomalia Excentri sit 30 gr. ad ejus sinum Log. addatur constans Log. arcus B, & summa erit o. 4234146 Log. numeri 2, 651. Adeoque Anomalia media AN Anomaliæ Excentri 30 grad. respondens erit 32, 651, seu 32 gr. 39′. 3″. Hæc methodus expeditior multo, & facilior est illâ, quam tradit Keplerus, ubi methodo indirecta, & per positionem *Regulæ Falsæ*, docet pervenire ex Anomalia media ad veram.

Deveniamus jam ad methodum promissam directe eliciendi Anomaliam coæquatam seu veram ex media. Sit in figura Arcus AN Anomalia media, seu tempori proportionalis, sitque AQ Anomalia Excentri invenienda. Arcus NQ dicatur, y, & sinus arcus AN vocetur e, & cosinus f; Excentricitas SC sit g. Est sinus arcus AQ æqualis sinui arcus AN−NQ = sin. AN $-y$; sed à nobis ostensum est in Elementis Trigonometricis, quod si sinus arcus AN sit e, sinus arcus AN $-y$, seu arcus AQ erit $e - \frac{fy}{1.} - \frac{ey^2}{1.2.} + \frac{fy^3}{1.2.3.} + \frac{ey^4}{1.2.3.4.}$ &c.

Sed est radius qui est 1 ad sinum arcus AQ, ut SC vel g ad SF vel NQ hoc est y. Adeoque erit SF æqualis $ge - \frac{gfy}{1.} - \frac{gey^2}{1.2.} + \frac{gfy^3}{1.2.3.} + \frac{gey^4}{1.2.3.4.}$ &c. At est SF æqualis arcui NQ seu y, ut ostensum est: qua-

quare ad hanc diventum est æquationem: $y = ge - \frac{gfy}{1.} - \frac{gey^2}{1.2.} + \frac{gfy^3}{1.2.3.} + \frac{gey^4}{1.2.3.4.}$ &c. proinde $ge = y + \frac{gfy}{1.} + \frac{gey^2}{1.2.} - \frac{gfy^3}{1.2.3.} - \frac{gey^4}{1.2.3.4.}$ &c. ge vocetur Z, & $1 + gf$ dicatur a, item $\frac{ge}{1.2.}$ sit b, $\frac{gf}{1.2.3.} = c$ item $\frac{ge}{1.2.3.4.} = d$, & Æquatio induet hanc formam. $Z = ay + by^2 - cy^3 - dy^4$ &c. Unde per methodum Reversionum serierum à Domino *Newtono* traditam, fiet $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 + ac}{a^5} \times z^3 - \frac{5abc - 5b^3 + a^2d}{a^7} \times z^4$. Et quoniam est $b = \frac{ge}{2} = \frac{z}{2}$ & $d = \frac{z}{1.2.3.4.}$ fiet $y = \frac{z}{a} - \frac{z^3}{2a^3} + \frac{cz^3}{a^4} - \frac{5cz^5}{2a^5}$ &c. Si arcus AN superet 90 grad. & minor sit 270, erit ge seu $z = y - gfy + \frac{gey^2}{2.} + \frac{gfy^3}{2.3.} - \frac{gey^4}{2.3.4.}$: unde fiet $a = 1 - gf$; & erit $y = \frac{z}{a} - \frac{z^3}{2a^3} - \frac{cz^3}{a^4}$

Series supra posita exprimit quantitatem arcus QN, in partibus qualium Radius est 1, 000000. At ut in gradibus gradusque partibus habeatur, fiat ut Radius ad hancce seriem ita 57, 29578, qui est arcus Radio æqualis, ad quartum, hoc est (cum Radius sit unitas) multiplicetur series prædicta per numerum 57. 29578 quem vocemus R unde prodit arcus quæsitus y in gradibus, gradusque partibus $= \frac{Rz}{a} - \frac{Rz^3}{2a^3} + \frac{Rcz^3}{a^4}$ &c.

Hujus seriei terminus primus $\frac{Rz}{a}$ sufficit ad determinandam Anomaliam Excentri in omnibus fere Planetis, nam in Marte error plerumque non superat gradus partem ducentesimam. In Tellure gradûs parte decies millesima minor est, sed Exemplis rem declarare liceat.

In orbita Telluris, Excentricitas est 0. 01691, posita distantia media seu CQ = 1. Invenienda est Anomalia Excentri, & coæquata cum media est 30. gr.

Log.

Log. Excentricitatis	8. 2281436. = Log. g
Log. ſin. gr. 30.	9. 6989700
Log. R	1. 7581226
Log. Rz.	9. 6852362
Log. a Subtr.	0. 0063137
Log. arcus y ſive NQ	9. 6789225

cui reſpondet numerus 0. 47744 ſeu in ſexageſimalibus numeris 28. 38: reliqui termini minores ſunt gradus parte decies milleſima, adeoque negligi poſſunt. Si itaque à Gradibus 30 ſubtrahatur 28′. 38, relinquetur Arcus AQ 29°: 31′: 22″. Et in triangulo QCS, dantur latera QC CS cum angulo SCQ, unde dabitur angulus QSC, Analogia eſt ut QC + CS ſeu AS ad CQ − CS ſeu PS, ita Tangens ſemiſſis ſummæ angulorum CSQ & CQS ad Tangentem ſemiſſis differentiæ eorundem, unde ſi à Tangente Log. ſemiſſis Anguli ACQ auferatur conſtans Logarhythmus 0. 0146893, dabitur Tangens ſemiſſis differentiæ angulorum CQS & CSQ, qui in præſenti exemplo erit 14: 17′: 26″ hæc ad ſemiſummam addita, dat angulum ASQ 29° 3′; 7″, ſed ut inveniatur angulus ASP, diminuenda eſt Tangens anguli ASQ in ratione Axis minoris Ellipſeos ad majorem, ab hujus itaque Tangente Log. auferatur Logarhythmus conſtans 0. 0000 622. qui eſt Logarhythmus Rationis Axis majoris ad minorem, & reſtabit Tangens Log. anguli ASP 29°: 2′: 54″ qui eſt Anomalia coæquata.

In orbita Martis, Excentricitas eſt partium 14100, qualium diſtantia media eſt 152369. Adeoque Logarithmus Rationis SC ad CQ erit 8. 9663226 = Log. g. Quæratur primo in Marte, Anomalia Excentri, cum Anomalia media eſt unius gradûs.

Log. Excentricitatis	8. 9663226
Log. Sin. 1 gr.	8. 2418453
Log. R	1. 7581220
Log. Rz	8. 9662899
Log. a ſubſtr.	0. 0384299
Log. Rz	8. 9278600

cui

cui Logarithmo respondens numerus. o. 08497, exhibet magnitudinem arcus NQ, & error minor est gradus parte tricies millesimâ.

2do. Quæratur Anomalia Excentri, cum media est grad. 45.

Log. Excentricitatis	8. 9663226
Log. sin. 45. gr.	9. 8494850
Log. R	1. 7581220
Log. Rz.	0. 5739296
Log. a substr.	0. 0275249
Log. $\frac{Rz}{a}$	0. 5464047

cui respondet numerus 3. 5189, qui verum superat centesima & quinquagesima circiter gradûs parte, & ut corrigatur error, capiatur terminus seriei secundus $\frac{-Ra+2Rc \times z^3}{144}$ qui invenitur 0. 0065, & à primo auferatur & restabit 3. 5124 qui exprimit arcum NQ verum ad partes gradus centies millesimas.

3tio. Quæratur Anomalia Excentri, cum media est grad. 100, in hoc casu est $a = 1 - gf =$ 0. 983930.

Log. g.	8. 9663226
Log. sin. gr. 100. seu gr. 80	9. 9933515
Log. R	1. 7581220
Log. Rz	0. 7177961
Log. a substr.	9. 9929598
Log. $\frac{Rz}{a}$.	0. 7248363

Huic Logarithmo respondet numerus 5. 3068, qui quinquagesima circiter gradus parte verum superat, quo itaque corrigatur error, duplicetur Log. $\frac{z}{a}$, & producto addatur Log. $\frac{Rz}{a}$. & habebitur Logarithmus $\frac{Rz^3}{a^3}$ cui respondens numerus est 0. 04552, ejusque semissis est 0. 02276 æqualis $\frac{Rz^3}{2a^3}$. Hic numerus à numero 5. 3068 auferendus est; & ha-

habebitur 5. 2841 pro quantitate arcus NQ. Et proinde Arcus AQ Anomalia Excentri erit 94. 7159, qui non decies millesima gradus parte à vero AQ discrepat. Notandum quamvis secundus seriei terminus sit $-\frac{Ra+2Rc \times z^3}{144}$ ejus tamen pars $-\frac{Rcz^3}{44}$ sufficit, ut habeatur AQ arcus Anomaliæ excentri verus ad gradus partes decies millesimas.

Obtento arcu AQ, seu angulo ACQ invenitur angulus ASQ resolutione Trianguli QCS in quo dantur latera CQ CS cum angulo interjecto QCS, unde invenietur angulus QSA. Hujus anguli Tangens Logarithmica est capienda & ab ea demendus est Logarithmica Rationis Axis majoris ad
Tab. 37. fig. 3. minorem, & restabit tandem Tangens Log. anguli ASP qui est Anomalia æquata seu vera.

Lectio XXV.

De Problematis Kepleri Solutione Newtoniana *&* Wardi *Hypothesi Elliptica.*

Methodus nostra in superiore Lectione explicata, & ea Domini *Newtoni* in Principiis Philosophiæ Mathema-
Tab. 37. fig. 3. ticæ *pag* 101. tradita, eidem innituntur fundamento, Quod scil. recta SF Longitudine æqualis est arcui QN. *Newtoni* autem methodus fere similis est ei, qua ex æquationibus affectis radicem extrahunt Analystæ, & quidem tanto magis est æstimanda, quod non solum exhibet Planetarum Loca, quorum orbitæ ad circuli formam proximæ accedunt, sed eadem fere facilitate inservit etiam Cometis, qui in orbitis maxime excentricis moventur; quod etiam per nostram methodum obtineri potest, si modo loco arcus AN capiatur alius arcus ad arcum AQ propius accedens, qui dicatur A & posito sinu arcus $A = e$ quæratur sinus arcus $A + y$ & fiat $z = ge + A - AN$.

Methodum autem *Newtoni* cum maxime expedita sit, hic explicare liceat, in gratiam Artificum, qui Tabulas Astronomicas secundum veras motuum coelestium leges, & non

non ex fictis Hypothesibus condere volunt.

Hactenus ostensum fuit, quod si arcus A Q sit Anomalia Excentri, hunc arcum una cum recta S F ex Sole in radium Q C normaliter incidente, esse tempori proportionalem; cum Planeta tendit ab Aphelio ad Perihelion, vel arcum B Q dempta recta S F, esse tempori proportionalem, cum à Perihelio ad Aphelion ascendit, adeoque si capiatur Arcus A N vel B N tempori proportionalis, erit arcus Q N æqualis S F rectæ; ut igitur inveniatur, in gradibus & partibus gradus decimalibus, mensura arcus in Peripheria A Q B, qui æqualis sit rectæ S F, fiat ut C Q ad C S, ita arcus grad. 57. 29578 qui æqualis est radio, ad quartum, hic numerus exprimet magnitudinem arcus in Peripheria A Q B, qui æqualis est S C. Arcus hujus Logarithmus dicatur B. Quoniam est C S ad S F, ut Radius ad sinum anguli A C Q; fiat ut Radius ad hunc sinum, ita arcus cujus Logarithmus est B, ad alium D; erit arcus ille D æqualis rectæ S F. Adeoque si ad datum tempus, Area A S Q & arcus A N essent tempori proportionales, & capiatur N P æqualis D, punctum P caderet in Q. Si vero Area A S Q non accurate tempori respondeat, punctum P cadet supra vel infra Q, prout Area A S Q major sit vel minor eâ, quæ est tempori proportionalis. Sit ea ASq, & in Cq cadat perpendicularis SE, erit per hactenus demonstrata, $SE = Nq$, unde $SE - SF$ vel $SF - SE$, hoc est fere $LE = qP = QP - Qq$ vel $= Qq - QP$. Quod si angulus QCq sit parvus, erit $CE : Cq :: LE : Qq :: QP - Qq : Qq$; unde $CE + Cq : Cq :: QP : Qq$. Et similiter, cum arcus B Q est quadrante minor, erit $CQ - CE : CQ :: QP : Qq$. Cum Planeta prope Aphelion vel Perihelion versatur, fit CE fere $= CS$ & $CQ + CE = AS$. unde $QP : Qq :: AS : CA$, cum arcus A Q est quadrante minor; at cum Arcus Bq est Quadrante minor, erit $SB : CB :: QP : Qq$. Fiat ut CS ad CQ, ita Radius R ad Longitudinem quandam L, & erit $CQ = \frac{CS \times L}{R}$. Est autem Radius ad cosinum anguli A C Q ut SC ad CF vel CE, sunt enim CF CE fere æquales; quare erit $CE = \frac{SC \times \text{cosin } AQ}{R}$, unde habe-

 bitur

bitur $QP:Qq::\frac{SC\times L+SC\times cof.\,AQ}{R}:\frac{CS\times L}{R}::L+cof.\,AQ:L$, cum Arcus AQ eſt quadrante minor; at ſi is ſit quadrante major, erit $QP:Qq::L-cof.\,AQ:L$.

Atque hac ratione ſi capiatur arcus AQ, qui ſit aliquantiſper minor, aut major vero, invenietur exinde arcus Qq, huic addendus vel demendus, qui facit ut Area ASq ſit quam proxime tempori proportionalis; & ſi loco AQ capiatur prius inventus arcus Aq & inſtituatur proceſſus priori ſimilis, invenietur alius Aq, & hic ſimiliter, eundem repetendo proceſſum, dabit novum Aq, atque ſic quantumvis proxime ad veritatem accedere licebit.

Illuſtratur Exemplis in orbita Martis. Tanta autem eſt hujus methodi facilitas, ut ea exemplis potius quam ulteriore explicatione indiget; adeoque liceat eam in motibus Planetæ Martis experiri. In hac orbita, Logarithmus B eſt 0. 7244446, & Longitudo L eſt partium 1080631 qualium Radius eſt 100000.

Exemplum I. Sit primo inveniendus angulus ACQ, cum motus medius ſeu arcus tempori proportionalis ſit unius gradus. Quoniam CS eſt fere pars decima ipſius CA, pono AQ eſſe 0. 9. grad. decima ſcil. parte minorem motu medio. Addatur ſinus Log. 0. 9. ad Log. B, & fit ſumma 8. 9205466 = Log. numeri 0. 083281, hic numerus exprimit arcum æqualem $SF=NP$, & ſi arcus AQ fuiſſet recte aſſumptus, foret $AN-NP=AQ$ & $QP=O$. At in præſenti caſu, eſt $QP=0.\,01671$. A quo ſi auferatur ejus pars decima, cum AS ſuperat AC decima circiter ſui parte, reſtabit $Qq=0.\,01504$, qui additus ad AQ, dat Aq 0. 91504, qui vix milleſima gradus parte à vero Aq differt.

Exemplum II. Sit 2*do* Arcus AN ſeu motus medius 2 gr. Pono AQ. 1. 83 prioris AQ fere duplum, & ad ejus ſinum Log. addendo Log. B, fit ſumma 9. 2286992. Log. numeri 0. 16931; unde erit $QP=0.\,00069$, à quo ſi ſubſtrahatur ejus pars decima, ſit $Qq=0.\,00062$, & Aq 1. 83 062 qui non decies milleſima gradus parte à vero Aq diſcrepat.

Exemplum III. 3*tio* Sit Arcus tempori proportionalis gr. 3. Ponatur: $AQ=2,745=1,83+0.\,915$, & ad ejus ſinum Log. addendo do Log. B, habebitur Log. numeri 0. 25592 = NP & AN — NP = 2. 74638. Adeoque Q*q* = 0, 001 fere, & A*q*=2. 746 sic unica duorum Logarithmorum additione; invenietur arcus A*q*, qui erit verus ad gradus partes millesimas.

4to. Sit jam, non gradatim, sed per saltum pergendo, inveniendus angulus AC*q*, cum motus medius est grad. 45. Pono Arcum AQ esse gr. 40. & ad ejus sinum Log. addendo Log. B. Fit summa 0. 5320121 = Log. numeri 3.4081, qui numerus à 45 ablatus relinquit AN — NP = 41. 5919, cujus excessus supra arcum AQ est 1.5919, unde si fiat ut L + *cos.* AQ ad L, ita 1,5919 ad alium, invenietur arcus Q*q* gr. 1,4865. Adeoque A*q*, 41.4865 qui non multum supra millesimam gradus partem â vera differt. Sed absque hac proportione, invenire possumus A*q* capiendo arcum, qui sit aliquantulum minor quam AN — NP, eidem tamen fere æqualis, scil. sit AQ 41. 50, & addendo ejus sinum Log. ad Log. B, habebitur alius NP = 3. 5132, qui ab AN subductus dat 41. 4868 pro novo A*q*; & hic arcus minore labore eruitur, & aliquantulum propius ad verum accedit quam prior A*q*. *Exemplum.* IV.

5to. Post inventum A*q* correspondentem motui medio 45. gr. rursus si gradatim pergere lubeat, unica duorum Logarithmorum additione habebitur A*q*, ad omnes motûs medii gradus subsequentes: nempe cum Anomalia media sit gr. 46, pono AQ 42, 40, & addendo ejus sinum Log. ad Log. B, fiet AN — PN — 42.4249, cui si æqualis ponatur novus AQ, habebitur A*q* qui ne millesima gradus parte à vero A*q* differt, sic cum Anomalia media sit gr. 47. Pono AQ 43,36 = priori A*q* + incremento istius arcus uni gradui motus medii competente, & addendo ejus sinum Log. ad Log. B. Summa est Log. numeri 3.6402 qui ab AN ablatus, relinquit AN — NP = 43.3598 = novo A*q*, & hic arcus gradus parte circiter decies millesima à vero discrepat. *Exemplum.* V.

6to. Si omissis gradibus intermediis inveniendus est arcus A*q* cum Anomalia media est gr. 100, Pono AQ gr. 96, & addendo ejus sinum Log. ad constantem B; summa fit Lo- *Exemplum.* VI.

garithmus numeri 5.273, unde AN — NP = 94.727, Itaque pono ſecundo AQ 94. 72, & per additionem conſtantis Log. B, ad ejus ſinum Log. provenit log. numeri 5.285, qui ab AN ſubductus, dat AN — NP 94,715 = Aq quam proxime. Similiter ſi Anomalia media ſit gr. 101. Pono AQ 95,71, ex quo elicitur NP 5,2756 quo numero ab 101 ſublato, reſtabit AN — NP 95,7244; atque hac ratione data Anomalia media, ſi gradatim fiat proceſſus, habebitur angulus ACQ, per unicam tantum duorum Logarithmorum additionem, quorum, qui conſtans eſt, in charta ſeorſim ſervandus, quo labori ſæpius eundem exſcribendi parcatur.

Exemplum in Cometæ orbita.

Tranſeamus jam ad orbitam alterius generis, cujus Excentricitas ad diſtantiam mediam magnam obtinet proportionem; ſit nempe diſtantia Aphelii ad diſtantiam Perihelii ut 70 ad 1; qualis fere fuit iſtius Cometæ orbita, in qua Cometam periodum ſuam complere Annis 75½, primus deprehendit Halleius. In hac orbita, erit AC vel CQ partium 35. 5 & CS 34. 5. Qualium SB eſt una, & conſtans Log. B eſt 1.7457133. Inveniendus eſt arcus Bq, cum motus medius à Perihelio ſit gradus pars centeſima. Pono BQ 0. 35, ad ejus ſinum Log. addatur Log. B. & prodit ſumma Log. numeri, 0, 34013; qui ad arcum AN additus, fit 0, 35013, ſi hic arcus fuiſſet 0, 35; BQ recte eſſet aſſumptus, ſed differentia eſt 0, 00013, unde quoniam CB eſt ad SB ut 35,5 ad 1, multiplicetur differentia, 00013 per 35,5 & prodibit Qq = 0.004615, unde prodit arcus Bq = 0. 354615 & error tribus partibus decies milleſimis gradus minor eſt. Rurſus, ſit motus medius 0. 02. Ponatur BQ eſſe 0,71, per additionem conſtantis B ad ejus ſinum Log. habebitur Logarith. numeri 0.68998, unde BN + NP = ,70998, & eſt differentia 0.00002 quæ ſi per 35. 5 multiplicetur & productus à BQ ſubtrahatur reſtabit Bq = ,7092, & error gradus partem decies milleſimam non ſuperabit. Si motus medius ſit 0,3 pono BQ 1. 06; & addendo ejus ſinum Log. ad conſtantem B. Prodit Log. numeri 1.03008, cui ſi addatur BN fit ſumma

ma

ma 1, 06008, qui major est quam BQ: quare si differentia, 00008 multiplicetur per 35.5, & productus ad BQ addatur fiet Bq=1, 06284. Similiter cum motus medius sit ,04. Pono BQ 1,4 & invenio NP=1, 3604, ad quem addendo ,04 fit summa 1,4004, qui superat 1,4 per ,0004; multiplicetur hæc differentia per 35,5 & productus ,0142 erit æqualis Qq unde Bq=1,4142; In his omnibus errores sunt admodum exigui, & raro millesimam gradus partem transcurrentes.

Inveniendus sit jam arcus Bq, cum motus medius est unius gradus. Pono BQ=20 gr. & addendo ejus sin. Log. ad B. Prodit Log. numeri 19.045, cui addendo 1, summa 20,045 superat 20, & cum in hoc casu L—*Cos.* BQ sit ad L, ut 1 ad 11,5 fere; multiplico differentiam ,045 per 11,5, & productus ,5175 ad BQ additus, dat 20,5175. Pono itaque secundo BQ 20,51 & prodibit similiter, ut in præcedente, NP=19.5092; cui addendo BN, summa est 20,5092 quæ minor est quam BQ; unde si differentia, 0008 multiplicetur per 11,5 & productus ,0092 subtrahatur a BQ, restabit Bq=205,008.

Sit denique motus medius æqualis 2. gr. Pono BQ gr. 30 & invenietur NP 27.84, cui addendo 2, summa 29,84 minor est quam 30, & si multiplicetur differentia ,16 per 6, 3 (Nam est L — *Cos.* BQ ad L ut 1 ad 6. 3.) fiet 1,008 = Qq; adeoque hic arcus a BQ subductus, dat Bq 28,982 ut vero corrigatur Bq, assumo BQ 29; & simili processu prodit Bq = 28.9672.

Invento angulo ACQ, angulus ASQ facile habetur, nam in triangulo QCS, dantur latera QC, CS, & angulus QCS, TAB 37. unde innotescent angulus ASQ, & latus SQ; deinde fiat ut *fig.* 3. Axis Ellipseos major ad minorem, ita Tangens anguli ASQ ad Tangentem anguli ASP, qui est Anomalia coæquata; Denique fiat ut secans anguli ASQ ad secantem anguli ASP, ita SQ ad SP distantiam Cometæ à Sole, quæ erat invenienda. Vel sic forte facilius invenitur angulus ASP, & recta SP, invento arcu AQ datur ejus sinus QH, & Cosinus HC; sed datur SC, in partibus quarum CQ est 100000, unde dabibitur HS. Fiat ut major Ellipſeos Axis ad minorem, ita QH ad PH, qui itaque dabitur. In triangulo, PHS rectangulo, dantur latera PH, HS, ex iis innoteſcet angulus PSH Anomalia coæquata, & latus PS diſtantia Cometæ à Sole.

Quoniam in Apheliis & Periheliis coincidunt puncta Q & N, locuſque Planetæ medius idem eſt cum vero. Et in primo Anomaliæ ſemicirculo locus medius præcedit verum, in ſecundo verum ſequitur; ex determinata poſitione lineæ Apſidum in Telluris orbita determinatur tempus quando locus Telluris è Sole viſus & locus medius coincidunt; quando enim Sol apparet in Eclipticæ puncto, ubi eſt Perihelion, tunc Tellus erit in Aphelio; dato autem hoc temporis momento, dabitur inde per Tabulas Aſtronomicas motus Telluris medius, & arcus AN pro alio quovis temporis momento, arcus enim illi ſecundum temporum rationes computantur & in tabulis diſponuntur. Sed dato, pro quolibet momento, arcu AN, oſtenſum eſt qua ratione elicietur angulus ASP Anomalia Telluris vera, & locus Solis in Ecliptica apparens.

Wardi Theoria. Præter Theoriam ſupra explicatam Kepleri, ſecundum quam Planetæ revera motus ſuos temperant; eſt & alia Hypotheſis Elliptica, quam maxime excoluerunt Aſtronomi duo celeberrimi *Iſmael Bulialdus*, & *Sethus Wardus* olim in hac Cathedra Profeſſor & poſtea Epiſcopus Salisburienſis, ex quorum laboribus haud exigua accepit Aſtronomia incrementa, cumque illi non deſit Elegantia & concinnitas Geometrica, maximaque calculi inde pendens facilitas, liceat illam paucis exponere. In hac Hypotheſi cum Keplero ſupponitur, Planetarum orbitas eſſe Ellipſes, in quorum foco communi locatur Sol; præterea ſupponitur quod Planeta unuſquiſque ea lege in Ellipſis propriæ Peripheriâ defertur, ut ex foco ſuperiore ſpectatus æquabiliter incedere videatur; radiiſque ad focum hunc ductis, deſcribat angulos temporibus proportionales. His poſitis, & data ſpecie Ellipſeos quam Planeta deſcribit, Cl. Wardus elegantem oſtendit methodum Geometricam, qua ex data Anomalia media, vera eliciatur, quæ eſt ejuſmodi.

Sit

Sit ABP. Ellipsis, quam describit Planeta, Linea Apsidum AP, focus in quo Sol residet S, F superior focus, qui est centrum motus æquabilis. Sit angulus AFL tempori proportionalis, seu Anomalia media, erit L locus Planetæ in propria orbita, & angulus ASL Anomalia coæquata seu vera. Producatur FL ad E, ut sit FE æqualis Ellipseos Axi majori AP, unde cum FL & SL simul, ex natura Ellipseos eidem AP sint æquales, erit LE æqualis LS, & erit triangulum LSE isosceles, unde æquantur anguli E & ESL, & exterior angulus FLS eorum summæ æqualis, erit utriusvis duplus, seu duplus anguli LES. Quare in triangulo FES, ex datis EF, FS, & angulo EFS, qui est deinceps angulo AFF, dabitur angulus E, cujus duplus æqualis est angulo FLS, qui proinde dabitur, sed angulus AFL æqualis est duobus FSL, & FLS, unde FLS est Æquatio seu Prosthapheresis quæ ex Anomalia media sublata, vel eidem addita, dat Anomaliam veram. Q. E. I. *Wardi Methodus.* *Tab. 37. fig. 6.*

In resolutione trianguli EFS ex datis EF, FS, cum angulo EFS, Analogia est $\frac{1}{2}$EF+$\frac{1}{2}$FS : $\frac{1}{2}$EF−$\frac{1}{2}$FS : :, hoc est AS ad SP; ita tangens $\frac{1}{2}$AFE ad Tangentem semissis differentiæ angulorum E & FSE, sed ob angulum E æqualem LSE angulo, est FSL differentia angulorum E & FSE; quare angulus qui ex analogia prodit duplicatus dabit angulum FSL, Planetæ Anomaliam veram. Praxis autem facillima est, nam cum AS & SP sint constantes & datæ quantitates, differentia Logarithmorum data erit; quare datus numerus ad Tangentem semissis Anomaliæ mediæ addendus est, & habebitur Tangens semissis Anomaliæ veræ. Porro in triangulo LFS, ex datis omnibus angulis una cum latere SF, invenietur LS distantia Planetæ à Sole. *Tab. 38. fig. 1.*

Est quidem hæc Wardi Hypothesis satis utilis approximatio, ad calculum enim abbreviandum inservit, est tamen non nisi approximatio, & veritatem non accurate attingit; ejus ratio sic patebit. Sit APB orbita Planetæ, AQB circulus, eidem circumscriptus. Arcus AQ Anomalia Excentrici, & AN Anomalia media tempori proportionalis. Ad centrum C ducatur NC, & à puncto Q recta QG illi *Hypothesis Wardi Approximatio est tantum.* *Approximationis ratio.*

parallela, erit angulus QGA æqualis NCA, & tempori proportionalis. Et erit CG fere æqualis CS, ſed illa aliquantulum minor. A foco S in QC cadat perpendicularis SF, erit hæc ut prius oſtenſum fuit, æqualis arcui QN, cujus ſinus eſt æqualis GO; ſed arcus QN cum parvus ſit, ejus ſinus erit fere eidem æqualis, unde GO erit fere æqualis SF, ſed illa aliquantulum minor. Sed triangula rectangula GOC & SFC ſunt æquiangula quam proxime; nam NCQ angulus differentia angulorum NCG & SCF parvus eſt; adeoque ob OG fere æqualem SF ſed illa aliquantulum minorem, erit CG fere æqualis CS, ſed illa aliquantulum minor. Focus igitur alter Ellipſeos ſupra punctum G exiſtet, ſed parum ab illo diſtat. Quod ſi ducatur PL ad QG parallela, Punctum L erit etiam ſupra C, ſed parum ab illo diſtans, unde punctum L & alter Ellipſeos focus coincidunt fere; ſed eſt angulus PLA æqualis NCA Anomaliæ mediæ; adeoque ſi à loco Planetæ in ſua orbita, ducatur linea ad ſuperiorem Ellipſeos focum, illa cum Ellipſeos Axe comprehendet angulum qui erit quam proxime tempori proportionalis.

Ubi anguli NCA & QCA vel SCF parum differunt, hoc eſt, ubi angulus NCQ exiguus eſt, & Excentricitas orbitæ parva, puncta G & L cum ſuperiore foco fere coincidunt. Adeoque hæc Theoria Telluris motui ſatis accurate reſpondet; ejus enim orbita parum à circulo recedit, aliis tamen Planetis, & ſpeciatim Marti, & Mercurio non æque congruit. Itaque Bulialdus ex quatuor locis Martis à Tychone obſervatis, oſtendit in primo & tertio Anomaliæ Quadrante, locum Martis in cælis eſſe promotiorem, quam per hanc Theoriam fieri debet. At in Quadrante ſecundo & quarto, Martis Anomaliam veram minorem eſſe, quam poſtulat hæc Hypotheſis, ejus itaque correctionem ſequentem adhibuit. Diametro AP, axi majoris Ellipſeos, deſcribatur circulus ADP, ſit AFL Anomalia Planetæ media, per L ducatur recta QLG, ad axem perpendicularis circulo occurrens in Q, juncta FQ occurret Ellipſi in Y, erit Y locus Planetæ Anomaliæ mediæ AFL reſpondens. Angulus autem Anomaliæ

Bulialdi correctio hujus Hypotheſis.

TAB. 37. *fig.* 6.

liæ mediæ correſpondens, ſcil. angulus AFQ expedite invenitur, capiendo angulum cujus Tangens ſit ad Tangentem anguli AFL, ut ſemiaxis major Ellipſis ad ſemiaxem minorem. Ex dato autem angulo, AFQ vel AFY, ſimiliter ut prius ex AFL invenitur Anomalia vera ASY.

Calculi quos ſupra expoſuimus, ſupponunt orbitarum ſpecies & Excentricitates ſicuti & poſitiones eſſe datas. In reliquis Planetis, rationem qua determinantur orbitæ, poſt hæc docebimus; in Tellure autem, ejus orbitæ ſpeciem & poſitionem ſequentibus methodis inveſtigamus.

Orbitæ Telluris ſpecies determinatur.

Primo obſervetur Solis diameter, & motus apparens; quando enim Terra eſt in Aphelio, Diameter Solis videtur omnium minima; cum Terra ibi maxime à Sole diſtet; in Perihelio, Soli maxime appropinquans Terricola, ejus diametrum maximam conſpiciet. Terræque à Sole diſtantiæ ſunt diametris apparentibus reciproce proportionales; recta quælibet SP exponat diſtantiam Telluris à Sole in Perihelio: fiat ut diameter Solis in Aphelio ad diametrum in Perihelio apparentem, ita PS recta ad SD quæ ſit in SP producta, hæc exponet diſtantiam Aphelii: biſecetur PD in C, erit CS Excentricitas orbitæ & C centrum Ellipſeos. Foco S & axe majore PD deſcribatur Ellipſis, erit illa ejuſdem ſpeciei cum ea, in qua movetur Tellus circa Solem. Eclipticæ autem punctum ubi diameter Solis maxima apparet; & oppoſitum ubi minima, poſitiones Apſidum oſtendent. Sed quoniam diameter Solis tam in Aphelio quam in Perihelio per aliquot dies vix mutari videtur, difficile admodum erit, poſitionem Apſidum per obſervationes Solaris diametri determinare. Ideo ſatius erit Aphelii & Perihelii diſtantias & poſitiones per obſervationes motus Solis elicere. Nam velocitas Telluris angularis, eique æqualis Solis apparens, eſt ſemper reciproce ut Quadratum diſtantiæ ſuæ à Sole, uti ſuperius à nobis demonſtratum fuit.

TAB 38. fig. 2.

Quo itaque ſpecies Ellipſeos, in qua Tellus movetur, determinetur, obſervanda eſt velocitas Solis apparens maxima & minima in Ecliptica; minima dicatur A & maxima B; & recta quælibet SP exponat diſtantiam Perihelii. Fiat

TAB. 38. fig. 3.

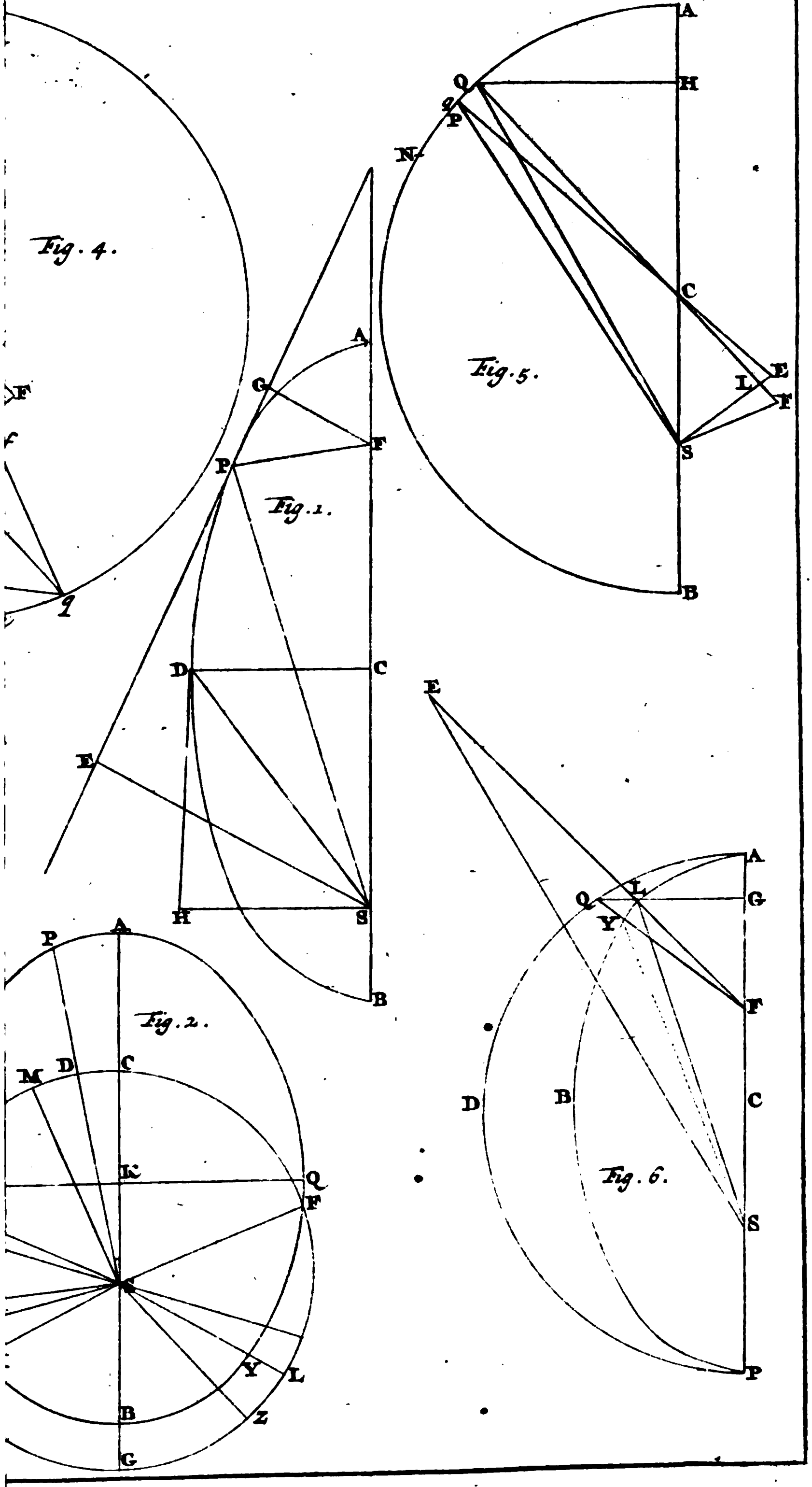
ut A ad B ita SP ad aliam C; & producatur SP ad D ut SD ſit media proportionalis inter SP & C. Exponet hæc linea diſtantiam Aphelii, adeoque ſi foco S & axe majore SD deſcribatur Ellipſis, erit illa ejuſdem ſpeciei, cum orbita Telluris. Nam ob PS, SD & C continue proportionales, erit PS quad. : DS quad. :: SP : C :: A : B. Præterea ſi obſerventur Solis loca in Ecliptica ubi ejus velocitas eſt maxima & minima, in iiſdem punctis locantur Apſides. Vel denique ſi obſerventur duo Solis loca in Ecliptica, ubi ejus velocitates ſunt æquales, & biſecetur arcus Eclipticæ interceptus, punctum biſectionis ejuſque oppoſitum loca Apſidum monſtrabunt. Verum hæc methodus poſtulat obſervationes admodum accuratas, quales non facile obtineri poſſunt.

Per Wardi Theoriam optime determinatur orbitæ Telluris ſpecies & Poſitio. Ex Cl. Wardi Theoria, certior elicitur methodus, qua per tres obſervationes Solis, temporumque intervalla notata, una opera determinari poteſt & orbitæ ſpecies, & Apſidum Poſitio, Sit ABPDC orbita Telluris, focus in quo Sol eſt, ſit S, alter F, Apſides AP, ſintque BCD tria loca Telluris in Ecliptica, quæ dantur ex obſervatis Solis locis iiſdem oppoſitis. Centro F, intervallo FM æquali Ellipſeos Axi majori deſcribatur circulus MHEL, cui occurrunt rectæ FB, FC, FD productæ in punctis G, H, E; ducantur quoque ex foco S rectæ SB, SC, SD, item SG, SH, SE; dantur anguli BSC, BSD, & CSD, eos enim metiuntur arcus Eclipticæ inter loca obſervata intercepti, ſed cum in hac Theoria, Tellus in Perimetro orbitæ ſuæ, ea lege feratur, ut angulos circa alterum focum F deſcribat temporibus quamproxime proportionales, dabuntur anguli BFC, BFD & CFD, capiendo ſingulos ad quatuor rectos, ut tempus inter obſervationes elapſum, ad integrum tempus Periodicum. Porro quoniam duplex anguli FGS, hoc eſt, angulus FBS, eſt differentia angulorum BFA & BSA, hoc enim ſupra oſtenſum fuit; item, duplex anguli FHS, hoc eſt, angulus FCS eſt differentia angulorum CFA & CSA; differentia angulorum BFC & BSC, erit æqualis 2FGS + 2FHS; ſed quia dantur anguli BFC, BSC, dabitur eorum differentia,

TAB. 38. fig. 4.

qua-

TAB. XXXVII.



quare dabuntur angulorum FGS & FHS summa. Est autem angulus FGS differentia angulorum BFA & GSA; & angulus FHS est differentia angulorum HFA & HSF; quare anguli FGS & FHS, æquales erunt differentiæ angulorum BFC & GSH: sed dantur anguli BFC & summa angulorum FGS & FHS, quare dabitur angulus GSH; eodem modo, dabitur GSE angulus. Similiter est duplex FES differentia angulorum DFA & DSA; item duplex FHS differentia angulorum CFA & CSA; unde 2 ang. FES−2 PHS, erunt æquales differentiæ angulorum CFD, CSD; sed dantur anguli CFD, CSD, unde dabitur semissis differentia eorundem, scil. angulus FES−FHS; sed angulus FES−FHS, est differentia angulorum CFD & HSE; sed datur angulus CFD, & FES−FHS quoque datur; quare dabitur angulus HSE; dantur itaque omnes anguli ad focum F, scil. BFC, BFD, & CFD, dantur etiam omnes anguli ad focum S, scil. BSC, BSD, CSD, item GSH, GSE, & HSE; hisce præmissis.

Exponatur SH per numerum quemlibet, *v. gr.* 100000. Producatur ES donec peripheriæ circuli occurrat in L, jungantur HL, LG, & HG; in triangulo HSL, datur angulus HSL complementum anguli noti ESH ad duos rectos, item angulus SLH semissis anguli EFH, *per* 20. *El.* 3. datur etiam latus HS 100000, quare dabitur SL; unde in triangulo SLG, datur angulus LSG qui est deinceps angulo noto ESG & angulus SLG semissis anguli EFG, *per* 20. *El.* 3. item latus SL, quare dabitur latus SG. In triangulo HSG dantur latera HS, SG, & angulus HSG quare dabitur latus HG, & angulus SHG. In triangulo isoscele HFG, datur angulus HFG, & basis HG, quare invenietur HF æqualis Axi majori Ellipseos, & angulus GHF, quo ab angulo SHG ablato, dabitur angulus FHS. Denique in triangulo FHS, ex datis FH, HS, & angulo FHS, invenietur SF Excentricitas orbitæ, & angulus HSF; à quo si subtrahatur HSC angulus æqualis FHS, restabit CSF angulus, qui Axis positionem & loca Apsidum ostendet.

Hæc methodus supponit angulos ad focum superiorem F descriptos esse temporibus proportionales, quod verum non est, at in Telluris orbita, parum Excentrica, anguli ad focum superiorem revera descripti, tam parum differunt ab iis, qui sunt temporibus proportionales, ut nullus exinde potest oriri sensibilis error in determinanda specie & positione orbitæ.

Vir celeberrimus Edmundus Halley, quem, ob præclara in Astronomia inventa, omnis laudabit posteritas, methodum excogitavit nulli motus Theoriæ aut Hypothesi innixam, qua solummodo per observationes, orbitæ Telluris species atque positio determinetur.

TAB. 38. fig. 5. Sit S Sol, ABCD orbis Terræ, P Planeta Mars (qui in hanc rem plurimis de causis longe est præferendus) Primo observetur verum tempus & locus, quo Mars opponitur Soli, tunc enim Sol & Terra coincidunt in linea recta cum Marte, vel (quod fere semper accidit) si habuerit Latitudinem, cum puncto, ubi perpendicularis à Marte in planum Eclipticæ incidit. Sic in figura S A & P puncta sunt in linea rectà; cum autem Martis Periodus constat diebus 687, post illud tempus ad idem punctum P, è Sole conspicietur; ubi in priore observatione Soli opponebatur. Terra vero cum non revertatur ad A nisi post 730½ dies, cum Mars est denuo in P, punctum B tenebit, Solemque in linea SB; Martem vero in linea PB respiciet, ex observatis locis Solis & Martis, omnes anguli trianguli BPS dantur, & supposito PS constare partibus 100000; in iisdem partibus invenietur distantia SB, ejusque positio: pari ratione post alteram Martis Periodum, Terra existente in C, invenitur Longitudo lineæ SC, ejusque positio, nec dissimiliter linea SD, & ejus positio invenietur. Sic ergo deventum erit ad hoc Problema Geometricum; datis tribus lineis in uno Ellipseos foco coeuntibus, tam Longitudine quam positione, invenire Longitudinem transversæ diametri, ejus positionem & focorum distantiam. Quod Problema expedire docent Geometræ, & quo pacto construitur, nos quoque in sequentibus ostendemus.

LE-

Lectio XXV.

De Temporis Æquatione.

LIcet Tempus in sua natura absolute quantum sit, præcipuas Quantitatis affectiones, æqualitatem scil. inæqualitatem & proportionem admittens, ut tamen ejus quantitas a nobis cognoscatur, advocandum est motûs subsidium, tanquam mensura, qua temporum quantitates æstimemus, & inter se conferamus; adeoque tempus ut Mensurabile motum connotat. Si enim res omnes immotæ perstarent, nullo pacto quantum effluxisset temporis, possumus percipere, sed rerum ætas indiscreta laberetur. *Motus Temporis mensura.*

Cæterum quia tempus æquo semper fluit tenore, is motus ejus quantitati mensurandæ maxime accommodatus censetur, qui in se summe simplex & uniformis est, & æqualiter semper progreditur, adeo ut mobile ejus vi incitatum (saltem quoad ad motus sui Periodos) æqualem constanter impetum servet, & per æquale spatium æquali tempore decurrat. *Propria Temporis mensura est motus Uniformis.*

Ad communem usum eligendus est motus aliquis maxime notabilis, cunctis obvius & in omnium oculos incurrens, qualis est siderum motus, imprimis Solis & Lunæ, qui proinde non tantum communi generis humani suffragio, ad hoc suffectus, sed Divino Creatoris nostri consilio, nobis datus est huic usui; à Deo enim pronunciatum legimus. *Fiant Luminaria in Firmamento, & dividant diem ac noctem, & sint in signa & tempora, & Dies & Annos.* Per motus itaque cælestes, & præcipue illum Solis apte distinguuntur tempora. Quare *Solis & Lunæ motus tanquam idonea temporis mensur nobis dati.*

Solem quis dicere falsum
Audeat.

Audent hoc Astronomi, qui subtili indagine deprehenderunt, Solis motum uniformem non esse, sed illum nunc gradum remittere, nunc accelerare observant; adeoque tempus verum quod æquabiliter semper fluit, non potest accurate per ejus motum connotari.

Hinc

Distinctio inter Tempus Apparens & verum. Hinc Tempus quod Sol motu suo commonstrat, quodque apparens dicitur, diversum erit ab illo quod æquabili semper labitur tenore, & ab Astronomis verum & æquale vocatur; ad cujus normam omnes motus cælestes sunt ordinandi. Nam ex inæquali Solis motu, ejusque via ad Æquatorem obliqua, sequitur, quod neque dies neque horæ erunt inter se æquales, uti hac ratione ostendemus.

Dies Solaris æqualis est illi temporis spatio quod labitur, dum per rotationem Telluris circa suum Axem, Planum alicujus Meridiani à centro Solis digrediens volvitur, usque dum ad idem recurrit. Seu est tempus inter unam Meridiem & illam quæ proxime sequitur. Si Telluri nullus alius competeret motus, præter illam circa Axem rotationem, dies omnes Solares essent inter se & revolutioni Telluris præcise æquales. Sed quia interea dum Tellus circa Axem rotatur, in propria etiam orbita versus orientem progreditur, cum Meridianus aliquis integram revolutionem compleverit, non tamen ejus planum per Solem transibit, uti sequenti figura manifestum fiet. *Tab. 38. fig. 6.* Sit enim S Sol, AB portio orbitæ Telluris, linea MD designat Meridianum aliquem cujus planum productum per Solem transit, cum Terra est in A. Progrediatur deinde Tellus in sua orbita per arcum AB ad B, in tempore quò completur una Revolutio Telluris circa Axem, unde ob absolutam revolutionem, Meridianus MD erit in situ *md* ad priorem ejus situm parallelo, adeoque nondum per Solem transibit, neque incolis qui sub Meridiano illo degunt, fiet Meridies, sed opus est ut motu angulari *d*B*f* ulterius feratur, ut per Solem transeat. Exinde fit ut dies omnes Solares sunt una revolutione Telluris circa Axem longiores. *Ostenditur dies Solares esse inæquales.* Si Meridianorum plana seu Axis Telluris, ad planum orbitæ normaliter insisterent, & Tellus æquabili semper motu orbitam suam decurreret, post peractam à Meridiano aliquo revolutionem, ob *md* ad MD parallelam, angulus *d*B*f* esset æqualis angulo BSA, & arcus *df* similis arcui AB, & ob tempora semper æqualia, arcus A B & proinde angulus *d* B *f* esset sibi semper æqualis, & proinde dies omnes Solares æquales sibi invicem essent,

tem-

tempusque apparens cum æquabili congrueret. Verum horum casuum neuter obtinet in natura locum, nec enim terra æquabiliter orbitam suam decurrit, sed in Aphelio minorem arcum, in Perihelio majorem, æquali tempore describit, præterea Meridianorum plana non sunt ad Eclipticam, sed ad Æquatorem normalia; adeoque motus angulares *dBf* qui præter revolutionem integram spatio diei Solaris accedunt, per arcum AB mensurari non debent, & utraque de causa, inter se inæquales hi anguli erunt; diesque Solares inæquales efficiunt.

Idem ex Solis motu apparenti ostenditur. Sed hoc fortasse, Auditores, clarius vobis elucescet, si à reali Telluris motu, ad apparentem Solis transeamus, is enim pro mensura temporis apparentis nobis datus est; sciendum itaque diem Naturalem seu Solarem esse illud temporis spatium, quo per revolutionem primi mobilis apparentem, tota Æquatoris circumferentia successive per Meridianum transit, & insuper arcus ejusdem respondens motui Solis apparenti in orientem interea facto.

Arcus Æquatoris diurni non sunt æquales arcubus Eclipticæ diurnis. Tab. 38. fig. 7. At arcus Æquatoris transiens per Meridianum cum arcu Eclipticæ diurno non est illi semper æqualis, sed eo modò major, modò minor, etiamsi Solis motus in Ecliptica æquabilis esset, quod oritur ex obliqua Eclipticæ ad æquatorem positione, uti patet ex adjuncta figura. Sit ♈♋ Quadrans Eclipticæ; ♈E Quadrans æquatoris, Arcus ♈A sit unius gr. qui est quamproxime æqualis motui Solis diurno in Ecliptica, nam motu medio arcum 59′: 8″ describit quotidie Sol: sitque AB Arcus circuli declinationis per Solem transiens inter Eclipticam & Æquatorem interceptus. In triangulo ♈BA rectangulo, ex datis ♈A, 1. gr. & angulo A♈B inclinatio Eclipticæ cum Æquatore 23°. 30′. Invenietur latus ♈B, 54′. 1″. sit deinde arcus Eclipticæ ♈C, 89°, ex illo elicietur arcus Æquatoris ♈D, 88°. 54′: 34″. At quando arcus ♈♋ sit 90°, arcus Æquatoris ♈D illi respondens est etiam 90, unde erit arcuum ♈E, ♈D differentia DE. 1°: 5′: 26″; Arcuum itaque ♈B, DE differentia erit 10′. 25″. licet arcus Eclipticæ ♈A & C♋ quibus respondent, sint æquales. Ex quo manifestum est æqualibus Eclipticæ arcubus inæ-

Ostenditur prima inæqualitatis dierum causa.

 quales

quales Æquatoris arcus respondere, & consequenter arcus Æquatoris diurnos qui per Meridianum transeunt & diem Solarem metiuntur esse inter se inæquales.

Secunda inæqualitatis dierum causa

Sed non nascitur, ex hac unica causa, diurnorum arcuum Æquatoris inæqualitas, nam ipse Solis motus in Ecliptica apparens inæquabilis est. Tardiusque incedit diutiusque commoratur Sol in signis Borealibus, quam in Australibus per octo integros dies, unde etiamsi nulla esset viæ Solaris obliquitas, ex hac sola causa arcus Æquatoris diurni æquales esse non possunt; adeoque multo magis se prodit dierum inæqualitas, cum ad id concurrunt duæ prædictæ causæ, Solis scil. inæquabilis motus, & Eclipticæ obliquitas, quæ licet interdum sibi mutuo officiunt, & inæqualitatem minuunt, ut fit quando arcus diurni Æquatoris decrescunt propter obliquitatem Eclipticæ, sed crescunt propter accessum Solis ad Perigeum, aut contra, aliquando tamen concurrunt ad inæqualitatem augendam, & neutra illarum ab altera pendet, sed utraque suum sigillatim sortitur effectum.

Motus itaque apparens Solis in orientem cum inæquabilis sit, ad tempus æquabile (quod eodem tenore semper fluit) mensurandum idoneus non est; adeoque nec dies naturales & apparentes aptæ erunt motuum cælestium mensuræ, de iis loquor qui à motu Solis non pendent. Ideoque necesse fuit Astronomis pro his Solaribus diebus alios medios & æquales substituere, in quos motus cælestes distribuerent, & hi motus, cum ad tempus æquale sint collecti, oportet tempus illud rursus in apparens convertere, ut à nobis observentur, qui tempora Solis motu apparenti metimur & numeramus; & è contra si aliquid Phænomenon cæleste, Eclipsis puta, tempore apparente observetur, & secundum illam observationem Tabulæ Astronomicæ sunt examinandæ, necesse erit tempus apparens in æquale convertere, aliter observata Phænomena à computatis different.

Determinatio dierum mediarum seu æqualium.

Quoniam nullum novimus in natura corpus naturale, quod motum perfecte æquabilem conservat, & talis tamen mo-

motus solus idoneus est ad dies horasque æquales connotandas. Convenit ut fingamus aliquod sidus quod in Æquatore versus orientem semper incedat, & motum suum nusquam intendat aut remittat, sed uniformiter Æquatorem percurrat eodem præcise tempore quo Sol Eclipticam describere videtur. Talis sideris motus tempus æquale & verum rite repræsentabit, ejusque motus in Æquatore diurnus esset 59′: 8″. Qualis scil. est motus medius Solis in Ecliptica, & proinde dies æqualis & medius per appulsum hujus sideris ad Meridianum determinatus, æqualis erit tempori quo tota circumferentia Æquatoris seu gradus 360 per Meridianum transeunt, & insuper 59′: 8″, cumque hoc additamentum semper idem maneat, dies omnes medii erunt inter se æquales.

Cum Sol inæqualiter secundum Æquatorem, orientem versus promoveatur, aliquando citius hoc sidere Meridianum attinget, aliquando serius ad eundem appellet. Et differentia est illa quæ inter tempus apparens & æquabile intercedit. Differentia autem hæc nota erit, ex datis in Æquatore loco sideris, & puncto, quod una cum Sole ad Meridianum pervenit. Arcus enim interceptus si in tempus convertatur, ostendet differentiam, quæ est inter tempus apparens & æquale. Hæc Differentia dicitur *Temporis Æquatio*, estque Tempus illud quod labitur dum Arcus Æquatoris inter punctum definiens Solis Ascensionem Rectam & locum sideris ficti interceptus per Meridianum transit. *Æquatio Temporis quid?*

Sit ÆQ Æquinoctialis circuli portio, EC Ecliptica, in qua sit S locus Solis verus in Ecliptica, SA Declinationis circulus per Solem transiens Æquatori occurrens in A, erit A punctum Æquatoris quod simul cum Sole ad Meridianum pervenit. Sit *m* locus sideris medio motu in Æquatore progredientis, & cum Sol ad Meridianum pervenerit sidus fictum ab illo distabit arcu *m*A. Quod si punctum *m* sit puncto A orientalius, serius Meridianum attinget quam A, Tempusque apparens præcedet medium seu æquale. At si punctum *m* sit ad occidentem puncti A, citius illud ad Meridianum revertitur, eritque tempus apparens æquabili posterius. *Quando tempus apparens præcedit verum.* TAB. 38. *fig.* 8. 9. *Quando sequitur verum.*

ſterius. Arcus autem Æquatoris A*m* in tempus converſum eſt æquatio temporis, quæ addenda eſt tempori apparenti aut ab illo ſubtrahenda, prout punctum *m* orientalius eſt aut occidentalius puncto A, ut fiat Tempus æquabile. Ut ſitus puncti A reſpectu ipſius *m*. & arcus A*m*, quantitas dignoſcatur, capiatur in Æquatore arcus ♈*s* vel ♎*s* æqualis arcui ♈S vel ♎S in Ecliptica, unde arcus *sm* æqualis erit diſtantiæ inter Solis locum verum & medium, quæ proinde ex dato Anomaliæ gradu dabitur: Arcus vero A*s* eſt differentia inter trianguli rectanguli ♈SA Hypotenuſam ♈S & ejuſdem baſim ♈A & ea per Trigonometriam etiam dabitur. Eſt præterea arcus A*m* æqualis ſummæ vel differentiæ arcuum A*s*, *sm*, quæ proinde ex illis notis dabitur.

Æquatio Temporis duabus conſtat partibus.

Harum partium effectus ſigillatim explicantur.

Porro animadvertendum eſt, in primo & tertio Eclipticæ Quadrante, punctum *s* cadere ad orientem reſpectu puncti A; adeoque arcum A*s* in tempus converſum ablatitium eſſe, ſerius enim ad Meridianum appellit punctum *s* quam A. In ſecundo autem & quarto Eclipticæ quadrante, punctum *s* cadit ad occidentem puncti A, ideoque citius per Meridianum tranſit quam A & proinde arcus A*s* in tempus converſus, adjectitius & tempori apparenti addendus eſt, ut habeatur tempus quo punctum *s* Meridianum attingit. Sit *v. gr.* Arcus A*s* 2 gr. ut fit, quando Sol tenet viceſimum Arietis gradum, hic arcus in tempus converſus eſt ſcrup. 8, adeoque tempori apparenti adjiciendi ſunt ſcrupuli 8, ut habeatur tempus quo punctum *s* Meridianum tenet.

Porro in Primo Anomaliæ Solis ſemicirculo, hoc eſt, dum Sol in præſenti ſeculo tendit à ſeptimo gradu ♋ ad ſeptimum Capricorni, medius Solis motus major eſt ejus motu vero; adeoque locus Solis medius præcedit ejus locum verum, unde in toto hoc ſemicirculo punctum *m* erit ad orientem puncti *s* & arcus *ms* in tempus converſus detrahendus eſt à tempore quo punctum *s* Meridianum tenet. At in altero Anomaliæ ſemicirculo ſcil. poſtquam Sol Perigeum reliquerit, motus medius minor eſt vero, & locus

So-

Solis medius verum sequitur, unde punctum *m* cadet ad occidentem puncti *s*, illudque citius hoc ad Meridianum appellet, & propterea arcus *m s* in tempus conversus adjiciendus est tempori in quo *s* Meridianum occupat. Dato autem temporis intervallo inter appulsus punctorum *m* & *s* ad Meridianum, item intervallo inter appulsus punctorum *s* & A ad eundem, dabitur intervallum temporis inter appulsus puncti *m* & puncti A ad Meridianum; hoc est, dabitur intervallum temporis apparentis & veri seu æqualis, Quod est temporis Æquatio.

Ad Tempus perpetuo æquandum, Artifices condunt duplicem tabulam, una pro arcu *s m* quæ cum Anomalia Solis est adeunda, & si punctum *m* sit ad occidentem puncti S, notant Æquationem signo additionis, sin secus, apponunt signum subductionis. Altera tabula construitur pro arcu SA quæ est differentia inter locum Solis in Ecliptica & ejus Ascensionem Rectam cujus Æquationes similiter notantur signo Additionis vel Subductionis, prout punctum *s* est ad occidentem vel orientem puncti A, harum Æquationum summa, si utraque fuerit ejusdem affectionis; hoc est, si simul adjectitiæ fuerint vel simul ablatitiæ; vel differentia, si fuerint diversæ affectionis, componit absolutam temporis Æquationem. *Duæ Æquationum Tabulæ.*

Construunt etiam tabulam Artifices ex harum utraque compositam, quæ temporanea tantum est & uni circiter seculo sine sensibili errore inserviens, nam per unum fere seculum idem Anomaliæ Solis gradus, in eundem Eclipticæ gradum incidit; adeoque pro spatio quinquaginta annorum, Æquationes duæ in unam componi possunt. Sed ob motum Præcessionis Æquinoctiorum, Apogeon Solis, seu potius Aphelion Terræ, locum suum in Ecliptica mutat, & in orientem una cum fixis progreditur; adeoque diversis seculis, idem Anomaliæ gradus ad diversa Eclipticæ puncta referentur, & proinde una Tabula pro omnibus seculis non sufficiet. *Tabula Æquationis Temporis.*

Sidus fictum, cujus motus tempus æquabile metitur, semper versus orientem uniformiter progreditur. At punctum *Quando dies Solares incipiunt fieri mediis longiores.*

A quod Solis Aſcenſionem rectam definit, & tempus apparens connotat, ultra citraque punctum *m* libratur, & nunc ad orientem, nunc ad occidentem Sideris ficti aliquando etiam cum illo coincidens invenitur; unde quando puncti A motus relativus reſpectu iſtius Sideris ſit verſus orientem, punctum A magis in orientem promovetur quam ſidus, & dies fiunt mediis longiores: nam quo celerius verſus orientem tendit punctum A, eo dies Solares fiunt longiores, nam præter revolutionem cæli integram, majus eſt additamentum arcûs quod diei Solari accedit, ob majus ſpatium verſus orientem confectum. Hinc ſequitur, quod quamprimum motus relativus puncti A incipit fieri verſus orientem, dies Solares incipient quoque fieri mediis longiores; de motu relativo loquor qui fit reſpectu Sideris *m*, nam ejus motus abſolutus ſemper fit verſus orientem. At quando punctum A ultra *m* verſus orientem delatum rurſus ad Sidus *m* accedere incipit, ejuſque reſpectu ad occidentem tendere, tunc fiunt dies Solares mediis breviores; ubi autem maxime à Sidere *m* ad orientem aut occidentem receſſerit A, ibi dies Solares fiunt mediis æquales, & in illis punctis maximæ fiunt Temporis Æquationes. Ubi autem motus puncti A verſus orientem fit velociſſimus, ibi dies fiunt omnium longiſſimi. Quo autem in puncto, motus hic fit tardiſſimus, hoc eſt, ubi motus relativus verſus occidentem maximus eſt, ibi dies ſunt breviſſimi.

Quando mediis æquales fiunt.

In hoc noſtro ſeculo, cum Sol 10. gr. Scorpionis tenet, punctum A à Sidere *m* maxime diſtat verſus occidentem, ejuſque diſtantia eſt 4. gr. ſcrup. 2. ſecund. 45. & proinde æquatio maxima eſt minut. horar. 16. ſecund. 11. Inde incipiunt dies Solares creſcere; uſque dum Sol ad gradum Aquarii 22½ pervenit. Ubi maxime in orientem promotum eſt punctum A, & à Sidere *m* diſtat gr. 3. ſcrupl. prim. 42½. Et maxima temporis Æquatio eſt 14′:50″. Exinde motus relativus puncti A eſt verſus occidentem, uſque dum Sol gradum Tauri 24^{tum} attingit, ubi punctum A eſt 1. gr. min. 1½ Sidere *m* occidentalius; & Æquatio temporis maxima eſt 4′:6″, exinde rurſus verſus orientem recedit punctum A; uſ-

Quibus Anni temporibus fiunt maxime Æquationes.

uſque dum Sol occupat Leonis gradum $3\frac{1}{2}$, ubi ab *m* diſtat gr. 1. minutis $28\frac{1}{2}$ & Temporis Æquatio eſt 5. min. 53. ſec. inde demum motus ejus eſt verſus occidentem; uſque dum Sol ad grad. Scorpionis 10. pervenerit, ex quo ad orientem continuo tendet punctum A. Patet porro quotieſcunque puncta A & *m* coincidunt, coincidere quoque tempus apparens & medium.

Hinc ſi habeatur Horologium Automaton affabre elaboratum, & Pendulo inſtructum, cujus motus ad tempus æquale ſeu medium ordinatur, & Index ſimul cum tempore æquali congruat. Horologium hoc diverſam ſemper à Sole monſtrabit horam, præterquam quater in anno. Scil. circa diem Aprilis quartum, Junii ſextum, Auguſti viceſimum, & Decembris decimum tertium. Aliis omnibus temporibus, Hora Horologii Solarem vel antecedet, vel ſequetur; circa autem Octobris diem viceſimum tertium, omnium maxime à Sole differt, ubi ejus motus Solari lentior erit minutis 16. ſecund. 11.

Si quæratis, in quibus punctis, Æquationes Temporis ſiunt maximæ. Hujus Problematis ſolutionem nobis impertivit celeberrimus *Halleius*, vir ob præclara inventa, nunquam ab Aſtronomis ſine honore nominandus, ad quam ſolutionem ſequentia præmittimus.

LEMMA.

Si figura plana in planum aliquod Orthographice projiciatur, quod ſit demittendo à ſingulis ejus punctis in planum ſubjectum perpendiculares. Figuræ in plano projectio erit ad ipſam figuram, ut Coſinus Inclinationis planorum ad radium.

Nam figura quævis poteſt reſolvi in parallelogramma vel triangula, quorum baſes ſunt parallelæ communi planorum ſectioni, adeoque erunt parallelæ plano in quod projiciuntur, unde baſes & earum projectiones erunt ſibi ipſis æquales & parallelæ, uti à nobis in Lect. XIII. oſtenſum fuit. Sed perpendiculares à verticibus triangulorum in baſes demiſſæ, ſunt etiam ad communem planorum ſectionem perpendiculares, *per* 29. *El.* 1. Et proinde perpendicularium ad planum inclinatio æqualis eſt inclinationi planorum ad ſe invicem.

cem. Harum itaque perpendicularium projectiones sunt ad ipsas perpendiculares, ut *Cosinus* inclinationis planorum ad radium. Quodlibet igitur triangulum vel parallelogrammum projicitur in aliud, cujus basis est æqualis basi ipsius trianguli aut parallelogrammi quod projicitur, & cujus altitudo est ad altitudinem trianguli, ut Cosinus inclinationis Planorum ad Radium. Sed triangula & parallelogramma quorum bases sunt æquales, sunt ut perpendiculares à verticibus in bases demissæ. Projectio igitur trianguli cujuslibet est ad ipsum triangulum in data ratione; adeoque omnium triangulorum Projectiones (hoc est totius figuræ Projectio) sunt ad omnia triangula, in quæ resolvitur figura, in eadem ratione, scil. ut Cosinus inclinationis Planorum ad Radium.

Si orbita Telluris Orthographice, demissis perpendicularibus in planum Æquatoris, projiciatur: Projectio fiet Ellipsis, in cujus peripheria semper movetur punctum quod est extremitas lineæ à Tellure in planum Æquatoris perpendiculariter demissæ; & hoc punctum motu suo signabit Telluris Ascensionem rectam, seu motum ejus secundum Æ-

Tab. 35. fig. 1. quatorem è Sole visum, cui semper æqualis est Solis Ascensio recta è Tellure visa. Sit ♈ A ♎ C Ellipsis in quam projicitur orbita Telluris, S punctum in quod Solis centrum projicitur; ♈ S ♎ communis sectio Æquatoris & Eclipticæ, A punctum quod perpendiculum à Tellure Ellipsi offendit, erit ♈ S A angulus quem metitur Solis Ascensio recta. Dico jam punctum illud A, quod signat motum Ascensionis rectæ, ita in Ellipsi ♈ A ♎ C moveri, ut describat circa S Areas temporibus proportionales. Dato enim tempore, moveatur A per arcum Ellipticum AB, ducantur AS, BS, & trilineum ASB erit projectio correspondentis Areæ quam Terra in plano Eclipticæ circa Solem eodem tempore describit. Et proinde erit Projectio ASB ad Aream correspondentem in orbita Telluris, ut Cosinus Inclinationis Æquatoris & Eclipticæ ad Radium; sed in eadem ratione est tota Area Elliptica ♈ A ♎ C ad totam orbitam Telluris, unde permutando, erit trilineum ASB ad totam Aream Ellipticam, ♈ A ♎ C, ut Area in orbita Telluris circa Solem descripta

ad

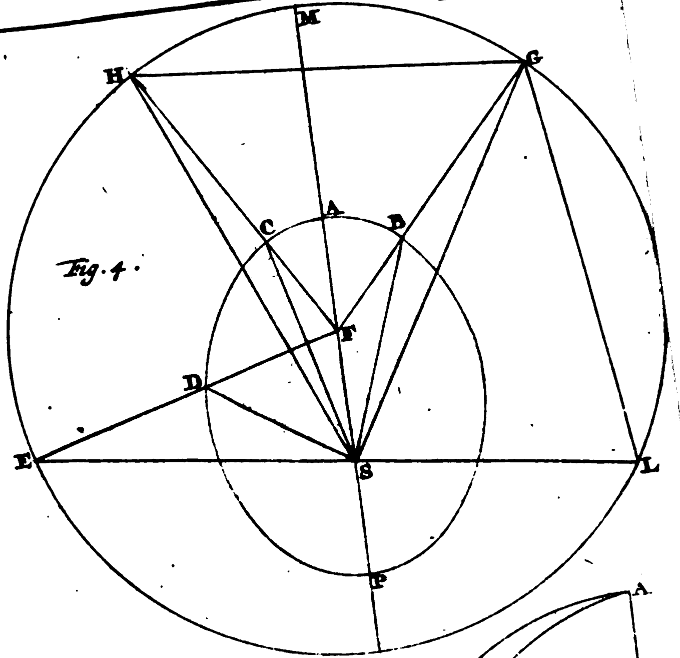


Fig. 4.

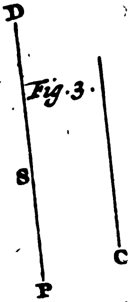


Fig. 3.

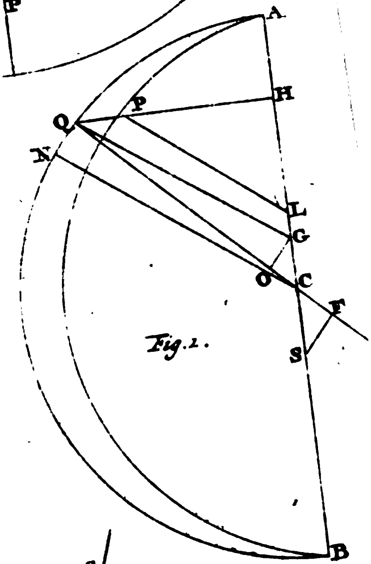


Fig. 1.

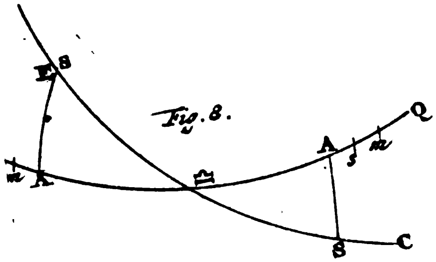


Fig. 8.

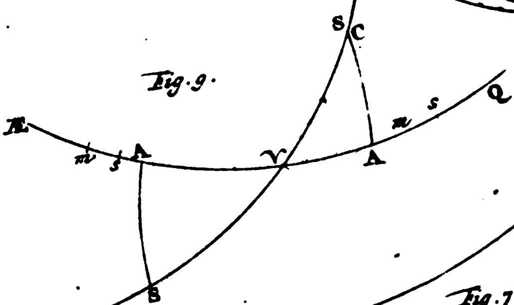


Fig. 9.

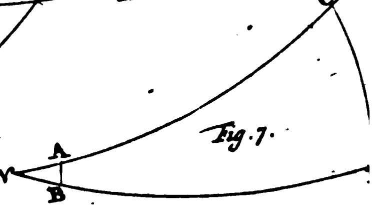
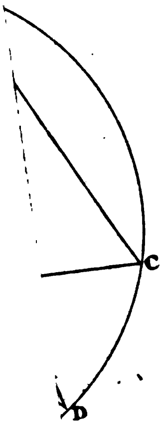


Fig. 7.



ad totam orbitam Telluris, hoc eſt, ut tempus quo deſcribitur Area illa in orbita Telluris, vel quo deſcribitur trilineum ASB in projectione, ad tempus Telluris Periodicum, vel tempus quo deſcribitur tota Ellipſis ♈ A ♎ C. Eâ itaque ratione circa punctum S movetur punctum A ut deſcribat Areas temporibus proportionales.

Iiſdem poſitis, centro S, intervallo SA, quod ſit medium proportionale inter Ellipſeos ſemiaxem majorem & minorem, deſcribatur circulus, ejus Area æqualis erit Areæ Ellipſeos uti ex Conicis demonſtrare facile eſt. Circulus hic Ellipſim ſecabit, in quatuor punctis E, F, G, H. Hæc puncta oſtendent Aſcenſiones Solis Rectas, ubi Temporis Æquationes fiunt maximæ. In Peripheria circuli moveri concipiatur punctum aliquod M uniformiter, ejus motus Sideris noſtri ficti *m* (*fig.* 8. 9. *Tab* 38.) motum repræſentabit, & deſcribet circa punctum S ſectores circulares temporibus proportionales Cumque Area totius circuli ſit Areæ totius Ellipſeos æqualis, erunt Areæ ſectorum circuli & Areæ Ellipticæ circa S temporibus æqualibus deſcriptæ ſemper æquales. Ponamus itaque punctum M in Peripheria circuli, & punctum in Peripheria Ellipſeos ſignans Solis Aſcenſionem rectam ſimul in recta SM incidere, quæ puncta poſtea ſint in *m* & A, erit Area LSA Elliptica æqualis Areæ circulari MS *m*; cumque arcus M *m* ſit extra Ellipſim, erit angulus MS *m* minor angulo MSA, quorum angulorum differentiam metietur arcus *m* A, qui eſt Temporis Æquatio. Cum punctum ſignans Aſcenſionem rectam ad interſectionem circuli Ellipſeos pervenerit, ibi ejus motus circa Solem angularis æqualis erit motui puncti *m*. Sint enim Areæ *m*S*n*, ASF temporibus quam minimis ſimul deſcriptæ, erunt illæ æquales: adeoque arcus *q*F ductus in SF æqualis erit arcui *mn* ducto in S*m*, unde ob æquales SF, S*m*, æquales quoque erunt arcus FQ, *mn*; in puncto igitur F motus Aſcenſionis rectæ æqualis eſt motui Sideris ficti *m*, idem ſimiliter oſtendetur in punctis G, H, E. Sed prius oſtenſum fuit, in iis punctis, ubi motus Aſcenſionis rectæ æqualis eſt motui Sideris ficti, ſeu Telluris medio, ibi Æquationes eſſe maximas. In punctis ita-

TAB. 39. *fig.* 2.

itaque F, G, H, E Æquationes sunt maximæ.

TAB. 39. fig. 3. Si quærantur puncta ubi dies sunt longissimi, vel brevissimi; hujus Problematis solutionem nobis quoque suppeditavit idem nunquam satis laudandus *Halleius*, quæ talis est. Ellipsis ♈♋♎♑ sit projectio orbitæ Telluris ut prius, S punctum in quo Solis centrum, K centrum Ellipseos, producatur KS utrinque, ita ut KG & SH sint ad KS (quæ est projectio excentricitatis) ut Quadratum Radii ad Quadratum Sinus Obliquitatis Eclipticæ; per K ducatur ♈♎ parallela communi sectioni planorum Eclipticæ & Æquatoris, & huic ad angulos rectos ducatur ♋K♑ Per G ducatur GF & per H recta FH ad ♋♑, & ♈♎ parallelæ. Per S & K describatur Hyperbola cujus Asymptoti sunt FG, FH, hæc Hyperbola ejusque opposita CD Ellipsim in punctis quæsitis secabunt; hoc est, cum Sol est in punctis Eclipticæ respondentibus D & B, fiunt dies longissimi, & in B longiores sunt dies quam in D. Puncta autem quæ punctis A & C respondent, ostendent dies brevissimos; & in A quidem breviores sunt quam in C.

Cujus Demonstratio exinde patet, quod punctum Solis Ascensionem rectam signans, ita in Peripheria Ellipseos fertur ut describat Areas temporibus proportionales, uti ostensum est; adeoque ejusdem puncti velocitas angularis est ubique reciproce ut quadratum distantiæ ab S; velocitates igitur fiunt maximæ, ubi rectæ ex S minimæ in Ellipsim cadunt, & velocitates sunt minimæ ubi rectæ ex S in Ellipsim cadunt maximæ. At constat ex constructione; & *Prop. 62. lib. 5.* Conicorum Apollonii, Hyperbolas descriptas Ellipsim secare in punctis A & D, ubi rectæ SA & SD sunt maximæ, & in punctis B & C ubi SB, SC sunt minimæ; in iis enim punctis cadunt ex S, rectæ SB, SC, SD, SA ad curvam perpendiculares. Hinc motus Solis, secundum Ascensionem rectam, erit velocissimus in B & D, ideoque dies fiet longissimus, & in C & A tardissimus, & in iis punctis dies fit brevissimus.

LECTIO XXVI.

De Reliquorum Planetarum Theoriis.

POST explicatam motûs Annui Telluris Theoriam, methodumque traditam, qua orbitæ forma, Apsidumque positio determinantur; ex quibus cognitis, per Tabulas Astronomicas locus Telluris in Ecliptica è Sole visus, eique oppositus Solis locus nobis apparens, ad quodlibet tempus computari potest. Ad reliquorum Planetarum Theorias exponendas accedimus, quæ non nisi per motum Telluris prius cognitum inveniri possunt. *Theoria Planetarum fundantur in Theoria Terræ.*

Ante omnia, oportet Planetarum periodos, seu tempora, in quibus singuli circulationes absolvunt determinare; ad quod faciendum, notandum est, quando Planetæ superiores sunt in situ Achronicho; hoc est, quando in oppositione Solis videntur à nobis è Tellure eos spectantibus, apparent esse in eodem Eclipticæ puncto in quo ex Sole viderentur, si ibi constitutus fuisset oculus. Quinetiam cum inferiores in conjunctione cum Sole & in Solis disco spectantur; ex Sole visi oppositum Eclipticæ locum occupare conspicerentur. Quoties igitur Planeta aliquis superior in oppositione Solis videtur, locus ejus Geocentricus cum Heliocentrico coincidit. At quando inferior in conjunctione cum Sole, & in ejus disco cernitur, locus Heliocentricus oppositus erit loco Geocentrico, seu illi qui ex Tellure spectatur, præterea cum Planetæ inferiores sunt in maximis à Sole Elongationibus; Angulus ad Solis centrum inter rectas ad Terram & Planetam ductas comprehensus, æqualis est complemento Elongationis Planetæ à Sole, (nam in orbitis propemodum circularibus, linea orbitam tangens est perpendicularis ad rectam à Sole ad punctum contactus ductam) ac proinde dabitur ille angulus, sed datur punctum Eclipticæ in quo Tellus in illo momento videbitur; unde dabitur quoque punctum in quo Planeta inferior è Sole conspicitur. In his igitur positionibus dabuntur Planetarum loca Heliocentrica. *Locus Geocentricus & Heliocentricus, cum Planeta superior est in oppositione Solis, coincidunt.*

Temporum Periodicorum prima Determinatio. Si itaque Planeta aliquis superior, *v. gr.* Jupiter observetur cum est in oppositione Solis, iterumque rursus cum ad oppositum Solis pervenit; dabitur arcus quem Planeta è Sole spectatus interea temporis percurrit; fiat itaque ut arcus ille ad totam circumferentiam, ita tempus inter observationes elapsum, ad quartum, dabitur exinde quamproxime tempus Planetæ Periodicum, & similiter ex datis inferiorum locis Heliocentricis eorum Periodos quamproxime colligere licebit; quamproxime dico, nam calculus supponit motum Planetæ esse in circulo & per omnem periodum æquabilem; quod verum non est, unde non accurate hac methodo dabuntur Planetarum periodi.

Eorundem accuratior Determinatio. Sequenti igitur methodo accuratius investigari possunt Planetarum Tempora Periodica. Observetur Planeta quilibet bis in eodem nodo; id est, binæ fiant observationes, quando Planeta, ad eandem orbitæ partem, nullam habuerit latitudinem, quod tunc solum potest contingere, quando Planeta est revera in nodorum aliquo: Tempus inter binas observationes elapsum, æquale erit tempori Planetæ Periodico. Nam cum Planetæ omnes moveantur in orbitis, quorum plana ab Eclipticæ plano diversa sunt, & Sol in communi omnium orbitarum foco existat, orbitæ omnes Eclipticæ planum secabunt in lineis per Solem transeuntibus, quæ ad Eclipticam productæ nodos duos ostendent; & Planeta non nisi semel in integra periodo in nodorum aliquo spectari potest. Nodi autem vel quiescunt vel tarde admodum moventur; adeo ut spatio unius periodi tanquam quiescentes haberi possunt. Unde ex dato tempore inter duos proximos Planetæ ad eundem nodum appulsus, innotescet Planetæ Periodus.

Tab. 39. fig. 4. His iisdem observationibus, cognita prius Theoria motus Telluris, obtineri potest lineæ Nodorum positio, seu puncta Eclipticæ in quibus linea Nodorum eidem occurrit. Sit ATB orbita Telluris, CND Planetæ orbita, NS*n* Nodorum linea: Sitque in prima observatione Tellus in T, & Planeta observetur in N. Cumque Planetæ locus è Terra visus per observationem innotescit; Solis autem locus ad illud

lud tempus ex cognitâ Telluris Theoria datur; exinde arcus Eclipticæ inter duo loca interceptus seu mensura anguli N T S dabitur. In secunda observatione, sit Tellus in t, & Planeta in eodem Nodo N, unde similiter invenietur angulus N t S.

Nodorum positiones determinantur.

In triangulo rectilineo T S t, dantur T S, t S, & angulus T S t, ex nota Theoria Telluris; unde per Trigonometriam inveniri possunt anguli S T t & S t T, item latus T t, ab angulo itaque S T t dato, auferatur datus angulus N T S, & dabitur angulus N T t, ad angulum datum S t T, addatur angulus datus N t S, & dabitur angulus N t T; unde in triangulo N t T, dantur omnes anguli, cum latere T t prius invento, quare dabitur latus N T distantia Planetæ à Terra. Denique in triangulo N T S, dantur latera N T, T S, & angulus N T S observatione cognitus, exinde innotescet latus N S distantia Planetæ in nodo existentis à Sole, & angulus T S N qui positionem Nodorum ostendet. Nam notum est punctum Eclipticæ quod Tellus è Sole visa tempore observationis occupat, & notus est angulus T S N; quare quoque innotescet punctum Eclipticæ in quo Nodus N è Sole videtur, & punctum n huic appositum erit alterius Nodi locus, unde notus erit Nodorum situs inveniendus.

Inclinationes orbitarum determinantur.

Hac ratione investigatis Nodorum locis; possumus invenire inclinationem orbis Planetarii ad Eclipticam. Scil. ex dato loco Nodi, innotescet tempus quando Tellus è Sole visa idem punctum occupat, quod fit per ejus Theoriam; eodem tempore observetur Planetæ Latitudo Geocentrica, ejusque distantia à Nodo Opposito; erit tunc Latitudo Planetæ Heliocentrica, Latitudini observatæ æqualis, cum Planeta à Sole visus tantundem distat à Nodo. Sit enim C P D orbita Planetæ, N S n Nodorum linea, B N T portio orbitæ Telluris, in qua sit Tellus in N, scil. in linea Nodorum, observetur Planeta in P, eruntque Sol, Planeta, & Tellus omnes in plano orbitæ Planetariæ. A puncto P ad Eclipticam demittatur normalis recta P E, & in plano Eclipticæ ducatur recta N E. Planum trianguli N P E ad Eclipticam rectum erit, & angulus P N E erit Latitudo Planetæ observa-

Tab. 39 fig. 5.

 ta;

ta; per S ducatur Spf ad NP & pe ad PE parallelæ, & planum per Sp, pe erit ad planum NPE parallelum, & proinde ad Eclipticæ planum normale; adeoque Se communis sectio hujus plani cum Ecliptica erit ad NE parallela, quare ob Sp, Se parallelas ad NP, NE erit angulus pSe Latitudo Heliocentrica æqualis angulo PNE Latitudini Planetæ è Tellure observatæ, cum illa in Nodo invenitur.

Tab 39. fig. 5. Sit nf portio orbitæ Planetæ ad cælum productæ, nb portio Eclipticæ, fb arcus circuli Latitudinis per Planetæ locum Heliocentricum ductus. In triangulo Spherico rectangulo nfb, ex datis nb distantia Planetæ à Nodo, & bf ejus Latitudine observata; dabitur angulus bnf inclinatio orbis Planetarii ad Eclipticam.

Determinatur locus Heliocentricus Planetæ & distantia à Sole quando Planeta observetur in situ Achronico. Tab 40. fig 1.

Inventa semel hac inclinatione, observatione innotescet locus Planetæ Heliocentricus, ejusque à Sole distantia, quotiescunque ille in situ Achronico seu Soli opposito invenitur. Sit ATB orbita Telluris, DPE orbita Planetæ; sitque Planeta in P, Tellus in T, & NSn Nodorum linea, in qua sit Sol in S. Locus Planetæ ad Eclipticam reductus erit in linea ST, quæ per terram transit; Observetur angulus PTE Latitudo Planetæ Geocentrica. Sed datur angulus PST ejus Latitudo Heliocentrica, quia datur distantia Planetæ à Nodo. Præterea per Theoriam motus Telluris, datur ST distantia Telluris à Sole: adeoque in triangulo PST, ex datis omnibus angulis una cum latere ST, dabitur PS distantia Planetæ à Sole, sed datur angulus PSn, ex data latitudine Heliocentrica, ex quo innotescet Planetæ locus Heliocentricus in propria orbita: similiter si aliæ duæ habeantur ejusdem Planetæ observationes in situ Achronico, dabuntur positione & magnitudine tres lineæ, quarum extremitates in Planetæ orbita locantur, & Sol est in orbitæ foco alterutro; unde ut determinetur Planetæ orbita, ejusque species & positio, describenda est Ellipsis, cujus focus datus est, & quæ per tria puncta transit. Quod Problema expedire docent Geometræ, & nos etiam in sequentibus, Problematis solutionem dabimus.

Si Planeta sit extra situm Achronicum, nihilominus per

uni-

unicam observationem, ejus à Sole distantia locusque Helio-centricus inveniri potest. Sit PAE orbita Planetæ, TGH Telluris orbita, Tellus in T, Planeta in P, sitque Sol in S, & NS Nodorum linea. Ex P demittatur ad planum Eclipticæ normalis PB, ducatur BT, & producatur ut cum linea Nodorum concurrat in N. Erit planum trianguli NPB ad planum Eclipticæ perpendiculare, cui etiam sit recta CT normalis, plano orbitæ Planetariæ occurrens in C. Ex T in lineam Nodorum demittatur perpendicularis recta TD, & juncta DC, erit angulus TDC inclinatio orbitæ ad Eclipticam, quæ itaque datur. Observetur angulus PTB Latitudo Planetæ Geocentrica, item angulus BTS Elongatio Planetæ à Sole secundum Eclipticam. In triangulo NTS, datur, ex Theoria Telluris, latus TS distantia terræ à Sole in momento observationis. Item angulus TSN, ex cognitis locis Telluris & Nodi, datur etiam angulus STN distantia Planetæ à Sole è terra visa, vel ejus complementum ad duos rectos, unde dabitur NT. Et in triangulo rectangulo TSD, ex datis TS & angulo TSD, seu TSN, dabitur TD. Quare in triangulo rectangulo TDC, ex datis TD & angulo TDC inclinatione orbitæ ad Eclipticam, dabitur exinde TC. In triangulo rectangulo TCN, ex datis TC, TN, dabitur angulus TNC. Quare in triangulo NTP, dantur omnes anguli, nam angulus PTN est Latitudo observata, vel ejus complementum ad duos rectos, & PNT modo inventus est, sicuti latus TN, unde innotescet latus TP. In triangulo PTB rectangulo ad B, datur TP & angulus PTB Latitudo observata, unde dabuntur latera TB, PB. Et in triangulo TSB, ex datis TB, TS cum angulo interjecto BTS dabitur SB, (quæ distantia Planetæ à Sole curtata dicitur) cum angulo TSB. Adeoque locus Heliocentricus Planetæ ad Eclipticam reductus. Denique in triangulo PBS dantur latera PB, BS, ex quibus dabitur SP distantia Planetæ à Sole, & angulus PSB Latitudo Planetæ Heliocentrica. Data autem inclinatione orbitæ, & Latitudine Planetæ Heliocentrica, dabitur ejus distantia à Nodo in propria orbita, adeoque ejus locus centricus è Sole visus.

Per unicam observationem determinatur locus Planetæ Heliocentricus ejusque à Sole distantia extra situm Achronicum.

TAB 40. *fig.* 2.

Si

Si hac ratione acquirantur alii duo Planetæ loci Heliocentrici eorumque à Sole distantiæ, habebitur focus scil. centrum Solis, & tria puncta data erunt per quæ describenda erit Ellipsis, quæ erit orbita Planetæ.

TAB. 39. fig. 6. Aliam excogitavit methodum Cl. *Halleius*, qua Planetæ loca centrica, ejusque à Sole distantiæ inveniri possunt, quæ supponit tantum cognitum esse Planetæ tempus periodicum. Nempe sit KLB orbita Telluris, S Sol, P Planeta, seu potius punctum ubi perpendicularis à Planeta in planum Eclipticæ incidit. Et primo Tellure in K existente, observetur ejus Longitudo Geocentrica, & ex data Theoria Telluris dabitur Longitudo Apparens Solis, quare dabitur angulus PKS. Planeta post integram absolutam periodum, rursus ad P redibit, quo tempore, Tellus sit in L, & exinde rursus observetur Planeta, & inveniatur angulus PLS Elongatio Planetæ à Sole. Ex datis momentis observationum, dantur loca Telluris in Ecliptica è Sole visa, ejusque à Sole distantiæ, quare in triangulo LSK, dantur LS, SK, & angulus LSK, quare invenientur anguli SLK & SKL & latus LK. Quare si ab angulis datis PKS & PLS, auferantur anguli noti LKS & KLS, restabunt anguli PKL & PLK noti; Quare in triangulo PLK ex datis angulis, uno cum latere KL, innotescet PK. Deinde in triangulo PKS, dantur latera PK, KS cum angulo interjecto PKS, quare dabitur SP distantia Planetæ à Sole curtata, & angulus KSP, ex quo innotescet locus Planetæ Heliocentricus, ejusque à Nodo distantia secundum Eclipticam. Est autem Tangens Latitudinis Planetæ Geocentricæ, ad Tangentem Latitudinis Heliocentricæ, ut distantia Planetæ à Sole curtata, ad distantiam ejusdem à Tellure curtatam, sed per observationem, datur Latitudo Planetæ Geocentrica; quare dabitur Planetæ Heliocentrica Latitudo, ex qua & distantia à Sole curtata, elicietur Planetæ à Sole vera distantia desiderata. Si hac ratione acquirantur tria loca centrica Planetæ, tresque correspondentes ejus à Sole distantiæ, forma orbitæ & Apsidum positio habebitur; describendo Ellipsim cujus focus est Sol quæ transit per tria puncta data. Ellipsis autem illa sequenti methodo determinatur.

Sint

Sint SD, SC, SB tres rectæ datæ, in datis positionibus à foco S, ducantur DC, BC, & producantur, ut sit DF ad CF, ut DS ad CS. Item CE ad BE, ut CS ad BS; ducatur FE, in quam ex S cadat perpendicularis SG; hæc recta dabit Axis positionem. Ducantur DK, CI, BH ad SG parallelæ, & secetur SG in A, & producatur, ut sit GA ad SA, ut KD ad SD, & ita G*a* ad S*a*, fiatque S*a* = SA. Erunt puncta A*a* vertices Ellipseos, cujus foci sunt S & *s*, & Axis major A*a*. Et si his verticibus & focis describatur Ellipsis, erit ea ejusdem formæ cum orbita quæsita. Nam quoniam est DS ad CS, & DF ad CF, & ut DK ad CI; erit permutando DS ad DK, ut CS ad CI; & similiter erit SB ad BH, ut CS ad CI, & ut DS ad DK; sed ut DS ad DK, ita est per constructionem SA ad GA. Et quoniam est SA: AG: :S*a* : *a*G; erit SA: AG::S*a*−SA, seu S*s*:*a*G−AG seu A*a*. Adeoque erit SD: DK::SC: CI::SB: BH::S*s*: A*a*. Sed hæc est proprietas Ellipseos cujus focus est S, & Axis major A*a* uti à Scriptoribus Conicis demonstratur, & speciatim à *Milnio* in Elementis Conicis, *Part.* IV. *Prop.* 9. unde liquet Ellipsim focis S & *s*, & Axe A*a* descriptam transire per puncta BCD. *Descriptio Ellipseos cujus focus datus est & quæ per data tria puncta transit.* TAB. 39. *fig.* 7.

Quoniam in Astronomia, calculus constructione quavis, utcunque concinna, utilior est; Ellipseos forma & positio sic calculo invenitur. In triangulis DSC, BSC, ex datis lateribus DS, CS, BS, & angulis DSC, CSB, innotescent latera DC, BC, & anguli SDC, SCD, SCB & SBC. Et quoniam datur ratio DF ad CF, & datur DC, dabuntur quoque CF, & DF, similiter quoniam datur ratio CE ad BE, & datur CB, dabuntur CE & BE; sed datur angulus BCD æqualis duobus notis DCS & BCS, quare dabitur hujus complementum ad duos rectos, scil. angulus FCE. In triangulo igitur FCE, dantur latera CF, CE, & angulus interjectus FCE; quare invenietur angulus CEF, ejusque complementum ad rectum, qui est angulus ICE, cui addatur notus angulus SCB, & dabitur totus angulus SCI. Et quoniam A*a* est ad IC parallela; erit angulus CS*a* æqualis SCI angulo, unde ex noto angulo CS*a* dabitur Axeos positio.

In triangulo rectangulo EBH, ex datis BE & angulo E invenietur BH, & unde ratio BS ad BH, quæ est ratio S *s* ad A *a*, & S A ad A G, & S *a* ad *a* G, quare dabuntur puncta A *a* vertices Ellipseos & foci S & *s*. Quæ erant invenienda.

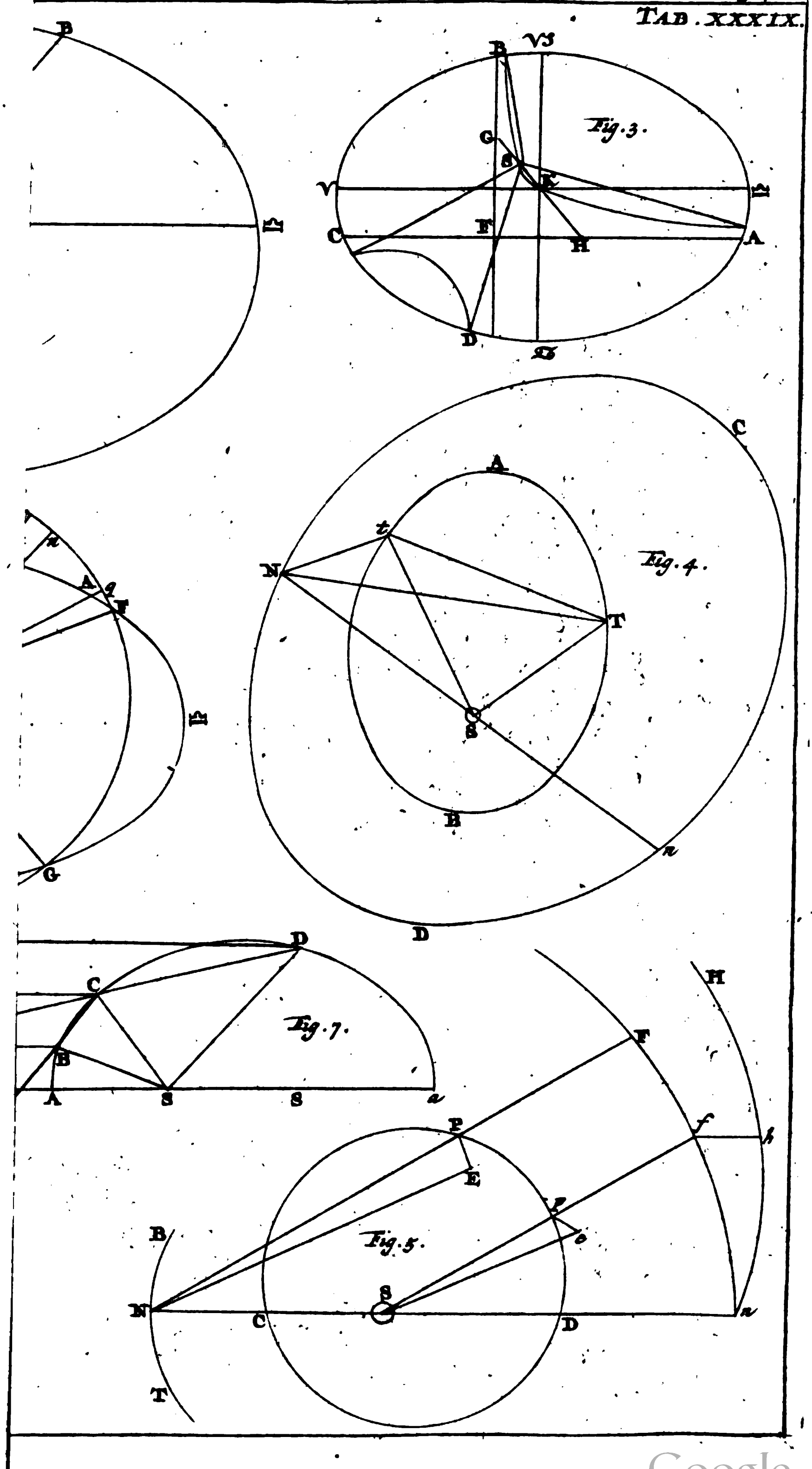
Superius ostensum est, qua ratione locus Planetæ centricus per observationem inveniri possit, locum autem situmque Aphelii nunc invenire docuimus, ex quo dabitur distantia Planetæ ab Aphelio, tempore observationis, hæc distantia Anomalia Planetæ vera seu coæquata dicitur: determinatis autem orbitæ Excentricitate & tempore Periodico, locum Planetæ medium seu Anomaliam ejus mediam investigare docuimus in Lectione *De Solutione Problematis Kepleri*; & exinde ad tempus observationis datum dabitur Planetæ motus medius, locusque, quem in propria orbita is teneret, si æquabili semper motu angulari incederet, quo semel dato, dabitur planetæ locus medius, pro alio quovis temporis momento. Fiat enim ut tempus Periodicum ad tempus inter observationem & momentum pro quo quæritur locus Planetæ medius; ita integer circulus seu grad. 360. ad quartum, hic arcus si tempus præcesserit observationem, ablatus à loco prius invento, vel eidem additus, si posterius fuerit, dabit locum Planetæ medium ad tempus propositum.

Ut facilius obtineatur locus Planetæ medius, ad quodlibet temporis momentum, convenit ejus motum ex tabulis Astronomicis eruere, in quibus habetur locus Planetæ medius, seu Anomalia media, in initio celebris alicujus Æræ, qualis est *Æra Nativitatis Christi Domini*, *Nabonassori*, *Mundi Conditi*, *Urbis Conditæ*, aut *Periodi Julianæ*; Qui locus pro his Temporum momentis datur, per methodum supra explicatam, & pro meridie Temporis æquabilis, non apparentis habendus est; locus talis *Epocha* seu Radix dicitur, à qua tanquam immobili principio motus omnes consurgunt.

Tabulæ motus medii quomodo construantur.

Si tempus per Annos à Nativitate Domini, aut ab initio Periodi Julianæ elapsos numeretur, præstat ut Annus initium capiat à Meridie quæ primam diem Januarii præcedit, ita

TAB. XXXIX.



ita ut in Meridie primæ diei Januarii, completa sit prima Anni dies. Fiat ut Tempus Periodicum ad Annum communem 365 dierum; ita circulus ad quartum, dabitur Planetæ motus medius in uno Anno, & similiter, fiat ut Tempus Periodicum ad diem ita circulus integer ad quartum, & dabitur motus medius diurnus; similiterque operando, dabitur motus Horarius, motusque pro singulis scrupulis primis, secundis, &c. Si motus Annuus continuo ad se ipsum addatur, dabitur motus duorum, trium, & quatuor Annorum, sed cum quartus quilibet Annus sit Bissextilis constans dierum 366, ad motum quarti Anni addendus est motus unius diei. Deinde continuo addendo motum unius Anni, habebimus motum 5, 6, & 7, Annorum; sed motus octavi Anni augendus est motu unius diei, vel potius motus quatuor Annorum duplicandus est, est enim Bissextilis. Ex hisce motibus sic collectis, semper rejiciendi sunt integri circuli, nam post circulum peractum, Planeta semper ad eundem locum redit.

Hac ratione habentur Planetæ cujuslibet motus medii, pro Annis singulis, usque ad 20. Deinde si motus Annorum 20 continuo ad se addantur, dabuntur motus in Annis 40, 60, 80, 100, quibus singulis addendo motum decem Annorum dabuntur motus pro Annis 30, 50, 70, 90, 100. Et continua additione motûs 100. Annorum rejectis semper integris circulis; dabuntur motus Annorum 200, 300, 400, 500, &c. usque ad 1000. Et similiter progrediendo, obtinentur motus pro Annis 2000, 3000, 4000, 5000, &c. Atque ita quo usque libuerit progredi liceat.

Motus sic collecti in Tabulis sunt reducendi, quæ Tabulæ motus medii dicuntur, seu Anomaliæ mediæ, si ab Aphelio numerentur motus; & pro singulis Planetis in tabulis Astronomicis prostant. Verum notandum est, si motus medius sit ab æquinoctio numerandus, loco Temporis Periodici capiendum erit Tempus quo Planeta Zodiacum percurrit, quod Tempore Periodico aliquanto minus est, ob motum Æquinoctiorum interea in antecedentia factum.

Si Planetarum Aphelia moveri supponatur, hujus quoque motus ratio habenda est. Et motus Praecessionis Æquinoctiorum motusque Apheliorum, (qui quantum constat praeterquam in Luna sunt omnes aequabiles,) pro singulis Annis; Annorum Decadibus, centenariis, & millenariis sunt similiter computandi, & in Tabulis disponendi, ut pro dato tempore habeantur distantiae fixarum & Apheliorum ab Æquinoctio.

His adjungunt Astronomi alias quoque pro singulis Anomaliae mediae gradibus Tabulas, quibus Anomaliae verae correspondentes habentur, & computari possunt per methodum à nobis traditam in Lectione de solutione Problematis Kepleri, si minuta & scrupula secunda adjiciantur mediis motibus, capienda est differentia inter Anomalias veras uno gradu à se invicem distantes, & elicienda est pars proportionalis addenda Anomaliae Tabulari proxime minori, aut ab ea subtrahenda.

Pro Solis Lunaeque motibus vulgo computantur Prosthaphereses seu Æquationes, quae sunt differentiae inter Anomaliam veram & mediam. Hae ab Anomalia media vel sublatae, vel eidem additae, prout Planeta fuerit in primo vel secundo Anomaliae semicirculo, dant Anomaliam veram.

Argumentum Latitudinis. Ex notis Aphelii, Nodique locis, dabitur eorum distantia, adeoque ex data Planetae Anomalia vera, dabitur ejus distantia à Nodo, quae *Argumentum Latitudinis* dicitur. Per quod & calculum Trigonometricum, facile innotescit Planetae Latitudo centrica, ejusque distantia à Sole curtata, quae est distantia inter Solem & rectam à Planeta ad planum Eclipticae perpendiculariter demissam. Atque hac ratione locus Planetae centricus, Latitudo, & à Sole distantia calculo inveniuntur. Quibus investigatis possumus locum Planetae Geocentricum seu è Tellure visum hac ratione exquirere.

Calculus loci Geocentrici Planetae. TAB. 40 fig. 3. Inveniendus est primo, locus Telluris in Ecliptica è Sole visus, ejusque à Sole distantia; item locus Planetae Heliocentricus, Latitudo, & distantia curtata. Sit TCF orbita Telluris, in qua sit Tellus in T, APE orbita Planetae, cujus locus sit P, & S Sol, SN Nodorum linea. Ex Pla-

Planetæ loco demittatur ad Planum Eclipticæ normalis recta PB, ducta SB & producta occurret Eclipticæ in loco Planetæ ad Eclipticam reducto, qui locus, ex dato arcu PN, & inclinatione Planorum orbitæ & Eclipticæ datur. Sed datur locus Telluris è Sole visus, adeoque dabitur differentia locorum Terræ & Planetæ, seu angulus TSB qui Commutatio dicitur. Deinde in triangulo TSB, datur TS ex Theoria motus Telluris, & SB distantia Planetæ à Sole curtata, quare dabitur angulus STB Elongatio Planetæ à Sole, seu arcus Eclipticæ inter locum Solis & Planetæ locum interceptus, & TB distantia Planetæ à Tellure curtata. At datur Solis locus, oppositus est enim loco Terræ è Sole viso; quare dabitur locus Planetæ in Ecliptica è Tellure visus. Præterea in duobus triangulis rectangulis PSB, PTB, est Tangens anguli PSB ad Tangentem anguli PTB, ut TB ad SB, sed ut TB ad SB, ita sinus TSB anguli Commutationis ad sinum anguli Elongationis STB. Quare erit ut sinus anguli commutationis ad sinum anguli Elongationis, ita Tangens Latitudinis Heliocentricæ, ad Tangentem Latitudinis Geocentricæ. Q. E. I. Sic hac ratione invenire possunt Astronomi ad quodlibet datum Temporis momentum Locum Planetæ Geocentricum, ejusque Latitudinem è Tellure visam.

Comparando Planetarum Periodos cum ipsorum a Sole distantiis mirabilem videmus eos ubique observare Harmoniæ legem, scil.

Quadrata Temporum Periodicorum sunt in omnibus, proportionalia Cubis distantiarum mediarum à Sole.

Sunt enim Periodi & distantiæ mediæ illæ quas exhibet annexa Tabula.

	Periodi Dies	h.	′	″	Distantiæ mediæ.
♄	10759:	6:	36:	26	953800
♃	4332:	12:	20:	25	520110
♂	686:	23:	27:	30	152369
☉	365:	6:	9:	30	100000
♀	224:	16:	49:	24	72333
☿	87:	23:	15:	53	38710

Pla-

Planetarum Diametros veras, & magnitudines, eos cum Sole comparando, optime determinavit illustris Mathematicus *Hugenius*, in Systemate suo Saturnino; idque methodo sequenti.

Docuit nos novo suo & Divinitus invento Systemate Copernicus, quamnam inter se proportionem servant, singulorum à Sole Planetarum distantiæ. Apparentes vero eorundem diametri, quanto aliæ aliis majores sunt, Telescopii ope innotescit, collatis ergo invicem rationibus utrisque, tum distantiæ, tum magnitudinis apparentis, vera inde Planetarum ad se mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoscitur, per principia in Lectione prima à nobis explicata.

Et ad Saturnum quod attinet primum, Annuli ejus diameter, quum in minima à nobis distantia, comprehendatur angulo 68 scrupulorum secundorum, talis enim ad summum reperitur, cumque minima hæc Saturni distantia sit ad mediocrem Solis distantiam fere octupla, sequitur, si tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in distantia mediocri, appariturum tunc Annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc est 9′: 4″. Solis autem diameter in media distantia est 30′: 30″; ergo revera, ea erit proportio diametri Annuli Saturni ad diametrum Solis quæ 9′: 40″, ad 30′: 30″; hoc est, fere quæ 11 ad 37, Diameter vero Saturni ipsius, ad Annuli diametrum se habet ut 4 ad 9; hoc est, fere ut 5 ad 11, adeoque ad diametrum Solis ut 5 ad 37.

Jovis diameter cum proxime nobis adest, 64 scrupula secunda comprehendere videtur, cumque hæc ejus distantia sit ad mediam Solis distantiam ut 26 ad 5. Si fiat ut 5 ad 26, ita 64″ ad aliud, invenientur 5′: 35″ amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter, si tam propinquus nobis fieri intelligatur, atque Sol in distantia mediocri. Sol autem hic apparet diametro 30′: 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem proportio erit, quæ 5′: 35″, ad 30′ 30″ hoc est, paulo major quam 1 ad 5½.

Venus cum Terris proxima est, non majorem subtendit anngulum quam 85 scrupulorum secundorum. Est autem stantia hæc Veneris Perigea, ad mediam Solis à Tellure stantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo si apud Solem Venus onsisteret, appareret ejus diameter duntaxat 21'': 46'''; nde constat ita esse diametrum Veneris ad Solarem ut 1'': 46,''' ad 30' ½, hoc est, ut 1 ad 84.

At Martis diameter Terris proximi non excedere 30'' deprehenditur. Unde cum distantia Martis minima sit ad mediocrem Solis, ut 15 ad 41, colligitur ratio diametri Maris ad diametrum Solis, ea quæ est circiter 1 ad 166, unde Mars duplo minor Venere secundum diametrum, hac ratione efficitur.

Præterea ex observationibus Hevelii constat, Mercurii diametrum ad Solis diametrum comparatam, se habere ut 1 ad 290.

Terræ magnitudinem ad Solem comparatam diversi auctores diversam ponunt; qui parallaxim Solis Horizontalem quindecim secundorum fingunt, Solem à Terra 13750 semidiametris distare volunt, quo posito diameter Solis erit ad diametrum Terræ ut 30': 30'' ad 30''; hoc est, ut 61 ad 1. Sed est argumentum probabile, quod hanc proportionem paulo majorem facit; nempe quoniam Lunæ diameter paulo major est quam quarta pars diametri Terræ: si parallaxis Solis ponatur quindecim secundorum, fieret Lunæ corpus corpore Mercurii majus; Planeta scil. secundarius primario major, quod concinnati Systematis Mundani contrariari videtur. Ponatur itaque Terræ semidiameter è Sole visa, seu quod idem est, Solis parallaxim Horizontalem 10 secundorum; unde Luna minor erit Mercurio, ac provenit Solis à Terra distantia plus quam 20000 semidiametris Terræ; & Solis diameter erit 91 ½ vicibus major Telluris diametro; cui proportioni convenit in præsentiarum, assensum præbere, usquedum per observationem Veneris in Solis disco visæ, quod Anno 1761. continget, de eadem certiores simus facti. Est itaque diameter Solis ad Planetarum diametros, in ratione quæ sequenti Tabella exprimitur.

Dia-

Diameter Solis eſt ad diametrum,	Saturni	ut 1000 ad	137
	Jovis		181
	Martis		6
	Terræ		9
	Veneris		12
	Mercurii		4

Adeoque cum Sphæræ ſint ut Cubi à diametris

erit Sol ad	Saturnum	ut 1000000000 ad	2571353
	Jovem		5929741
	Martem		216
	Tellurem		343
	Venerem		1728
	Mercurium		64

Hinc ſequitur, Solem omnes Planetas ſimul ſumptos, pluſquam centies & ſedecies magnitudine ſuperare; Saturnus autem quadringentis vicibus eſt Sole minor. At quantitate materiæ bis mille & quadringenis vicibus ei cedit. Jupiter Planetarum maximus plus 160 vicibus Sole minor eſt, at quantitate materiæ, ejus partem milleſimam trigeſimam tertiam non adæquat; at Terra noſtra ſi cum Sole comparetur, minima res eſt, & puncti fere inſtar; nam trecentis millenis vicibus eſt illo minor. Præterea comparando Planetas inter ſe; ex his rationibus conſtat, Jovem reliquis Planetis omnibus ſimul ſumptis majorem exiſtere. Terram autem noſtram pluſquam 2000 vicibus ſuperare, ſed & Stella Veneris quinquies noſtra Tellure major eſt. Sunt tamen duo ex ſex Planetis, Mars ſcil. & Mercurius, quos Tellus magnitudine ſuperat.

Jupiter reliquos omnes Planetas ſimul ſumptos magnitudine ſuperat.

LECTIO XXVII.

De Planetarum Stationibus.

SI Tellus quieſceret, in eo orbitæ ſuæ puncto nobis ſtare appareret Planeta inferior ſeu Soli propior, ubi recta è Tellure ad Planetam ducta, ejus orbitam tangit. Nam cum Planeta circa illud punctum verſatur, ſi Terra quieſceret, recta ad illam accederet, ejuſque motus viſibilis eſſet nul-

nullus, vel certè omnium minimus. Similiter si Planeta superior, vel à Sole remotior quivis quiesceret, is e Tellure in orbita sua delata spectatus stare videretur, ubi recta è Planetâ ad Terram ducta Telluris orbitam tangit; at quia tam Terra quam Planetæ continuo circa Solem moventur, quando Planeta inferior in recta tangente ejus orbitam videtur, tunc etiam motus Terræ interea factus locum ejus visibilem mutabit, adeoque nondum stare videbitur Planeta; sicuti ob similem causam, quando Terra in Tangente orbitæ suæ per Planetam superiorem transeunte reperitur, seu dum percurrit arcum exiguum qui cum tangente illa ferè coincidit, Motus tamen superioris Planetæ interea factus, ejus locum visum mutabit. Adeoque neque Planeta inferior videtur stationarius, quando conspicitur in recta quæ tangit ejus orbitam. Neque superior stare videtur, cum est in recta quæ tangit orbitam Terræ, & per Terram quoque transit.

Planeta inferior non stationarius quando videtur in rectâ, quæ ejus orbitam tangit. Neque superior Planeta stare apparet, cum in recta videtur quæ tangit orbitam Terræ.

At cum Planetæ omnes nunc directè incedere, nunc retrogredi videntur; necesse est ut inter motum progressus & regressus, quilibet Planeta fiat Stationarius, & eundem in cælo locum per aliquod tempus (licet illud sit exiguum) conservare videatur; eundem autem locum in cælo visibilem obtinet, quando linea Planetæ atque Terræ centra connectens ad idem cæli punctum continuo dirigitur; at recta illa ad idem cæli punctum dirigitur, quando sibi parallela manet. Nam rectæ è quibusvis orbitæ Telluris punctis sibi parallelæ ductæ, ad eandem in cælo stellam diriguntur: istarum enim linearum distantia respectu distantiæ stellarum evanescit.

Quando Planeta stare videtur.

Ut itaque inveniantur Stationum puncta, inquirendum erit, ubi linea in quâ videtur Planeta, è Terrâ, sibi parallela manet. Quod ut fiat, notandum est, si centra Solis, Planetæ, & Terræ rectis conjungantur, formari triangulum, cujus duo crura sunt ubique æqualia distantiis Planetæ & Terræ à Sole, Basis autem est recta quæ Planetæ atque Terræ centra connectit: cumque crura hujus Trianguli in orbitis circularibus concentricis eâdem semper magnitudine maneant, erit ratio ſinuum angulorum ad baſim ſemper eadem; ſunt enim ſinus ut latera angulis oppoſita. Uti ex Trigonometria conſtat.

TAB. 41. fig. 1. Sit circulus B D G orbita Planetæ, cujus centrum S tenet Sol; atque huic concentricus A H K ſit Terræ orbita. Sitque primo Tellus in A & Planeta in orbitæ ſuæ puncto B. In Triangulo A S B, ſinus angulorum A & B ad baſim A B ſunt ut latera oppoſita S B S A. Ponamus deinde, tempore quovis exiguo, moveri Terram in orbitâ, per arcum exiguum A C, & Planetam interea per arcum B D in ſua orbita deferri: Planetæ & Telluris motus angulares ad Solem eodem tempore facti erunt reciprocè, ut Tempora eorum Periodica; nam quò majus eſt tempus Periodicum eò minor Peripheriæ portio in dato tempore percurritur. Eſt itaque angulus A S C motus angularis Telluris ad angulum B S D motum angularem Planetæ, ut Tempus periodicum Planetæ, ad tempus Periodicum Telluris, hoc eſt in data ſemper ratione.

Tempore ſtationum mutationes angulorum ad Tellurem & Planetam ſunt reciproce ut eorum Tempora Periodica.

Telluris centrum in C atque Planetæ in D rectâ conjungantur, quæ ſit ad A B parallela; & in eo caſu, uti oſtenſum eſt, Planeta ſtationarius apparet. Recta S A ſecet C D in M, S D vero producta ſecet A B in E. Et ob parallelas A B C D, erit per 29. *El. primi* angulus S M D æqualis angulo A. Sed per 32. *El. primi*, eſt angulus S M D æqualis angulis C & M S C ſimul; quare erit angulus C æqualis angulo A dempto angulo M S C ſeu C S A. Similiter ob parallelas A B C D, eſt angulus S D C, æqualis angulo S E A qui per 32 *El. primi* æqualis erit angulis S B A B S E, quare angulus S D C æqualis erit S B A & B S E ſimul ſumptis; eſt itaque incrementum momentaneum anguli S B A, æquale motui angulari Planetæ ad Solem interea facto. Sed prius oſtenſum fuit, decrementum anguli A, æquale eſſe angulo A S C, ſeu motui angulari Terræ ad Solem. At hi motus angulares ſunt in datá ratione, reciprocè ſcil. ut Tempora Periodica.

Planeta itaque ſtationarius è Terrâ videtur, cum mutatio momentanea anguli ad Tellurem, eſt ad mutationem momenmentaneam anguli ad Planetam, ut Tempus Periodicum Planetæ ad Tempus periodicum Telluris.

Angulorum quorum sinuum ratio eadem manet, cosinus sunt in ratione directâ sinuum & reciprocâ mutationum momentanearum eorundem.

Sint duo arcus vel anguli, quorum sinus in eâdem semper maneant ratione. Dico eorum cosinus seu sinus complementorum ad quadrantem esse in ratione compositâ ex directâ ratione sinuum eorundem arcuum, & reciprocâ ratione mutationum momentanearum arcuum vel angulorum, sint v. gr. duo Arcus AM CM, quorum sinus AB CD; & cosinus sunt SB SD, & decrescant arcus AM CM in arcus EM GM tales ut arcuum sinus EK GL sint prioribus AB CD proportionales. Eruntque decrementa sinuum AF CH iisdem quoque sinubus proportionalia. Sunt AE CG arcuum decrementa momentanea, & arcus illi cum sint indefinitè exigui pro rectis haberi possunt; ductis FE HG ad SM parallelis, Triangula AFE ASB erunt æquiangula; nam angulus B & AFE sunt recti, & angulus EAF æqualis angulo ASB, nam est angulus SAB utriusque complementum ad rectum. Similiter ostendetur, Triangula CHG CSD esse æquiangula. Quare ob similia Triangula.

Tab. 40. fig. 4.

Est CG : CH : : CS : SD

Item AF : AE : : SB : AS vel CS

Quare ductis Antecedentibus in Antecedentes, & Consequentibus in Consequentes, erit AF × CG : CH × AE :: SB × CS : SD × CS :: SB : SD. Hoc est erit SB ad SD in ratione compositâ ex ratione AF ad CH, & ratione CG ad AE, sed ratio AF ad CH eadem est cum ratione sinuum AB CD. Et Ratio CG ad AE, est ratio decrementorum arcuum AM CM in tempore minimo factorum. Est itaque SB cosinus Arcûs AM, ad SD cosinum arcûs CM, in ratione compositâ ex ratione sinuum eorundem arcuum scil. AB CD & ex reciprocâ ratione decrementorum arcuum, scil. ex ratione CG ad AE.

Hoc ad Planetas in stationum locis applicatur.

Hinc si Solis, Planetæ stationarii, atque Telluris centra rectis jungantur, erit cosinus anguli A existentis ad Tellurem ad cosinum anguli B ad Planetam, in ratione compositâ sinuum angulorum A & B, & ratione reciprocâ decrementorum angulorum A & B. Sed Ratio sinuum, est ratio distantiarum Planetæ & Telluris à Sole, scil. SB SA; & ra-

Tab 41. fig. 1.

tio decrementorum angulorum A & B, est ratio temporum Periodicorum Planetæ & Telluris, quæ dicantur t & T. Est itaque cosinus anguli A ad cosinum anguli B, cum Planeta stationarius e Tellure videtur, ut T ⋈ SB ad t ⋈ SA. Hoc est cosinus anguli ad Tellurem est ad cosinum anguli ad Planetam in ratione compositâ ex directâ ratione Temporum Periodicorum Telluris & Planetæ, & reciprocâ ratione distantiarum à Sole.

Constructio ad determinationem stationum. *Tab. 41 fig. 2.*

Hinc stationum Puncta sequentis constructionis ope facillimè habentur.

Sit AH Portio orbitæ Telluris, GBK portio orbitæ Planetæ, quarum centrum commune S. Secetur SA in E, ut SA sit ad SE, ut Tempus Periodicum Telluris ad Tempus periodicum Planetæ. Super Diametro AE describatur semicirculus ABE secans orbitam Planetæ in B. Erit B stationis punctum. Et erit angulus SAB Elongatio Planetæ à Sole, quando is stationarius è Terrâ videtur. Ducantur ABF EB, & huic parallela SF; angulus ABE in semicirculo est rectus, quare huic æqualis AFS erit etiam rectus.

Est præterea AS: AF :: Radius: cosinum ang: A. Item BF: SB :: cosinus anguli SBP ad Radium; unde ductis Antecedentibus in Antecedentes; & Consequentibus in consequentes, erit AS ⋈ BF: AF ⋈ SB :: cosinus SBF : cosinum anguli A. Ratio itaque cosinus anguli A, ad cosinum anguli SBF componitur ex ratione AF ad BF, & SB ad AS, sed ratio AF ad BF æqualis est rationi AS ad SE seu rationi T ad t. Est itaque Ratio cosinûs anguli A ad cosinum anguli SBF æqualis rationi T ⋈ SB ad t ⋈ SA. Sed ostensum fuit, quando cosinus angulorum A & B hanc rationem obtinent, Planetam stationarium videri: quare liquet Punctum B esse locum Planetæ, cum is stationarius apparet.

Quando Planeta è Tellure stationarius videtur

Tellus è Planetâ conspecta stationaria apparet.

Hinc patet, quando Planeta inferior stationarius e Tellure videtur, Tellurem quoque ex inferiore Planeta spectatam etiam stationariam videri, locumque inter fixas non mutare; nam Tellus stationaria videtur, cum linea ejus centrum & Planetæ centrum connectens parallela sibi manet, & quamdiu illa parallela sibi manet, ad idem cœli punctum dirigetur.

Eâ-

Eadem prorsus ratione inveniuntur positiones Planetarum superiorum, respectu Terræ & Solis, quando illi e Tellure conspecti stationarii videntur. Scil. inquirendo, ubi Tellus tanquam Planeta inferior spectata ex ipsis stationaria videretur.

Si Tempora Periodica forent distantiis à Sole proportionalia, coinciderent puncta E & A cum puncto G; & Planeta stationarius videretur, cum angulus A esset nullus; hoc est quando Planeta in conjunctione cum Sole videtur, si verò SE ad SA majorem rationem obtineret, quàm SG ad SA, hoc est si SE major foret quàm SG, circulus ABE Planetæ orbitam nusquam secaret, adeoque Planeta nunquam fieret stationarius, seu semper directus videretur incedere. *Casus ubi stationaria in oppositione vel conjunctione cum Sole fierent. Casus ubi nullæ forent stationes.*

At neuter horum casuum in Planetis locum obtinet: in illis enim est semper SE minor quam SG, quod sic ostendo. *Quod nunquam accidit in Planetis.*

Distantia Telluris à Sole SA dicatur p. Distantia Planetæ SG vel SB sit q. Tempora periodica vocentur T t, & in Planetis per universalem regulam, superius in Lectione quartâ explicatam. Est $T^2 : t^2 :: p^3 : q^3$ unde $T : t :: \sqrt{p^3} : \sqrt{q^3}$, seu ut $p^{\frac{3}{2}} : q^{\frac{3}{2}} :: p \times p^{\frac{1}{2}} : q \times q^{\frac{1}{2}}$. Sed ut T ad t ita est SA ad SE; hoc est $p \times p^{\frac{1}{2}} : q \times q^{\frac{1}{2}} ::$ SA vel $p : \frac{q \times q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$ cui itaque æqualis est SE. Et quoniam est p major quam q, erit $q \times p^{\frac{1}{2}}$ major quam $q \times q^{\frac{1}{2}}$, ac proinde q major quam $\frac{q \times q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$ seu SB vel SG major quam SE, adeoque circulus super diametro AE Planetæ orbitam secabit. Terricola igitur Planetas omnes, in datis quibusdam positionibus, stationarios videbit.

Si calculo uti placeat, angulus ad Tellurem, seu Elongatio Planetæ à Sole, quando is stationarius apparet, sic investigatur. Posito radio r, sit sinus anguli ad Tellurem qx, eritque sinus anguli ad Planetam px. ponendo p ad q esse rationem sinuum seu distantiarum à Sole, cumque sinus anguli ad Tellurem sit qx, ejus cosinus erit $\sqrt{r^2 - q^2 x} \&$ *Investigatio stationum per calculum.*

cosinus anguli ad Planetam erit $\sqrt{r^2 - q^2 x^2}$ ac proinde erit $\sqrt{r^2-q^2x^2} : \sqrt{r^2-p^2x^2} :: T \times q : t \times p$. Et quadrando terminos, $r^2 - q^2x^2 : r^2 - p^2x^2 :: T^2 \times q^2 : t^2 \times p^2$. Sed est $T^2 : t^2 :: p^3 : q^3$ quare loco T^2 t^2 ponendo quantitates hisce proportionales, erit $r^2 - q^2x^2 : r^2 - p^2x^2 :: p^3 q^2 :$ ad $q^3 p^2$ hoc est ut p ad q. unde erit $qr^2 - q^3x^2 = pr^2 - p^3x^2$: & $p^3x^2 - q^3x^2 = pr^2 - qr^2$, & $x = r \times \sqrt{\frac{p-q}{p^3-q^3}}$ & qx sinus anguli ad Tellurem $= qr \times \sqrt{\frac{p-q}{p^3-q^3}} = \frac{qr}{\sqrt{p^2+pq+q^2}}$.

Quadratum cosinûs arcûs cujusvis, est æquale quadrato radii, dempto quadrato sinûs. Erit itaque quadratum cosinus Anguli Elongationis Planetæ à Sole tempore stationis æquale $r^2 - \frac{r^2 q^2}{p^2+pq+q^2} = \frac{r^2p^2 + r^2pq}{p^2+pq+q^2}$. Adeoque cosinus erit $r \times \sqrt{\frac{p^2+pq}{p^2+pq+q^2}}$ Sed ut cosinus ad sinum, ita est Radius ad Tangentem. Fiat itaque $r \times \sqrt{\frac{pp+pq}{pp+pq+qq}}$ ad $\frac{qr}{\sqrt{p^2+pq+qq}}$ hoc est $\sqrt{pp+pq}$ ad q, ita radius r ad quartum $\frac{rq}{\sqrt{pp+pq}}$ hic terminus erit tangens anguli ad Tellurem. Ex hac Analogia calculus facillimè deducitur. Nam si semisumma Logarithmorum p & $p+q$ subtrahatur à Logarithmo ipsius q, habebitur Logarithmus Tangentis Anguli ad Tellurem. Ex eadem etiam elicitur facilis constructio quæ sequitur.

Alia Problematis facilior Constructio. Tab. 41. fig. 3.

Sit H A Q portio orbitæ Planetæ superioris, G B D orbita Planetæ inferioris, S centrum orbitarum; producatur A S, ut occurrat orbitæ inferiori in D; super diametro A D, describatur semicirculus A C D. Ex centro S ad A D erigatur normalis S C, semicirculo occurrens in C & jungatur A C, in quâ capiatur A F æqualis S D, & ex F in A S demittatur perpendicularis F E: in S C capiatur S L æqualis A E, junctis A L, erit angulus S A L angulus quæsitus, & B punctum sta-

stationis; nam est quadratum ex SC æquale rectangulo AS in SD, æquale pq, unde quadratum ex AC æquale quadratis ex AS SC erit æquale $p+pq$, sed est AC ad AP, ut AS ad AE ut AS ad SL, ut Radius ad Tangentem anguli SAL hoc est $\sqrt{p^2+pq}$ ad q ut Radius ad Tangentem anguli Quæsiti SAL, qui erat inveniendus.

Hæc sufficerent ad determinandum stationum Puncta, si orbitæ Planetarum essent circuli concentrici; verum cum sint Excentricæ, & Ellipses, anguli tam ad Solem quàm ad Planetas stationum tempore varii erunt, & mutabiles, pro variis locis, quos Planetæ in orbitis propriis, stationum tempore tenent. Cum itaque in hoc casu pro infinitis Telluris & Planetarum diversis positionibus, infinitè diversi sunt anguli, stationum tempore, illi æquatione Algebraicâ definiri nequeunt; neque potest Problema universaliter construi, per curvas Algebraicas, quamvis aliqui hoc opus susceperunt. At si detur positio Planetæ in propriâ orbitâ, inveniri potest Positio Telluris in suâ, quando Planeta in illo puncto existens e Tellure stationarius videtur: hoc enim est Problema determinatum, & duas continet responsiones, pro duabus radicibus æquationis, Problematis naturam includentis. Illius autem Problematis solutionem mihi pro summâ suâ amicitiâ impertivit Astronomorum Princeps *Dominus Halleius*, ad quam intelligendam præmittimus Lemma, quod sequitur. *Superior calculus & constructio orbitis excentricis & Ellipticis non convenit.*

Qualescunque sint Planetarum vel Telluris orbitæ, si ex eorum locis Tempore stationum ducantur rectæ, quæ orbitas tangant, & producantur Tangentes, donec concurrant, erunt portiones Tangentium, à mutuo concursu interceptæ, Telluris & Planetarum velocitatibus proportionales.

Sint EG AH portiones duæ orbitarum quas Tellus & Planeta describunt, AB CD spatia exigua eodem tempore ab iisdem percursa, tempore stationum. Ducantur CE AE orbitas tangentes in A & C, quæ concurrant in E, & quia Planeta est Stationarius; erit BD ad AC parallela & proinde per 2*dam El.* 6ti. CD ad AB ut CE ad AE. Sed CD AB cum sint spatia simul descripta, sunt ut Planetarum Velo- *TAB. 40. fig. 4.*

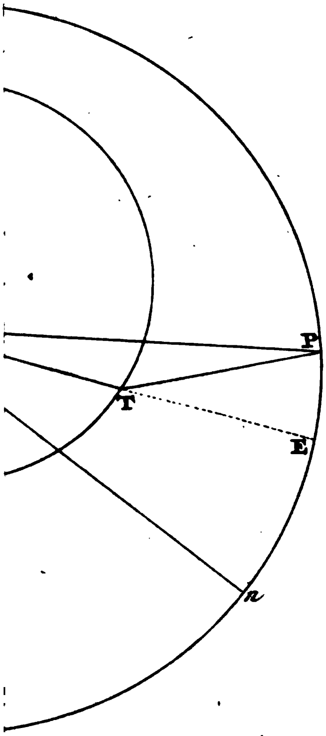
locitates, quare tangentes CE AE sunt, ut Planetarum velocitates. Hoc Theorema est *Joannis Bernoulli*, *in Actis Berolinensibus* Editum, & ex parallelismo linearum ACBD immediatè sequitur; is tamen exinde nullam protulit Problematis Solutionem. Sequitur Solutio Halleiana.

PROBLEMA.

Invenire Locum Terræ è quo Planeta in dato Orbis sui puncto visus, stationarius apparet.

Tab 41. fig. 5. Sit S Sol, πKLA orbis Terræ, quam circularem pro hac vice supponamus, π P α Orbita planetæ, P locus Planetæ datus. Ducatur recta VPQ contingens orbem Planetæ in P, occurrens vero Orbi Terræ in V & Q, ac bisecetur VQ in R: in eandem autem erigatur normalis PB, quæ sit ad VR vel RQ ut velocitas Planetæ ad velocitatem Terræ: ac centro R diametro VQ describatur semicirculus *vbd*Q, quem contingant rectæ, utrinque de B ductæ & productæ, ut B*b*Σ, B*d*T; & ad quas e centro R demittantur normales R*b*, R*d*; ac fiant ΣK ipsi Σ*b*, & TL ipsi T*d* æquales. Dico K, L puncta esse in orbe Terræ quæsita. Ob similia enim triangula R*b*Σ, BPΣ, ΣP est ad PB ut Σ*b* sive ΣK ad R*b* sive RV, ac permutando ΣP est ad ΣK ut PB ad RV, quas fecimus, ut velocitas Planetæ ad velocitatem Terræ, Verum Σ*b* contingit semicirculum in puncto *b*, ac proinde quadratum ex Σ*b* æquale est rectangulo VΣQ. *per* 36.3.*El.* cumque ΣK facta est ipsi Σ*b* æqualis, ΣK continget orbem Terræ in puncto K, per 37.3.*El.* Tangentes itaque utriusque orbis ΣP, ΣK sunt in ratione velocitatum, ac proinde Planeta in P è Terrâ in K visus, Stationarius erit. Eodem omnino modo demonstrabitur rectas TP, TL esse in ratione velocitatum & TL orbem Terræ contingere in L. Junctæ denique SK SL designabunt loca Terræ e Sole visæ, ac anguli KSP, LSP angulos commutationis quæsitos. Et existente SA lineâ Apsidum Terræ, erunt KSA, LSA, anguli anomaliæ veræ Terræ; unde si quid erratum fuerit in suppositâ velocitate Terræ accuratissimè corrigi poterit.

Al-



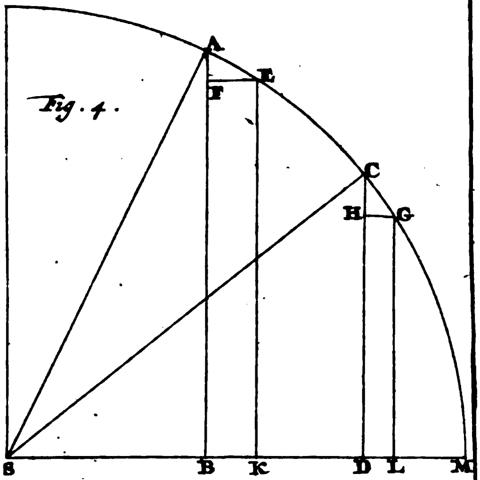


Fig. 4.

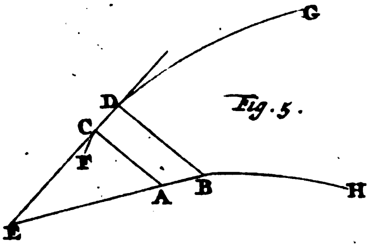
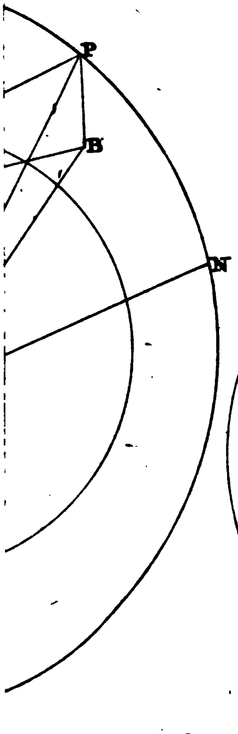


Fig. 5.



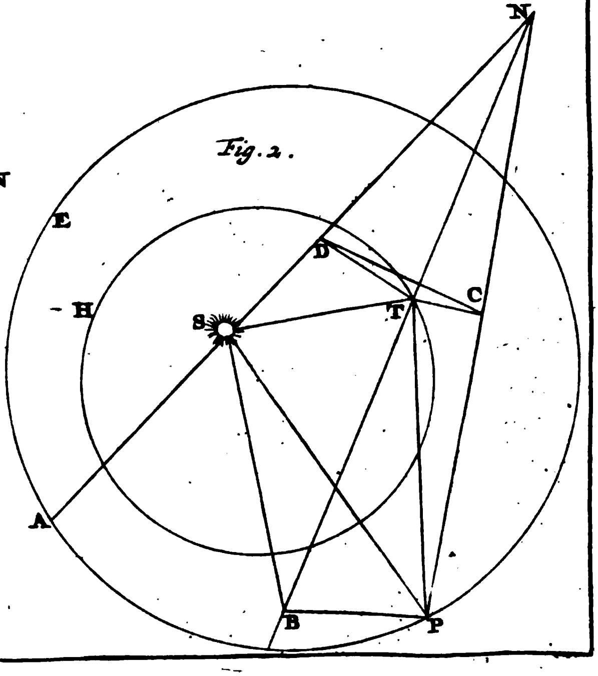


Fig. 2.

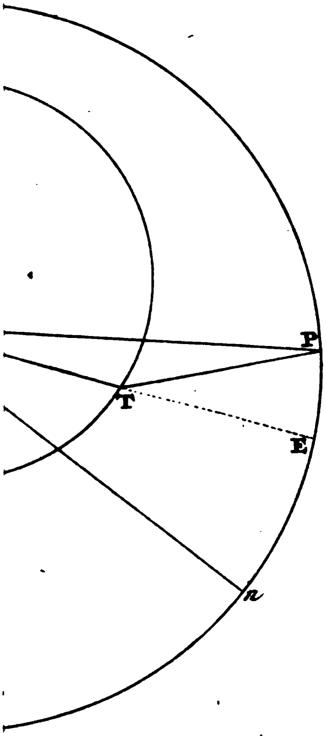
locitates, quare tangentes CE AE sunt, ut Planetarum velocitates. Hoc Theorema est *Joannis Bernoulli*, *in Actis Berolinensibus* Editum, & ex parallelismo linearum ACBD immediatè sequitur; is tamen exinde nullam protulit Problematis Solutionem. Sequitur Solutio Halleiana.

PROBLEMA.

Invenire Locum Terræ è quo Planeta in dato Orbis sui puncto visus, stationarius apparet.

TAB 41. fig. 5. Sit S Sol, ΠKLA orbis Terræ, quam circularem pro hac vice supponamus, π P α Orbita planetæ, P locus Planetæ datus. Ducatur recta VPQ contingens orbem Planetæ in P, occurrens vero Orbi Terræ in V & Q, ac bisecetur VQ in R: in eandem autem erigatur normalis PB, quæ sit ad VR vel RQ ut velocitas Planetæ ad velocitatem Terræ: ac centro R diametro VQ describatur semicirculus *vbd*Q, quem contingant rectæ, utrinque de B ductæ & productæ, ut B*b*Σ, B*d*T; & ad quas e centro R demittantur normales R*b*, R*d*; ac fiant ΣK ipsi Σ*b*, & TL ipsi T*d* æquales. Dico K, L puncta esse in orbe Terræ quæsita. Ob similia enim triangula R*b*Σ, BPΣ, ΣP est ad PB ut Σ*b* sive ΣK ad R*b* sive RV, ac permutando ΣP est ad ΣK ut PB ad RV, quas fecimus, ut velocitas Planetæ ad velocitatem Terræ, Verum Σ*b* contingit semicirculum in puncto *b*, ac proinde quadratum ex Σ*b* æquale est rectangulo VΣQ. *per* 36. 3. *El.* cumque ΣK facta est ipsi Σ*b* æqualis, ΣK continget orbem Terræ in puncto K, per 37. 3. *El.* Tangentes itaque utriusque orbis ΣP, ΣK sunt in ratione velocitatum, ac proinde Planeta in P è Terrâ in K visus, Stationarius erit. Eodem omnino modo demonstrabitur rectas TP, TL esse in ratione velocitatum & TL orbem Terræ contingere in L. Junctæ denique SK SL designabunt loca Terræ e Sole visæ, ac anguli KSP, LSP angulos commutationis quæsitos. Et existente SA lineâ Apsidum Terræ, erunt KSA, LSA, anguli anomaliæ veræ Terræ; unde si quid erratum fuerit in suppositâ velocitate Terræ accuratissimè corrigi poterit.

Al-



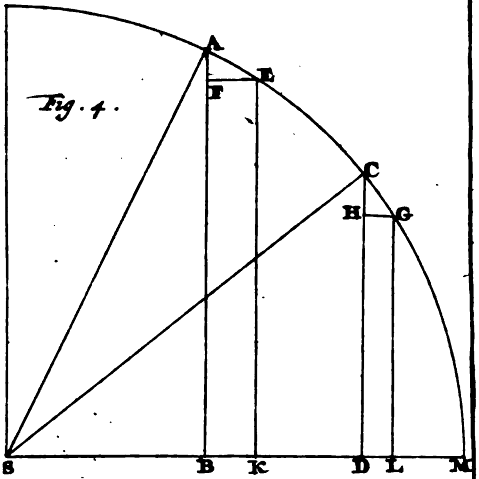


Fig. 4.

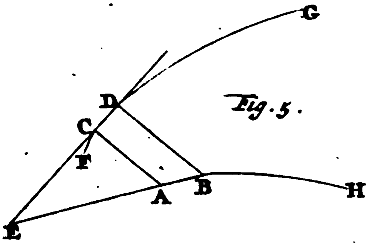
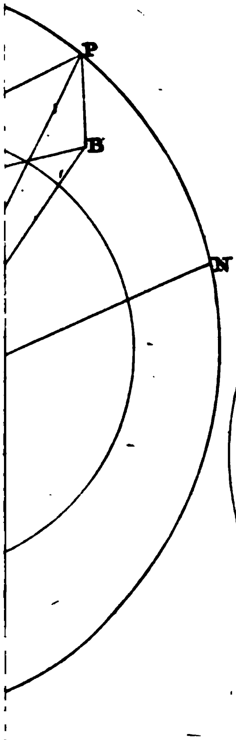


Fig. 5.



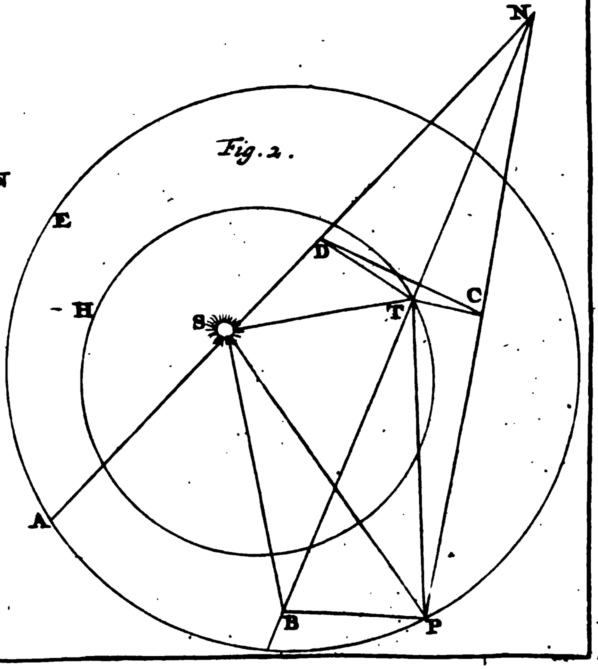


Fig. 2.

Alterius generis est Problema, *Stationis alicujus tempus definire*; cujus Solutio per Geometriam vulgarem exhiberi haud potest; illam tamen per approximationem, & methodum indirectam investigavit acutissimus *Halleius*; in cujus Solutione utitur duobus Theorematis à *Cl. Moivreo* inventis; & Horum Theorematum demonstrationes cum in rebus Astronomicis usum habeant, nos dedimus in Lectione XXIII. pag. 424.

Sequitur Solutio *Halleiana*. Quoties Stationis alicujus tempus accuratè definire cupis; Obtentâ prius, Constructione dictâ, vel calculo rudiori, vel etiam ex Ephemeridibus, Stationis quæsitæ die, juxta Tabulas Astronomicas perfectiores, ad Meridiem istius diei capiatur Locus Solis, uti & Planetæ, tam Heliocentricus quàm Geocentricus, unà cum distantiarum utriusque à Sole Logarithmis; & ut reducantur motus ad idem planum, curtetur illa Planetæ. Datur itaque Triangulum, STP, ex principiis Astronomicis, ubi S Solem, T Terram & P Planetam designant. Ducantur Tangentes Orbis Terræ TQ, orbis verò Planetæ PQ, concurrentes in Q. Jam, si forte contingeret reales Planetarum Velocitates esse inter se, ut PQ ad TQ, sive ut sinus anguli PTQ ad Sinum anguli TPQ, constabit Planetas esse in situ Stationi congruo; quia hoc in casu, motus momentaneus Terræ, de T in *t* juxta Tangentem TQ latæ, est ad motum Planetæ de P in *p* juxta Tangentem PQ, ut TQ ad PQ: proinde (per 2. VI *Elem.*) rectæ TP, *tp* parallelæ fiunt, atque adeo Planetæ tali in situ invicem Stationarii apparerent. Tab 41; fig. 5.

Datis autem distantiis ST SP consequitur ratio quam habent velocitates reales inter se, sive T *t* P *p*. Sunt enim velocitates reales mediæ diversorum Planetarum, sive eæ quibuscum ad distantias semiaxibus transversis Orbium æquales, circa Solem circulos discriberent, in subduplicatâ ratione Axium reciprocè. Media autem velocitas Planetæ est ad Velocitatem ejusdem in quovis orbitæ suæ puncto P vel T, in subduplicatâ ratione distantiæ à Sole ad distantiam ejus ab altero Orbitæ Ellipticæ Foco, quam PF & TF nominabimus respectivè. Posito etiam R pro semiaxe transverso superioris planetæ, & r inferioris, compositis rationibus erit Velocitas inferioris Planetæ ad eam superioris, sive T t ad p P ut $\sqrt{R} \times SP \times TF$ ad $\sqrt{r} \times ST \times PF$. Hujus itaque rationis Logarithmus, juxta obliquitatem Tangentis P Q ad Eclipticæ planum reductus, habeatur in promptu.

Ex iisdem etiam distantiis habebuntur anguli S T Q, S P Q; est enim Radius ad Sinum anguli S T Q, ut $\sqrt{ST \times TF}$ ad semiaxem conjugatum Orbitæ Terræ; pariterque Rad. ad Sinum S P Q, ut $\sqrt{SP \times PF}$ ad semiaxem conjugatum Orbitæ Planetæ. Vel, quod paulo paratius est, fiat ut distantia Planetæ in Aphelio ad distantiam Periheliam, ita Tangens semissis anguli quo distat à perihelio suo, ad Tangentem anguli; qui è dicto semisse sublatus, relinquet complementum anguli S P Q ad Quadrantem, vel excessum ejus supra quadrantem, prout contigerit vel acutum vel obtusum esse; ac reducatur ille angulus, si opus sit, ad Eclipticæ planum. His itaque constitutis, ex angulo S T P subducatur angulus S T Q, & angulo S P Q adjiciatur angulus S P T, ut habeantur anguli Q T P, Q P T. Horum sinus, si eandem habeant rationem quam habent velocitates reales in punctis T & P, bene se habet.

Sin minus, Logarithmorum utriusque servetur differentia, sive Error positionis primæ, ac si ratio Velocitatum minor fuerit ratione Sinuum dictorum, minuendus est angulus TSP, addendo vel subducendo motum medium utriusque Planetæ uni diei competentem: & è contra, si major fuerit Velocitatum ratio. Calculoque priori omnino simili, quærantur denuo Logarithmi dictarum rationum, ad Meridiem præcedentis vel sequentis diei, prout casus postulat. Dein conferatur differentia horum Logarithmorum, sive Error Positionis secundæ, cum Errore ad alterum diem invento, & Errorum summa, si diversi signi fuerint, vel differentia, si signi ejusdem, erit ad 24 Horas, ut Errorum alter ad intervallum, quo tempus quæsitæ Stationis distat à Meridie cujus errorem adhibuimus: hoc autem *Regulam Falsi* callentibus manifestum est.

Ad hunc modum Planetarum Stationes intra pauca minuta obtinebuntur: ad tollendum autem errorculum à Logarithmorum dictorum augmento non omnimodè æquabili oriturum, si cui libeat, poterit, ad tempus jam inventum & vero proximum, redintegrato calculo rem penitus verificare: sed hac cautelâ non est opus nisi in Marte & Mercurio.

Ut autem res manifestior fiat, adjungam Exemplum calculi stationis Jovis nuperæ in mense *Novemb.* 9°. 1717.

Exemplum Calculi Stationum.

	Novembris 9°. in Merid.					*Novemb.* 10. Merid.			
Anom. med. ♃.	9ˢ.	10°.	00′.	00″.	—	9.	10.	5.	00.
Mot. med. ☉.	7.	0.	7.	00.	—	7.	1.	6.	8.
♃ Locus Helioc. a 1ª ✱ ♈	2.	25.	11.	00.	—	2.	25.	15.	53.
☉ a 1ª ✱ ♈	6.	28.	53.	17.	—	6.	29.	54.	00.
Log. dist. ♃ à ☉		5.	720650.		—	5.	720680.		
Log. dist. ⊕ à ☉		4.	994267.		—	4.	924186.		
♃ Loc. Geoc.	3.	5.	4.	28.	—	3.	5.	4.	27.
Angulus STP.		113.	48.	49.	—		114.	49.	33.
Angulus SPT.		9.	53.	28.	—		9.	48.	34.
Angulus STQ.		89.	23.	54.	—		89.	23.	54.
Angulus SPQ.		92.	41.	20.	—		92.	41.	14.
Ang. PTQ.		24.	25.	42.	—		25.	25.	39.
& Ang. TPQ.		102.	34.	48.	—		102.	29.	48.
Log. rationis velocitatum.		0.	368210				0.	368321	
Log. rat. Sinuum ang. TPQ. PTQ.		0.	372912				0.	356757	
Error Posit. I.		0.004702+−.			Error posit. II.		011564—,		

Cumque alter errorum est in excessu, alter in defectu, fit ut 16266 errorum summa, ad 4702, ita 24 horæ ad 6^h $56'$. Unde concludere licet stationem Jovis contigisse *Nov.* 9 6^{h} $56'$ P. M.

LECTIO XXVIII.
De Temporis Partibus.

Dies Naturalis. PArtes Temporis omnibus notæ ſunt Dies, Horæ, Hebdomades, Menſes, & Anni. Dies Naturalis, qui à motu apparenti Solis ab oriente in occidentem definitur, eſt illud Temporis ſpatium, quod labitur, dum Sol à Meridiano, vel aliquo alio circulo horario digreſſus ad eundem revolvit; Naturalis dicitur, ut diſtinguatur ab illa vocis ſignificatione, qua Dies Nocti opponitur, & Artificialis nominatur.

Diem diverſæ Gentes diverſimode inchoant. Non idem Diei initium omnes gentes obſervant. Babylonii diem auſpicabantur ab ortu Solis; Judæi & Athenienſes ab occaſu, quod Itali, Auſtriaci, & Bohemi nunc faciunt, & Sole Horizontem occiduum ſubeunte, horam viceſimam quartam numerant, proximam poſt Solis occaſum horam diei primam vocant.

Qui diem ab ortu Solis incipiunt, hoc habent commodi, quod ex horarum numero, ſciant quantum temporis elapſum ſit ab ortu Solis; qui ab occaſu diem inchoant, hoc inde utile capiunt, quod hora ſtatim oſtendit quantum temporis ad Solis diſceſſum reſtat, ut itinera alioſque labores illi proportionari poſſint. At his utriſque, hoc eſt incommodum, quod per numerationem horarum, Meridiei mediæque noctis tempus non innoteſcit, quod non niſi ſubducto calculo illis notum fieri poteſt, nam diverſis anni tempeſtatibus, tempus Meridiei diverſa horâ numerabant. Ægyptii olim diem à media nocte inchoabant; à quibus Hipparchus hunc computandi morem in Aſtronomiam recepit, eumque ſecuti ſunt Copernicus aliique Aſtronomi, maxima tamen Aſtronomorum pars commodius duxerunt, diem à Meridie auſpicari. Sed mos incipiendi diem à media nocte, obtinet apud Brittannos, Gallos, Hiſpanos & alias pleraſque Europæ gentes.

Horæ æquales & inæquales. Hora alia eſt æqualis, alia inæqualis. Hora æqualis eſt viceſima quarta pars Diei Naturalis. Præter craſſam illam vulgi diviſionem horæ in ſemihoras & Quadrantes, hodie communiter recepta est ab Astronomia translata divisio horæ in sexaginta minuta prima, & uniuscujusque minuti primi in sexaginta secunda.

Hora inæqualis est duodecima pars diei Artificialis, item pars duodecima noctis; dicitur etiam *Temporanea*, quod diversis Anni Tempestatibus variæ sit quantitatis, nempe hora diurna Æstiva longior est Hybernâ, & nocturna brevior. In die autem Æquinoctiali, hora diurna nocturnæ est æqualis; unde horæ æquales Æquinoctiales dicuntur; his horis usi sunt olim Judæi, Romani, hodieque Turcæ, atque ita meridies semper in horam diei sextam incidebat. Dicuntur etiam hæ horæ Planetariæ, quod singulis his horis, Planetam quendam ex septem præficere usitatum fuit. Ita *v. gr.* Die Solis, hora temporaria ab ortu prima, Soli tribuitur, proxima Veneri, tertia Mercurio, atque inde cæteræ ordine, Lunæ scil. Saturno, Jovi, Marti, inde fit, ut diei sequentis hora ab ortu prima, Lunæ contingat, ac proinde isti Hebdomadis diei nomen de suo imponat, quod idem in sequentibus ad septimanæ finem usque continuatur.

Hebdomas est septem dierum Systema; variis appellationibus Hebdomadis dies distinguuntur. Ecclesia Christiana primum diem, Dominicum vocat, vulgus Diem Solis nominat, & soli nostri temporis Phanatici Sabbathum nuncupant. Secundum Hebdomadis diem, feriam secundam; tertium, feriam tertiam, & ita deinceps, septimum autem diem Sabbathum nominat Ecclesia. Vulgus autem nomina dierum à Romanis usitata & à Planetis denominata indita retinet. *Hebdomades.*

Mensis proprie est spatium temporis, quod Luna motu suo metitur, in quo per Zodiacum integrum defertur, quem circulum duodecies in anno absolvit. Est alius mensis huic propemodum æqualis, quem Solis motus metitur, estque spatium temporis, quo Sol unum signum, seu partem Eclipticæ duodecimam, describit. Sed hi menses Astronomici sunt, à quibus differt civilis mensis, qui pro Regni alicujus aut Reipublicæ instituto pluribus aut paucioribus constat diebus. *Mensem proprie Lunæ motus metitur.*

Ægyptii olim mensem quemlibet diebus 30. constare volebant; diesque illi quinque, ex quibus annus constabat, ultra dierum in mensibus numerum, Epagomenæ dicebantur.

Annus Astronomicus & Civilis. Annus est vel Astronomicus vel Civilis. Anni Astronomici utramque speciem, scil. Tropicum & Periodicum, in Lectione XXII. definivimus. Annus civilis idem qui politicus in Republica aut Regno aliquo receptus, est quoque duplex, Lunaris, aut Solaris, prout Lunæ vel Solis motibus conformis redditur; *Lunaris & Solaris Vagus & Fixus.* ille Lunaris rursus duplex, est Vagus vel Fixus. Annus Lunaris vagus constat duodecim mensibus synodicis, vel duodecim Lunationibus; qui diebus 354 absolvuntur, quibus exactis Annus Civilis denuo incipit. Deficit itaque hic Annus à Solari vertente, qui tempestates reducit, diebus undecim, inde fit ut Annorum initia per omnes Anni tempestates vagentur, idque spatio 32 Annorum, ideoque Annus vagus dicitur. Hac Anni forma utuntur Turcæ & Mahumedani.

Cum duodecim Lunationes deficiunt ab Anno Solari diebus undecim, in tribus Annis Solaribus, Lunationes 36 seu tres Anni Lunares deficerent à Solaribus 33 diebus, itaque ut retineantur menses in iisdem Anni Solaris cardinibus, Anno tertio mensis integer superadditur, quod fit quoties opus fuerit ut Anni initium in eadem Tempestate retineatur, & Mensis hic superadditus *Embolimæus* seu Intercalarius dicebatur. In Annis novemdecim, hujusmodi menses intercalares sunt septem, Annusque hujus formæ Lunaris Fixus nominatur. Tali anno usi sunt Græci, hosque imitati Romani, usque ad Julium Cæsarem.

Annus Solaris vagus dicitur Ægyptiacus. Annus Civilis, qui ad motum Solis ligatur, est quoque vel fixus vel vagus. Vagus dicitur Ægyptiacus quo utebantur Ægyptii, & constabat diebus 365, & ab Anno Tropico fere sex horis deficit, harum horarum neglectu, fit ut quarto quolibet anno, uno die, anteverterit hic annus Annum seu Periodum Solarem; adeoque quater 365. annis, hoc est annis 1460, initium ejus vagatur per singulas anni Tempestates.

Cum

Cum itaque Annus Ægyptiacus dierum 365, horis fere ſex deficit à vero Anno Solari, ut Anni omnes pari paſſu cum Sole progrediantur, horarum excurrentium ratio neceſſario habenda eſt; ſed convenit quoque, ut Anni Politici idem ſemper ſit initium, atque ut ab initio diei is exordium capiat. Non enim incipere debet annus modo ab una die hora, modo ab alia, quod fieri neceſſe erit, ſi ſingulis annis addantur ſex excurrentes horæ; ſed horæ illæ coacervatæ in tribus annis, additæque ſex horis quarti anni diem integrum efficiunt. Hic dies quarto anno additus, illum cum motu Solis rurſus congruere faciet. Hæc perſpiciens Julius Cæſar, quarto cuilibet anno, diem intercalarem adjecit, qui itaque conſtaret diebus 366. & dies additus eſt menſi Februario. Et cum in anno vulgari dies Februarii 24. dicatur ſextus Kalendas Martii, ſeu ſextus ante Kalendas, ſtatuit Cæſar ut quarto anno id dicatur bis, ita ut in illo anno, ſint bini dies quarum quilibet erit ſextus ante Kalendas Martii; Itaque ille Annus Biſſextilis dicebatur. Hæc forma anni à Julio Cæſare, apud Romanos Pontifice Maximo, inſtituta fuit, & Juliana vocabatur, cujus hæc eſt proprietas, ut quartus quilibet Annus ſit Biſſextilis dierum 366, reliqui tres communes 365 dierum. *Annus Julianus Fixus.*

Interim fatendum eſt, Tempus Anno Solari à Julio Cæſare tributum, eſſe nimium; nam Sol ſuum curſum in Ecliptica abſolvit diebus 365, horis 5, min. 49, unde 11 minutis primis citius curſum redintegrat, quam incipit annus Julianus. Si itaque Sol in quodam anno, viceſimo Martii die Æquinoctium, Meridie ingrediatur; proximo anno, undecim minutis ante Meridiem ad Æquinoctialem circulum perveniet, & anno ſequenti viginti duobus minutis ante Meridiem, eundem circulum attinget, atque ita ſingulis annis, Sol motu ſuo undecim minutis annum civilem antevertendo in Annis 131, integro die Annum Julianum anticipabit. Ita Æquinoctium cæleſte non in eodem ſemper anni civilis die hærebit, ſed ſenſim verſus initium Anni feretur, regreſſu tam manifeſto ut in dubium vocari non poſſit.

Hinc

Hinc cum tempore Concilii *Niceni*, quando termini celebrandi Paschatis instituti fuerunt, Æquinoctium Vernale hærebat in 21 die Martii, id continuo retro labendo, tandem anno Domini 1572, quo Kalendarium correctum est, deprehensum est ad undecimum Martii diem per integros dies decem abrepsisse. Adeoque cum restituere cuperet *Gregorius* XIII. Episcopus Romanus Æquinoctium ad pristinam sedem, dies illos decem è Kalendario exemit, statuitque ut dies undecimus Martii, vicesimus primus numeretur; & ne deinceps, simili modo, sublaberentur Anni cardines, cavit ut centesimus quisque Æræ Christianæ annus communis esset, qui secundum Julium debebat esse Bissextilis; at quartus quisque centesimus Bissextilis maneret. Nova hæc Anni forma, ab Episcopo Romano *Gregorio* XIII. cujus auctoritate stabilita fuerat, *Gregoriana* dicta est, eamque receperunt Galliæ, Hispaniæ, Germania & Italia, Regionesque omnes quæ Pontificis Romani auctoritatem agnoscunt; sed etiam in Hollandia, & exeunte sæculo proxime elapso, à multis Germaniæ Reformatæ populis recepta est; Britanniæ tamen & aliæ Septentrionales gentes Reformatæ veterem anni formam Julianam retinent.

Annus Gregorianus.

Persæ Formam anni Ægyptiacam etiamnum retinent, inde fit, ut Æquinoctia non in eodem anni mense semper hærent, sed per omnes menses vagantur, & non nisi post peractam Annorum 1460 Periodum, initium anni in idem Solaris Anni Tempus recidit. Quod tempus *Annus Magnus Canicularis* dicebatur, seu *Periodus Sothiaca*, propterea, quod initium ejus sumitur, quando in primo die mensis Thoth, seu primo anni die, Canis sidus oritur Heliace. *Sothis* enim in lingua Ægyptiorum Canem significat, qui Græce est Ἀϛροκύων, id est Astrocanis, & ab Astronomis Sirius dicitur.

Annus Canicularis seu Periodus Sothiaca

Non solum per annos, sed per plurium annorum collectiones, tempora distinguebant veteres, quales fuit *Jubileum*, annorum 49 vel 50, *Sæculum* annorum 100, sed omnium celeberrima apud Græcos habebatur *Olympias*, continens spatium quatuor annorum.

Si-

Sicut in cælo sunt certa puncta, à quibus Astronomi in supputandis motibus initium capiunt; ita etiam sunt certa Temporis puncta, à quibus tanquam radicibus calculi incipiunt; & Res gestæ secundum seriem annorum qui Radicem illam sequuntur, in Historiis disponuntur. Hæ Radices Epochæ seu Æræ dicuntur; à quibus Anni & Tempora numerantur. Celeberrima & nobis maxime familiaris est ea, quæ à Nativitate Domini nostri Jesu Christi denominatur, quæ incipit à Kalendis Januarii, quæ Christi Nativitatem proxime sequuntur. *Æra Christi.*

Verum quamvis Epocha hæc sit ex usu vulgari stabilita, & ubique fere apud Christianos recepta, Angli tamen & Hiberni in negotiis Ecclesiæ & Reipublicæ, Epocha utuntur integro anno posteriore. Hi enim annum incipiunt, non à festo Nativitatis Domini, sed à Festo Incarnationis seu Conceptionis, quæ octavo Kalendas Aprilis celebratur: inde fit, ut ab Incarnatione Domini, usque ad Festum Annunciationis Virginis, anni, verbi gratia, 1718, numerant Angli annos elapsos completos 1717. À Nativitate autem Domini ad Festum Nativitatis anni 1717, numerant tantum annos elapsos 1716, cum secundum reliquum Christianum Orbem, tempus illud continet annos completos 1717.

In hac re, consentientem habent Angli Dionysium Exiguum Æræ Auctorem, secundum quem Christus conceptus est VIII. Kalendas Aprilis primi anni hujus Æræ, & natus Bruma sequente, exeunte anno 46to: à Reformatione Kalendarii per Julium Cæsarem. Hic computus fuit primo universaliter receptus, at nunc tantum in Anglia locum obtinet. Nam in reliquo Orbe Christiano, ab ista Epocha tacite secessum est; & opinio communiter recepta est, Christum natum fuisse Bruma antecedente Incarnationem Dionysiam, nempe exeunte anno Juliano 45to, atque sic Christum uno anno natu majorem faciunt quam Dionysius Æræ Auctor.

Hoc non obstante, Angli per maximam anni partem, annum eundem numero designant, cum reliquo Christiano Orbe. At in tribus fere mensibus, tempore scil. inter Kalendas Januarii, & VIII. Kalendas Aprilis, annum uno minorem ponunt, & diversum à reliquis Christianis numerant.

Celebris quoque est Epocha Mundi Conditi, de qua tamen sunt insignes Controversiæ, dum alii contendunt mundum conditum esse ante Christum natum annis 3950. Alii Christo nascente Ætatem Mundi fuisse annorum 3983. affirmant. Ecclesia Græca, & Imperatores Orientis Epocha utuntur, quæ mundum longe antiquiorem supponit, secundum enim illorum Æram, mundus conditus est annis ante Christum 5509.

Inter prophanos Auctores, antiquissima & celeberrima est Olympiadum Epocha, quæ refertur ad Æstatem anni ante Christum 777, & ipsis Kalendis Julii, in Anno Juliano retro producto.

Non multo posterior est Epocha Romæ seu Urbis Conditæ quæ duplex est, Varoniana & Capitolina, prior Urbem conditam ponit anno ante Christum 753, altera anno 752.

Æra Nabonassari Astronomis semper celebris incipit ad diem 26 Februarii anni Juliani retro producti; Annoque ante Christum 747. Cumque hic dies fuit primus anni Ægyptiaci, Ptolomæus & post illum Copernicus motus siderum per annos Ægyptiacos calculo subjiciunt. Ægyptiorum enim annus calculo Astronomico imprimis commodus est, quia nulla intercalatione perturbatus.

Sequitur Epocha obitûs *Alexandri Magni* die 12^mo^. Novembris. Anno ante Christum 324 qui fuit Vagi Ægyptiaci annus primus. Annos Ægyptiacos dehinc computarunt Theon, Albategnius & alii. Inter Æras Nabonassari & obitûs Alexandri Magni, intercedunt anni Ægyptiaci præcise 424. Est & Æra Abyssinorum quæ & Æra Martyrum & Diocletiani nominatur. Est etiam Æra Arabum seu Turcarum quæ Hegira dicitur; à fuga Mahumedis initium capiens. Alia quoque est Persarum Epocha Jesdegird dicta, quas omnes apud Auctores videre licet. Sed præ omnibus maxime est commoda Juliana Periodus,

re-

reliquas fere omnes Epochas gremio suo complectens. Et est Periodus annorum 7980, qui numerus multiplicatione componitur ex numeris 15, 19, 28, quorum primus est Cyclus Indictionum; secundus est Metonicus, & tertius est Solis Cyclus. Primusque hujus Periodi annus fuit ille in quo hi tres Cycli simul incipiebant.

Subjungam Tabulam quæ primos Ærarum annos, ad annos Julianæ Periodi, vel ad annos ante vel post Christum natum reducit.

	Anni ante Christum	Anni Jul. Periodi.
Epocha Mundi conditi juxta Græcos Imperatores.	5508	
Vulgaris Epocha Mundi conditi.	3950	765
Olympiadum initium.	776	3938
Urbis Conditæ juxta Varronem.	753	3961
Urbis Conditæ ex Capitolinis Festis.	752	3962
Æra Nabonassari.	747	3967
Alexandri Magni mors.	324	4390
	An Christ.	
Annus Epochæ Christianæ vulgaris.	1	4714
Diocletianæ Æræ.	284	4997
Hegira Arabum.	622	5335
Jesdagirda Persarum.	632	5345

LECTIO XXIX.

De Kalendario, & Cyclis seu Periodis.

Kalendarium est dierum in anno civili dispositio secundum proprios menses, & eorundem in Hebdomades distributio, cum Festis, diebusque Juridicis annexis. Distributio in Hebdomades, fit per literas Alphabeti septem priores A, B, C, D, E, F, G. Incipiendo à primo die Januarii, litera A ipsi apponitur, secundo B, tertio C, & ita deinceps, usque ad G, quæ diei septimo affigitur; & inde rursus incipiendo, octavo iterum apponitur A, nono B, decimo C, atque sic continuo repetita literarum serie, singuli anni dies aliquam obtinent literam in Kalendario, & ultimo die Decembris inscribitur litera A.

Distributio dierum Anni in Hebdomades per literas Alphabeti priores septem.

 Nam

Nam si 365. dies dividantur per 7, proveniunt Hebdomades 52, & unus præterea superest dies. Quod si nullus superesset dies, Anni omnes ab eodem septimanæ die, semper inciperent, & quilibet mensis dies in determinatum & statum hebdomadis diem semper incideret; nunc vero, quoniam in anno, præter hebdomades completas, est unus dies, factum est ut in quocunque septimanæ die, incipit annus, in eodem finitur; proximusque annus à proximo die incipit; *v. gr.* in anno communi 365. dierum, si is incipit die Dominica, ultimus anni dies erit etiam dies Dominica. Et primus sequentis anni dies est dies Lunæ.

Literæ Dominicales.

Literis hac ratione dispositis in anno communi illa quæ primæ Januarii Dominicæ respondet, per totum illum annum Dominicas indicabit, & quibuscunque diebus, in aliis mensibus, affigitur illa litera, dies illi omnes erunt Dominicæ; ideoque litera illa istius anni Dominicalis vocatur; sic etiam quæcunque litera apponitur diei Lunæ in Januario primæ, eadem in Kalendario repetita omnes Lunæ dies per totum annum monstrabit, atque sic de cæteris.

Si prima Januarii dies sit Dominica, cui respondet litera A, ultima, uti ostendi, erit quoque Dominica. Adeoque annus sequens die Lunæ incipiet, & Dominica cadet in diem septimum, cui respondit litera G, quæ itaque erit litera Dominicalis per totum illum annum; cumque annus die Lunæ incipit, die quoque Lunæ terminabitur, & in anno sequente prima Januarii dies fiet Martis, Primaque Dominica cadet in sextam mensis diem, cui in Kalendario respondet litera F, atque eodem modo anno sequente litera Dominicalis foret E; & hac ratione literæ Dominicales ordine semper retrogrado feruntur per G, F, E, D, C, B, A. In Kalendariis annuis, quæ *Almanacks* voce Arabica vocantur, litera anni Dominicalis ut facilius dignoscatur, semper majuscula pingitur. Adeoque unico intuitu totius anni Dominicas aspicere liceat.

Si omnes anni essent Ægyptiaci, dierum 365, post exactum septem annorum curriculum, iidem mensium dies ad eosdem Hebdomadis dies redirent. Verum quoniam quartus

tus quilibet annus est Bissextilis dierum 366, in quo ultra septimanas 52, supersunt dies duo, si annus ille incipit die Dominica, in die Lunæ terminabitur, & proximus post hunc Bissextilem annus, a die Martis incipiet, primaque ejusdem anni Dominica in sextam mensis diem cadet, cui respondet litera F, pro sequentis anni Dominicali. Atque ita per annum Bissextilem, qui singulis quatuor annis recurrit, interrumpitur Literarum Dominicalium ordo, qui non redit, nisi post absolutos annos quater septem seu annos 28.

Hinc oritur Cyclus ille annorum 28, qui *Solaris* dicitur, quo completo, redeunt anni dies ad easdem septimanæ dies; in hoc Cyclo anni omnes Bissextiles, duas obtinent literas Dominicales, quarum prima usque ad diem Februarii 24, aut 25. Intercalarem inservit; altera per reliquum omne anni tempus Dominicas indicabit. Nam in anno Bissextili, Februarii dies vicesimus quartus, & vicesimus quintus pro eodem habentur die, & uterque eâdem literâ F insignitur; & hinc interrumpitur literarum ordo, quo dies Hebdomadis commonstrantur; *v. gr.* sit litera Dominicalis initio anni E, vicesimus quartus Februarii in diem Lunæ cadet, & vicesimus quintus in diem Martis; quibus utrisque apponitur litera F; unde sequens litera G quæ prius diem Martis indicabat, nunc ad diem Mercurii apponetur; & proxima Dominica in primam Martii diem incidet, cui in Kalendario adhæret litera D, quæ hac ratione per reliquum anni tempus, Dominicalis evadit. *Cyclus Solis.*

Cycli Solaris primus annus est Bissextilis, cui respondent literæ Dominicales G, F. Secundi anni litera Dominicalis est E, tertii D, quarti C; quintus Cycli annus rursus Bissextilis est cui congruunt literæ Dominicales B, A, & ita in cæteris. Laterculus sequens ostendit, quæ litera Dominicalis respondet cuivis Cycli Solaris Anno, ut annus Cycli

1	GF	5	BA	9	DC	13	FE	17	AG	21	CB	25	ED
2	E	6	G	10	B	14	D	18	F	22	A	26	C
3	D	7	F	11	A	15	C	19	E	23	G	27	B
4	C	8	E	12	G	16	B	20	D	24	F	28	A

Solaris inveniatur, pro quolibet Æræ Christianæ anno; ad annum Christi currentem addantur 9, quia ab initio Cycl i ad annum Christi primum, novem anni elapsi sunt, & summam divide per 28. Quotiens ostendet numerum Cyclorum, qui absoluti fuerunt a primo Cycli Solaris anno, ante Christum ad annum illum currentem, qui restat vero numerus, est Cycli Solaris currens annus, quod si nihil post divisionem restet 28. est annus Cycli.

Præter Festa stabilia, certis quibusdam anni diebus affixa, sunt & alii quoque dies Festi mutabiles, qui in diversis annis, diversis diebus contingunt, qui proinde non ex Solis, sed Lunæ motu pendent. Tale est a Deo ipso apud Judæos institutum *Paschatis Festum*, cui successit *Pascha Christianum* in memoriam Resurrectionis Domini receptum, & commemorandum. Instituit autem Deus Pascha celebrandum esse mense primo; decima quarta die mensis, ad Vesperam *Levit. cap.* 13 Annus autem Judæorum Lunaris fuit, & Embolismicis ita temperatus, ut is mensis diceretur primus, cujus decima quarta, hoc est Plenilunium, vel in diem Æquinoctii Vernalis caderet, vel eum proxime sequeretur. Ecclesia Christiana eandem fere regulam observare voluit. Vetuit tamen ne Pascha in ipsa decimaquarta celebretur, sed die Dominica proxime insequenti; eo quod Dominus die Dominica post Pascha Judæorum, a mortuis resurrexit.

Quâ ratione definitur tempus celebrandi Pascha.

Primo itaque ad determinandum Paschatis celebrandi tempus, constituendum est Æquinoctium, quod diei Martii 21. affixum esse crediderunt omnes antiqui nec ab ea sede unquam dimovendum; ideoque suum Kalendarium ad hanc suppositionem aptarunt. Deinde eum mensem primum, seu Paschalem esse voluerunt, cujus decima quarta aut in Æquinoctium caderet, hoc est in diem qui 21. diem Martii, aut proxime illum sequeretur; sed cum menses Judæorum Lunares fuerint, decima quarta mensis dies diem Plenilunii immediate præcedit; unde in observatione Paschatis motus Lunaris ratio habenda est, & Novilunia & Plenilunia sunt invenienda. Judæis Novilunia per obser-

va-

vationes ſolum innotuere, hi enim obſervabant quando Luna primum è Solis radiis emergens Heliace Veſpere oriebatur, illamque diem Lunæ primam dicebant. At Eccleſia Chriſtiana per Cyclum Metonicum novemdecim annorum Lunationes computat, & ideo dictum Cyclum in Kalendario recepit, ut per illam Lunationes determinentur.

Eſt autem *Cyclus Metonicus* ab inventore ejus Metone nomen deducens, qui & Cyclus Lunaris dicitur, Periodus Novemdecim Annorum, quibus abſolutis Novilunia & Plenilunia Media ad eoſdem menſium dies redeunt, adeo ut quibuſcunque diebus Novilunia & Plenilunia hoc anno accidunt, novemdecim abhinc annis, in eoſdem dies incident, & ut exiſtimarunt Meton & Primitivi Eccleſiæ patres in eaſdem dierum partes ſcil. horas & minuta. Adeoque tempore Concilii Niceni circa quod tempus, Paſchatis celebrandi ratio determinabatur: Cycli Lunaris Numeri Kalendario adjuncti fuere, quos propter Excellentiam & Commoditatem Aureis literis inſcribebant Veteres, Annumque Cycli pro quolibet anno propoſito Aureum numerum vocabant.

Hac ratione Numeri Aurei diebus Kalendarii appoſiti fuere, vel certe apponi potuiſſent. Aſſumpto quolibet anno, pro initio Cycli, cui numerus Aureus 1 tributus eſt; obſervatis, in ſingulis menſibus, diebus in quibus Novilunia acciderent, eo anno è regione horum dierum appoſuerunt Characterem I, & quia eo anno Novilunia accidebant Januarii 23, Februarii 21, Martii 23, Aprilis 21, Maji 21, Junii 19, & ita de cæteris, è regione horum dierum in Columna Cycli Lunaris unitas appoſita eſt. Sequenti anno obſervatis Noviluniis, è regione dierum quibus acciderunt, inſcripſerunt veteres in Columna Numerorum Aureorum Characterem II, nempe ad 12 Januarii, 10 Februarii, 12 Martii, 10 Aprilis, & ita in aliis menſibus. Idem factum fuit tertio Anno appoſito Charactere III, è regione dierum quibus Novilunia obſervabantur, & idem in aliis annis conſequentibus uſque dum abſolutus fuit Cyclus annorum 19. Sed numerorum diſpoſitio maxime accurata fit per Tabulas Aſtro-

Aſtronomicas, computando pro ſingulis menſibus, ſingulisque Lunaris Cycli annis, novilunia media, iiſque diebus quibus ea accidere deprehenſum fuerit Cycli Characteres apponendo. Quoniam menſis Lunaris Aſtronomicus conſtat diebus 29. horis 12. min. 44. ſecund. 3. ſed vulgus qui minutias diſtinguere non poteſt, Menſes Lunares ex diebus integris componit, ita ut alternis vicibus Lunationes conſtent 30. & 29. diebus quarum hæ cavæ, illæ plenæ dicuntur, id exigente quantitate menſis Aſtronomici dierum 29, horarum 12, quia autem ſunt præterea 44. min. ſeu fere tres horæ quadrantes in ſingulis Lunationibus, intra 32. Lunationes hæc minuta collecta diem efficient, qui cavo menſi addendus eſt, & hac ratione Lunationes Kalendarii cum cæleſtibus fere convenient.

Si detur annus Cycli Lunaris, dabuntur ope Kalendarii, Noviluniorum dies per totum annum, nam in ſingulis menſibus numerus Cycli ſeu Aureus diem oſtendet in quo contingit Novilunium medium, & huic addendo dies quatuordecim, habebitur dies Plenilunii.

Veteres exiſtimabant Cyclum novemdecim annorum exacte exhaurire Lunationes 225, adeoque poſt revolutionem annorum Cycli, Novilunia non tantum ad eoſdem menſium dies, ſed etiam ad eaſdem horas redire. Quod verum non eſt. Nam in annis Julianis 19, ſunt dies 6939, horæ 18. At ſi ſingulis Lunationibus tribuantur dies 29. horæ 12. min. 44. ſecund. 3. ut motus Lunæ poſtulat, Lunationes 253. efficient 6939 dies, horas 16. min. 31. ſecund. 45, non igitur Lunationes 253 adæquant annos Julianos 19, ſed deficiunt una hora cum dimidia, unde Novilunia poſt annos 19. non redibunt ad eandem horam, ſed una hora cum dimidia citius accidunt, & intra annos 304. Novilunia antecedunt annum Julianum una die: ſatis itaque præciſe per tres annorum Centurias numerus aureus Novilunia oſtendet, ſine errore 24. horarum ſeu unius diei. Adeoque tempore Concilii Niceni quando Cyclus Novemdecennalis Kalendario adaptatus fuit, & per aliquot annorum centurias poſt illud, ſatis rite indicabat Cyclus ille Novilunia; ſed

ſed nunc Lunationes intra 304. annos uno die continuo antecedendo, quinque fere diebus citius accidunt, quam tempore Concilii Niceni, ſeu quod idem eſt, Novilunia cæleſtia Lunationes per Cyclum Aureum computatas quinque diebus antecedunt. Sed hoc non obſtante, Eccleſia Anglicana retinet modum computandi Novilunia per numeros Aureos, ſicuti tempore Niceni Concilii in Kalendario diſpoſiti fuere; adeoque Novilunia ſic computata dicuntur *Eccleſiaſtica*, ut diſtinguantur à veris. Et Generalis perpetuaque Tabula quæ in Liturgia Anglicana habetur, pro tempore Paſchatis per hos numeros Aureos ſecundum diverſas literas Dominicales computata eſt.

Primus annus Æræ Chriſtianæ numerum Aureum habuit 2, ſeu Cyclus incepit anno ante Chriſtum natum; adeoque ſi ad annum Chriſti quemlibet currentem addatur 1, & ſumma per 19. dividatur, qui reſtat præter quotientem, erit Aureus iſtius anni numerus.

Ex Cyclis Solis & Lunæ in ſe invicem multiplicatis, conflatur tertia Periodus annorum 532, quæ Victoriana aut Dionyſiana dicitur à Dionyſio exiguo ejus inventore. Et eſt Cyclus annorum, quibus abſolutis non tantum Novilunia & Plenilunia ad eoſdem circiter menſium dies redeunt, ſed & dies omnes menſium in eoſdem ſeptimanæ dies recedunt, adeoque literæ Dominicales & Feſta Mobilia eodem ordine recurrunt. Unde dicitur hic Cyclus, Magnus Cyclus Paſchalis.

Dato anno Æræ Chriſtianæ, ut inveniatur annus Periodi Dionyſianæ, ad annum currentem addatur numerus 457, & ſumma dividatur per 532, qui reſtat præter quotientem numerus erit annus Periodi quæſitus.

Alterius generis eſt Problema, datis Cyclorum Solis & Lunæ annis, invenire annum Periodi Dionyſianæ, *v. gr.* ſit Cycli Lunaris annus 17, Solaris 21, quæritur numerus qui ſi per 19 dividatur, relinquentur 17, at ſi per 28 dividatur relinquentur 21, qui ut inveniatur, quærantur duo numeri, quorum unum metitur numerus 28, at ſi per 19 idem dividatur, relinquentur 17, alterum numerum metitur 19, at si per 28 dividatur idem numerus, relinquentur 21, nam patet horum numerorum summam proposito satisfacere.

Ad investigationem horum numerorum analyticam, ponamus numerum primum esse $28x$, Est enim multiplex numeri 28, & quoniam hic numerus divisus per 19, relinquit 17, auferatur à $28x$, numerus 17, & reliquus erit multiplex numeri 19, ideoque 19 dividet $28x-17$, sed dividit quoque 19 numerum $19x$, quare dividet differentiam numerorum scil. $9x-17$, qui itaque erit multiplex numeri 19, sit $9x-17=19n$, & erit n numerus integer & $x=\frac{19n+17}{9}$. Itaque cum x sit numerus integer, 9 dividet $19n+17$, sed 9 dividit $18n+9$, quare patet, numerum 9 dividere $n+8$, adeoque $\frac{n+8}{9}$ est numerus integer, sit ille 1, & erit $n=1$, & $x=4$, unde $28x=112=$ numero primo inveniendo.

Sit secundus numerus $19y$, est enim multiplex numeri 19, unde $\frac{19y-21}{28}$, est numerus integer, sit $19y-21=28n$, unde $y=\frac{28n+21}{19}$ quare cum 19 dividat $19n+19$, dividet etiam $9n+2$, eritque $\frac{9n+2}{19}$ numerus integer, sit ille $=p$; unde $9n+2=19p$ & $n=\frac{19p-2}{9}$, cumque 9 dividat $18p$, dividet etiam $p-2$; ideoque $\frac{p-2}{9}$ est numerus integer vel nihil, sit $=0$, eritque $p=2$ & $n=\frac{19p-2}{9}=4$ & $19y=28n+21=133$, est itaque numerorum unus 112, & alter 133, quorum summa 245 proposito satisfacit, & quandocunque Cyclus Solis est 21, & Lunæ 17, annus Periodi Dionysianæ est 245.

Hoc idem Problema aliter solvi potest per duos determinatos & constantes multiplicatores, tales, ut unus dividi possit per 28 sine residuo, at si per 19 dividatur, residuum sit 1, alterum dividit sine residuo numerus 19, at si numerus 28 eundem dividat, residuum sit 1. Tales numeri itidem

dem inveniuntur ac præcedentes, hac scil. ratione; sit primus numerus $28x$, alter $19y$; quare numerus 19 dividet sine residuo $28x-1$, adeoque dividet quoque $9x-1$; sit $\frac{9x-1}{19}=n$, erit $x=\frac{19n+1}{9}$, unde $\frac{n+1}{9}$ erit numerus integer, & minimus numerus qui pro n poni potest erit 8, sit itaque $n=8$, fit $x=\frac{19n+1}{9}=17$, unde primus numerus $=28x$ erit 476. Sit iterum $\frac{19y-1}{28}=n$, unde $y=\frac{28n+1}{19}$; sit $\frac{9n+1}{19}=p$, erit $n=\frac{19p-1}{9}$, & $\frac{p-1}{9}$ numerus integer, vel nihil. Sit $p-1=0$ erit $p=1$, & $n=\frac{19p-1}{9}=2$, & $19y=28n+1=57$. Numeri itaque quæsiti sunt $=476$ & 57. Et quoniam numero 476 diviso per 19, restat 1, si 476 per numerum quemlibet minorem quam 19 multiplicetur, & productus per 19 dividatur, restabit præter quotientem numerus qui 476 multiplicat. Similiter quoniam 57 divisus per 28, residuum fit 1; si hic numerus 57 per numerum quemlibet minorem quam 28 multiplicetur, & productus per 28 dividatur, relinquetur numerus multiplicans.

Hinc elicitur Canon pro inveniendo Anno Periodi Dionysianæ qui sequitur.

Multiplicetur numerus Cycli Solaris per 57, & numerus Cycli Lunaris per 476. Productorum summa dividatur per 532, qui restat præter quotientem numerus erit annus Periodi quæsitus.

Præter Cyclos Solis & Lunæ, est & alius Cyclus qui *Indictionum* dicitur, apud Romanos receptus, qui nullam habet connexionem cum motibus cælestibus, & est annorum quindecim Revolutio, quibus expletis, rursus incipit. Frequens ejus occurrit mentio in Diplomatibus Cæsariis & Pontificiis. Anno ante Christum natum; Indictionis numerus fuit 3. Adeoque si ad annum Christi addantur 3, & summa dividatur per 15, residuum ostendet Indictionis annum.

Ex tribus Cyclis Solis, Lunæ & Indictionis multiplicatione conflatur Periodus Juliana annorum 7980. Hæc Periodus incepit 764 annos ante Mundum conditum, & nondum est absoluta, adeoque in se complectitur res omnes gestas omnemque historiam, & unus tantum est in tota Periodo annus, qui eosdem habet numeros pro tribus Cyclis ex quibus conflatur. Adeoque si Historici notassent in suis Annalibus cujusque anni Cyclos, exinde tolleretur omnis temporum ambiguitas.

Annus ante Christum fuit Periodi Julianæ 4713. Adeoque ex dato anno Æræ Christianæ, annus Periodi Julianæ respondens invenitur ei addendo 4713, & summa est annus Julianæ Periodi. E contra ab anno Periodi Julianæ auferendo 4713. residuum ostendit annum Æræ Christianæ.

Datis annis, Cycli Solaris, Lunaris, & Indictionis, invenire annum Periodi Julianæ. Problema hoc eodem modo solvitur, quo similis Problematis de Periodo Dionysiana solutionem dedimus, scil. inveniantur tres numeri tales, ut primus sit multiplex numerorum 19 & 15, seu eorum producti 285, at per 28 divisus relinquat numerum Cycli Solaris, secundus sit multiplex numerorum 28 & 15, seu eorum producti 420, at per 19 divisus relinquat numerum Cycli Lunaris. Tertius denique sit multiplex numerorum 28 & 19, at per 15 divisus relinquat numerum Cycli Indictionis. Horum numerorum summa si minor sit 7980. erit annus Periodi Julianæ quæsitus. Quod si major fuerit, dividatur per 7980, & residuus numerus erit annus Periodi Julianæ.

Potest etiam Problema solvi per determinatos, & constantes tres multiplicatores, quorum primus sit multiplex numeri 285, at per 28 divisus relinquat 1. Secundus sit multiplex numeri 420, at per 19 divisus relinquat 1. Tertius sit multiplex numeri 532, at per 15 divisus relinquat 1. Hi numeri inveniuntur methodo in præcedente Problemate, de Periodo Dionysiana, ostensa, & sunt 4845, 4200, 6916. Quibus inventis Canon pro inveniendo anno Julianæ Periodi, ex datis Cyclorum annis est qui sequitur.

An-

Annus Cycli Solaris multiplicet numerum 4845, Cycli Lunaris annus numerum 4200, & Indictionis annus numerum 6916. Productorum summa dividatur per 7980, omisso quotiente, residuum erit annus Periodi Julianæ. Exemplum hoc anno 1718. Cyclus Solis est 19. Lunæ 9. Indictionis 11. multiplicetur 4845. per 19, productus est 92055, & 4200. per 9, productus est 37800. Denique 6916. in 11 ductus, productus est 76076. Productorum summa est 205931, qui per 7980. divisus, residuum præter quotientem erit 6431. annus Periodi Julianæ.

LECTIO XXX.

Appendix continens Descriptionem, & usum utriusque Globi; & Problemata quædam Sphærica, calculo Trigonometrico absolvenda. Ex Nicolai Mercatoris Astronomia.

EOrum, quæ ad globos pertinent, quædam sunt utrique communia, quædam vero alterutri peculiaria. Et communium quidem alia sunt extra superficiem globi, alia vero in ipsa superficie.

Extra superficiem utriusque globi conspiciuntur.

1. *Duo Poli*, circa quos globi volvuntur, quorum alter *Arcticus*, duobus arctis sive ursis vicinis, idemque *Septentrionalis* à Septemtrionibus, id est, septem stellis plaustri majoris; alter huic oppositus *Antarcticus* appellatur.

2. *Meridianus Æneus*, cujus altera tantum facies, quæ gradibus distincta visitur, & per ipsos polos incedit, est verus Meridianus, atque hæc facies semper obvertenda est Orienti, quemadmodum polus Arcticus Aquiloni. Dividitur autem in quater 90. gradus, quorum bis 90. incipiunt numerari ab ea parte Æquinoctialis, quæ est supra Horizontem, versus utrumque polum; at reliqui bis 90 gradûs incipiunt ab utroque polo, & desinunt in Æquinoctiali sub Horizonte.

3. *Horizon ligneus*, cujus facies superior refert verum

Horizontem, & dividitur in varios circulos, quorum intimus continet duodecim ſigna Cæleſtia, nominibus & characteribus ſuis diſtincta, & in gradûs tricenos diſtributa. Huic proxime jungitur Kalendarium Julianum pariter ac Gregorianum, utrumque in menſes & dies diſtributum. In extima ora extat circulus ventorum ſive plagarum mundi, quemadmodum hodie a naucleris appellitantur.

4. *Quadrans altitudinis*, cujus margo is, qui gradibus diſtinguitur, applicandus eſt Meridiani gradui nonageſimo utrinque ab Horizonte computando. Numerantur autem in eo gradus ab Horizonte ſurſum ad ipſum uſque verticem ſive Zenith.

5. *Circulus Horarius* diviſus in bis 12. horas, quarum 12. meridiana ſurſum verſus Zenith, at 12. nocturna deorſum verſus Horizontem ſpectat; utraque vero faciei Meridiani Orientali & gradibus diſtinctæ congruere debet, ita ut polus *indicem horarium* geſtans ipſum centrum occupet, atque ipſe index motu diurno circumactus oſtendat horas in Orientali ſemicirculo antemeridianas, in Occidentali pomeridianas.

6. *Pyxis nautica* pedamento impoſita, cujus ope globus ad mundi plagas dirigitur.

7. *Semicirculus poſitionis*, cujus extremitates cardinibus Meridiei & Septentrionis affigendæ, ita ut ipſe ſemicirculus inde ab Horizonte ad Meridianum uſque libere ad quemvis ſitum elevari poſſit. Atque hæc quidem extra ſuperficiem utriuſque globi viſuntur.

At in ipſa ſuperficie delineantur præterea hi circuli:

1. *Æquinoctialis*, in gradus 360. diviſus, quorum numerationis initium eſt a ſectione verna, ſeu principio Arietis, indeque continuantur circumcirca, donec ad idem principium revertantur.

2. *Ecliptica* diviſa in ſigna 12, & horum quodlibet in gradus 30. nomina & ſeries ſignorum memoriâ tenenda.

♈ ♉ ♊ ♋ ♌ ♍
Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
♎ ♏ ♐ ♑ ♒ ♓
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Piſces.

Ecli-

Eclipticam Sol motu annuo peragrat; & si spatium illi addamus in latum utrinque octo circiter graduum, efficitur *Zodiacus* à duodecim asterismis, quorum plerique animalium similitudinem quandam habent, ita dictus; atque sub hoc circulo lato Luna & cæteri Planetæ motus suos periodicos exercent.

Discernitur Ecliptica ab Æquinoctiali, quod hic quidem dum volvitur globus, eundem perpetuo situm obtinet, atque eidem puncto Meridiani & Horizontis adjunctus manet; illa vero quolibet momento situm mutat, nunc elevata, nunc humilis, nunc huic, nunc isti gradui Æquatoris vel Horizontis applicata.

3. *Tropici duo*, *Cancri* nimirum & *Capricorni*, qui sunt limites excursuum Solis ab Æquinoctiali in Boream atque Austrum, includentes utrinque obliquam Solis viam, id est, Eclipticam. Nec inepte dici poterant *parallelorum Solis extremi*. Cum enim Sol quotidie alium atque alium Eclipticæ gradum occupet motu suo annuo, fit ut gradus ille una cum Sole abreptus motu diurno, circulum quendam describat Æquatori parallelum, adeoque tot evadant paralleli, quot sunt dies à brevissimo ad longissimum. Quanquam Sol non moratus in eodem gradu, sed revolutionis diurnæ spatio promotus ad vicinum, non perfectum describit parallelum, sed lineam potius spiralem; attamen harum spiralium distantia cum sit exigua adeo, præsertim prope Tropicos; nihil impedit, quo minus singulæ revolutiones, maxime extremæ, hoc est, ipsi Tropici, parallelorum loco haberi possint, id quod usui quotidiano satis est, & commoditate præstat.

4. *Polares duo*, *Arcticus* & *Antarcticus* de quibus actum est in Lect. VII. & XIX. Atque hæc quidem hactenus enarrata utrique globo sunt communia, quanquam Ecliptica & semicirculus positionis proprie pertinent ad globum cœlestem tantum; adduntur tamen etiam globo terrestri, ut Phænomena, quæ motum Solis annuum sequuntur, & cuspides domorum, etiam per hunc, quando opus est, explicari possint.

Quæ

Quæ vero alterutri globo peculiaria sunt, partim sunt circuli vel lineæ quædam curvæ, ut in globo cœlesti duo Coluri, & circuli latitudinis; in Terrestri Meridiani, Paralleli & Loxodromiæ; partim vero sunt deformationes, in globo quidem Terrestri Terrarum & Marium, quas Geographiæ contemplandas permittimus; at in globo Cœlesti Fixarum, & qui ex his constituuntur, Asterismorum, sive constellationum, numero 48, quorum 12 occupant Zodiacum, & nominibus distinguuntur iisdem, quibus signa Eclipticæ anastra, sive Dodecatemoria. Qui vero ab his vergunt ad boream Asterismi numero 21, sic appellantur:

Ursa minor, *Ursa major*, *Draco*, *Cepheus*, *Arctophylax* (*Bootes*) *Corona Gnossia*, *Hercules in genibus*, *Lyra*, *Cygnus*, *Cassiopeia*, *Perseus*, *Andromeda*, *Triangulum*, *Auriga*, *Pegasus*, *Equiculus*, *Delphin*, *Sagitta*, *Aquila*, *Serpentarius*, *Serpens*.

At ab eodem Zodiaco in austrum recedunt imagines numero 15:

Cetus, *Eridanus*, *Lepus*, *Orion*, *Canis major*, *Canis minor*, *Argo navis*, *Hydra*, *Crater*, *Corvus*, *Centaurus*, *Lupa*. *Ara*, *Corona australis*, *Piscis austrinus*.

Præter has imagines 48 nobis conspicuas observatæ sunt aliæ circa polum australem numero 12.

Phœnix, *Grus*, *Indus*, *Xiphias*, *Pavo*, *Anser*, & *Hydrus*, *Passer*, *Apus*, *Triquetrum*. *Musca*, *Chamæ*que *leon*.

Ne quid addam de *Via Lactea*, quæ est circulus latus, candens, totum cœlum ambiens, nonnunquam duplici tramite, at plerumque simplici incedens. Hunc veterum nonnulli exhalationem quandam crediderunt in aëre suspensam; at nostrum seculum innumeram minutarum fixarum congeriem esse deprehendit. Illæ vero stellulæ, quanquam situ & magnitudine differentes, in globo exhiberi non solent, sed Telescopio solo discernuntur; ideoque de iis non est quod hoc loco ingeramus plura.

Descriptionem globorum modo expositam sequitur usus eorundem, qui licet multiplex sit, præcipue tamen, ad rem præsentem quod attinet, his fere Problematis explicari potest.

Probl.

Probl. 1. *Dati in globo terrestri loci longitudinem & latitudinem invenire.* Datum locum advolve Meridiano æneo (intellige semper faciei ejus orientali, numeris distinctæ) & gradus Æquatoris, qui tum sub Meridiano reperietur, quocunque numero insignitur, est ipsa longitudo quæsita. Tum ab Æquatore computabis in Meridiano æneo ad locum usque datum gradus latitudinis, quæ erit Septentrionalis, si datus locus ab Æquatore recedat ad Septentrionem; australis autem, si ad austrum.

Probl. 2. *Datâ longitudine & latitudine; locum cui illa congruat in globo terrestri assignare.* Quære in Æquatore gradum longitudinis datæ, atque illum Meridiano æneo advolve. Tum ab Æquatore numera in Meridiano gradus latitudinis datæ versus polum Arcticum vel Antarcticum, prout ipsa latitudo borea fuerit, vel australis; & punctum in quod desinit numeratio, est ipse locus quæsitus.

Probl. 3. *Globum utrumque ad datam latitudinem, vel elevationem poli aptare, nec non quadrantem altitudinis puncto verticali applicare; denique globos ope pyxidis nauticæ ad quatuor mundi cardines disponere.* Si latitudo loci data sit borea, elevetur polus arcticus supra Horizontem; sin australis, Antarcticus: Tum à polo elevato versus Horizontem computa in Meridiano gradus elevationis poli datæ, & punctum, in quod desinit numeratio, adjunge Horizonti, ita globus ad datam elevationem poli aptatus erit. Deinde ab Æquatore computa in Meridiano sursum gradùs latitudinis datæ (quæ semper æqualis est elevationi poli) & punctum, in quod desinit numeratio, erit vertex dati loci, quod vulgo dicitur Zenith. Huic igitur puncto Meridiani quadrans altitudinis affigatur cochleolâ suâ, ita ut margo gradibus distinctus cum dicto puncto coniscet. Denique pyxis nautica pedamento globi imposita diriget acu magneticâ oculum operantis versus austri & septentrionis cardines, & manus circumducet Horizontem ligneum, donec Meridianus æneus ad parallelismum cum acu perveniat, & Meridies Horizontis lignei respiciat verum Meridiem loci; ita fiet, ut & reliqui cardines globi cardinibus mundi congruant. Curandum est præterea, ut pla-

 num,

num, cui insistit globus, Horizonti parallelum sit, adeoque Horizon ligneus cum vero Horizonte loci consentiat.

Probl. 4. *Gradum Solis, quem tenet in Ecliptica, ope Kalendarii, & adjuncti circuli signorum, indagare; undeque locum ejus in ipsa Ecliptica assignare.* Quære in Horizonte ligneo mensem & diem datum (observato Kalendariorum, Juliani & Gregoriani, discrimine, ne alterum pro altero sequaris perperam;) tum è regione diei inventi in intimo circulo, qui est signorum, invenies gradum, & signum, in quo Sol isto die versatur. Deinde in ecliptica, quæ superficiei globi inscribitur, quære primum signum modo exploratum, & in isto signo gradum ipsum Solis.

Accuratius innotescere potest locus Solis, per Ephemerides pro dato anno constructas, aut per Tabulas Astronomicas calculo is eruitur.

Probl. 5. *Ascensionem rectam & declinationem Solis, vel stellæ cujusvis datæ invenire; indeque indicem horarium horæ duodecimæ aptare.* Inventum per Problema præcedens gradum Solis applica Meridiano & nota gradum Æquinoctialis, qui Meridiano subjacet, is enim est Ascensio Recta Solis quæsita. Tum ab Æquinoctiali computa in Meridiano usque ad locum Solis in Ecliptica, & numerus graduum sic inventus, est ipsa Declinatio Solis, borea vel australis, prout Sol ab Æquinoctiali recesserit versus polum Arcticum vel Antarcticum. Dum vero locus Solis Meridiano adhæret, adjunge indicem horarium horæ duodecimæ Meridianæ. Eodem modo fixæ cujusvis locum applicabis Meridiano, & gradus Æquinoctialis culminans, erit ipsius fixæ Ascensio Recta; at distantia inter eandem fixam & Æquinoctialem intercepta, est Declinatio stellæ borea vel australis.

Ex dato loco Solis, ejus Ascensionem Rectam & Declinationem, per calculum Trigonometricum, invenire docuimus in Lectione XIX. pag. 379.

Probl. 6. *Altitudinem Solis vel datæ fixæ Meridianam quadrante, vel alio instrumento idoneo rimari.*

Methodum docuimus observandi Solis vel Stellæ altitudinem, in Lect. XIX. pag. 377.

Probl.

Probl. 7. *Datâ Declinatione, & altitudine Meridianâ Solis, vel fixæ cujusvis, latitudinem loci, sive elevationem poli invenire.*

Methodus inveniendi Latitudinem loci ostensa fuit, in Lect. XIX. pag. 378.

Probl. 8. *Datâ ascensione rectâ Solis & fixæ cujusvis; tempus culminationis ejusdem fixæ invenire.* Ascensionem Rectam Solis aufer ab Ascensione recta fixæ (suffectis, si opus sit, 360 gradibus;) ita restat arcus Æquatoris à meridie ad momentum usque culminationis stellæ elapsus. Hunc arcum convertes in tempus, dividendo gradus datos per 15, nam quotus exhibebit *horas*; tum gradus à divisione reliquos multiplicando per 4, efficies *minuta horaria.* Similiter minuta gradibus adhærentia divides per 15, & quotus exhibebit etiamnum *minuta horaria.* Denique minuta à divisione reliqua si multiplices per 4, habebis *secunda horaria.* Conflatum ex horis, minutis & secundis tempus à meridie computatum ostendit ipsum momentum culminationis.

Probl. 9. *Dato loco Solis, vel fixæ cujusvis; Ascensionem ejus, & Descensionem obliquam necnon Amplitudinem ortivam & occiduam invenire.* Datum locum Solis, vel fixæ, adjunge Horizonti ortivo, & nota gradum Æquatoris, qui una ascendit; hic enim vocatur Ascensio obliqua Solis, vel stellæ. Tum à cardine Orientis, hoc est, ab intersectione Æquatoris & Horizontis ad locum usque Solis, vel fixæ arcus in Horizonte interceptus est amplitudo sideris ortiva. Sin eundem locum Solis, vel stellæ, adjungas Horizonti occiduo; erit gradus Æquatoris una descendens, Descensio obliqua Solis, vel stellæ. Et à cardine Occidentis, hoc est, ab intersectione alterâ Æquatoris & Horizontis ad sidus usque occidens, arcus in Horizonte numeratus, est Amplitudo Solis, vel stellæ occidua.

Problema hoc Trigonometrice sic expeditur. Sit HPOP Meridianus, ÆQ Æquator, HO Horizon, P Polus, S Sidus vel Sol in Horizonte cujus Declinatio est arcus SR, *or* punctum orientis vel occidentis. In triangulo rectangulo *or* RS dantur RS, declinatio Solis vel Sideris, & angu- TAB. 41. fig. 6.

 lus

lus R *or* S, quem Æquator facit cum Horizonte & est æqualis complemento Latitudinis loci, ex quibus dabitur arcus *or* R, qui est differentia Solis vel Sideris Ascensionalis, quæ Ascensioni rectæ addita, vel ab eadem ablata, prout Sol vel stella versus Polum depressum, aut elevatum declinat dabit Ascensionem obliquam: & dabitur præterea arcus *or* S amplitudo Solis vel Sideris. Differentia Ascensionalis quadranti addita, vel ab eodem subducta, prout stella versus Polum elevatum aut depressum declinat, dat arcum semidiurnum, qui in tempus conversus, dimidiatam moram stellæ supra Horizontem ostendet.

Probl. 10. *Datâ Ascensione Solis, vel fixæ, rectâ pariter atque obliquâ; dimidiatam eorum moram supra vel infra Horizontem, nec non longitudinem diei & noctis, horam item ortûs & occasûs Solis invenire.* Dati sideris Ascensionem rectam aufer ab obliqua, vel obliquam à recta, prout hæc vel illa major minorve extiterit; quod restat, est *Differentia Ascensionalis.* Hanc convertes in tempus (quemadmodum supra Problemate 8. docuimus) quod, declinante sidere versus Polum elevatum, additum sex horis, declinante autem sidere versus Polum depressum, detractum sex horis, exhibet dimidiatam sideris moram supra Horizontem; at hujus complementum ad 12 horas, est dimidiata sideris mora infra Horizontem. Dimidiata mora Solis supra Horizontem si computetur à meridie, extabit hora Occasûs Solis; at dimidiata mora Solis infra Horizontem computata à media nocte, exhibet horam Ortus Solis. Porro dimidiata Solis mora supra Horizontem si duplicetur, extat longitudo diei; & dimidiata mora infra Horizontem duplicata est longitudo noctis.

Quod si indicem horarium aptaveris horæ duodecimæ, cum locus Solis est sub Meridiano, tum adduxeris locum Solis ad Horizontem ortivum; ostendet index horam ortus Solis; eundem vero locum Solis si adduxeris ad Horizontem occiduum, ostendet index horam occasus Solis. Unde porro facile est computare longitudinem diei & noctis.

Probl.

Probl. 11. *Dato tempore culminationis stellæ, & dimidiatâ ejus morâ supra Horizontem; horam ortûs & occasûs ejusdem stellæ invenire.* Si momento culminationis per Problema 8. invento detrahas dimidiatam stellæ moram supra Horizontem, habebis horam ortus stellæ: at eidem momento culminationis, addas dimidiatam stellæ moram supra Horizontem, conflabis horam occasus stellæ, computandam utrobique à meridie. Quod si indicem horarium applices 12 meridianæ, cum locus Solis culminat, tum adducas stellam ad Horizontem ortivum vel occiduum; ostendet index horam ortûs vel occasûs stellæ.

Probl. 12. *Invenire gradum eclipticæ, qui cum data stella oritur, vel occidit; indeque ortum & occasum stellæ Cosmicum & Achronicum patefacere.* Datam stellam adjunge Horizonti ortivo, vel occiduo, & nota gradum eclipticæ, qui una oritur, vel occidit. Tum in Horizonte ligneo quære signum & gradum, quem cum stella oriri, vel occidere deprehenderas; & è regione gradus coorientis reperies in Kalendario (Juliano, vel Gregoriano) mensem & diem ortûs stellæ Cosmici. Et si quæras in eodem Horizonte ligneo gradum coorienti gradui oppositum, invenies in Kalendario mensem & diem ortus stellæ Achronici. At è regione gradûs cooccidentis reperies diem occasûs Achronici. Denique gradui cooccidenti gradus oppositus patefaciet diem occasûs Cosmici.

Problematis solutio Trigonometrica hæc est, sit H O Horizon HZO Meridianus, Æ Q Æquator, E C Ecliptica. Punctum ♈ interfectio Æquatoris & Eclipticæ, A Punctum Eclipticæ quod cum data stella oritur punctumque Æquatoris simul oriens sit *or*. In triangulo ♈ *or* A datur ♈ *or* Ascensio obliqua stellæ, & angulus ♈ qui est Æquatoris & Eclipticæ, item angulus ♈ *or* A altitudo Æquatoris supra Horizontem, vel ejus complementum ad duos rectos, unde dabitur arcus Eclipticæ ♈ A, & proinde punctum A quod simul cum stella oritur; sed per Kalendarium aut Ephemerides, datur tempus quando Sol hoc punctum occupat; unde datur tempus quando stella oritur Cosmice: dabitur TAB 41. fig. 7.

bitur

bitur præterea angulus ♈ A *or*, angulus orientis Eclipticæ. Quando Sol tenet punctum Eclipticæ puncto A oppositum, ſtella oritur Achronice. Simili calculo invenitur tempus occaſus Coſmici aut Achronici.

Prob. 13. *Datâ latitudine loci, & gradu eclipticæ, qui cum ſtella oritur vel occidit; ortum ejus & occaſum Heliacum definire.* Datam ſtellam adjunge Horizonti ortivo, tum quadrantem altitudinis circumduc in plaga occidentali, donec in eo gradus duodecimus (ſi ſtella ſit magnitudinis primæ) occurrat eclipticæ; tum nota gradum eclipticæ, ubi fit occurſus, is enim eſt, qui 12 gradibus elevatur ſupra Horizontem occiduum, quando ſtella oritur; ergo eodem momento gradus eclipticæ oppoſitus deprimitur 12 gradibus infra Horizontem ortivum; & ſi quæras hunc gradum in Horizonte ligneo, invenies è regione diem ortus ſtellæ Heliaci, quo nimirum ex radiis Solis mane emergere incipit. Si ſtella fuiſſet magnitudinis ſecundæ, oportuiſſet obſervare gradum eclipticæ depreſſum 13 gradibus; pro ſtella tertiæ magnitudinis 14 grad. depreſſio requiritur, & ſic deinceps. Quod ſi quæras occaſum ſtellæ Heliacum, adjunges ipſam ſtellam Horizonti occiduo, & quadrantem altitudinis circumduces in plaga orientali, donec gradus in eo 12 vel 13 (prout ſtella fuerit magnitudinis primæ, vel ſecundæ) occurrat eclipticæ, tum gradum eclipticæ, in quo fit occurſus, notabis; nam qui huic opponitur gradus eclipticæ totidem gradibus demerſus eſt infra Horizontem occiduum, qui proinde quæſitus in Horizonte ligneo exhibet è regione diem occaſus Heliaci.

Tab. 41. fig. 7. Trigonometrice ſic ſolvitur Problema. In figura præcedentis Problematis. Sit A punctum Eclipticæ quod ſimul cum ſtella oritur. Sit ☉ punctum Eclipticæ quod tantum ab Horizonte diſtat, quantum eſt arcus viſionis pro ortu ſtellæ Heliaco. In triangulo rectangulo AR☉ datur angulus RA☉, æqualis angulo orientis Eclipticæ, & arcus R☉, ex quibus invenietur arcus A☉, qui additus arcui ♈A dat arcum ♈☉, & punctum Eclipticæ ☉, quod Sol tenet quando do stella oritur Heliace. Similiter occasus ejus Heliacus reperietur.

Probl. 14. *Datâ latitudine loci, & loco Solis; initium & finem crepusculi matutini & vespertini invenire.* Composito globo ad latitudinem loci datam, per Probl. 3. & aptato indice horario horæ duodecimæ, quando locus Solis est in Meridiano; tum adducto gradu eclipticæ, qui loco Solis opponitur, ad plagam occidentalem; unâ manu volves globum, & altera circumduces quadrantem altitudinis, donec oppositus Soli gradus occurrat gradui quadrantis 8; & ostendet index horam initii crepusculi matutini. Sin gradum Soli oppositum adducas ad plagam orientalem, eumque ibi facias occurrere gradui quadrantis 18; ostendet index horam, qua crepusculum vespertinum desinit.

Trigonometrica Problematis solutio extat in Lectione XX. pag. 390. 391.

Probl. 15. *Datâ latitudine loci, & loco Solis, si præterea ex his tribus, nimirum* horâ diei vel noctis, *nec non* Altitudine, *&* Azimutho *Solis vel stellæ, unicum detur; reliqua duo invenire.* Compone globum ad latitudinem loci datam; locum Solis adjunge Meridiano, & indicem horæ duodecimæ. Tum si *hora* detur, adduc indicem voluto globo, ad horam datam, firmatoque in isto situ globo, adduc quadrantem ad locum Solis, vel stellæ; & in margine quadrantis habebis altitudinem quæsitam, ad pedem vero quadrantis in Horizonte apparebit Azimuthus Solis, vel stellæ, numerandus ab intersectione Meridiani & Horizontis (australi vel septentrionali) ad ipsum usque quadrantis pedem. Sin *altitudo* detur, unâ manu volves globum, alterâ circumduces quadrantem, donec locus Solis vel stellæ occurrat dato gradui altitudinis in quadrante: tum index ostendet horam, & pes quadrantis Azimuthum. Dato vero *Azimutho*, adjunge pedem quadrantis ipsi Azimutho dato, & volve globum, donec locus Solis vel stellæ appellat ad marginem quadrantis gradibus distinctum; ostendet Sol ipse vel stella altitudinem suam in quadrante, & index horam.

Pro-

TAB. 41. fig. 8. Problema per Trigonometriam sic conficitur. Sit ut prius HO Horizon, HPO Meridianus, ÆQ Æquator, Z vertex loci, P Polus, S Stella, cujus distantia à vertice est SZ, & declinatio SP; quoniam dantur Solis & Stellæ Ascensiones Rectæ, dabitur eorum differentia, quæ in tempus conversa dabit tempus Culminationis Stellæ. Et arcus qui metitur angulum ÆPS in tempus conversus ostendet horam noctis; jam in triangulo ZPS, ex datis ZP, distantia verticis à Polo, & PS stellæ declinatio, si præterea detur angulus P qui ex data hora innotescit; invenietur angulus Z Azimuthus stellæ, & arcus ZS ejus distantia à vertice. Vel si detur arcus ZS complementum altitudinis, dabitur angulus P ac proinde hora noctis, & angulus PZS stellæ Azimuthus, vel si detur stellæ Azimuthus PZS, invenietur angulus ZPS qui horam noctis dabit, & arcus ZS, cujus complementum est altitudo fixæ.

Eadem ratione, ex datis altitudine Solis, ex observatione capta, & ejus declinatione, quæ ex tempore per Tabulas innotescet, invenietur angulus ÆPS qui in tempus conversus horam diei ostendet.

Probl. 16. *Datorum in globo terrestri duorum locorum distantiam & angulum positionis invenire.* Vocemus docendi gratià, unum datorum locorum *primum*, & alterum *secundum*. Exploratâ per Probl. 1. loci primi latitudine, compone globum terrestrem ad eam latitudinem, & ipsum locum primum advolve Meridiano, firmatoque globo in isto situ, & aptato quadrante altitudinis ipsi vertici (ubi tunc erit locus primus) adjunge quadrantem loco secundo. Quo facto numerabis gradus *distantiæ* à vertice ad locum usque secundum, & *angulum positionis* in Horizonte inter Meridianum & pedem quadrantis.

TAB. 41. fig. 9. Trigonometrice sic expeditur Problema. Sit ÆQ Æquator, P Polus, S & *s* duo loca in Telluris superficie, quorum complementa Latitudinum sint PS, P*s* data; & quoniam locorum Longitudines dantur, dabitur Longitudinum differentia, scil. angulus SP*s*, unde in triangulo S*s*P quia dantur latera SP, *s*P cum angulo SP*s*, invenietur S*s*, distantia

ſtantia locorum. Quæ in milliaria convertitur, computando pro ſingulis gradibus, milliaria 60. Invenientur quoque, anguli P S s & P s S, qui ſunt poſitionum anguli.

Similiter in cælo ſi dantur declinationes, & Aſcenſiones Rectæ duarum fixarum, dabitur earundem diſtantia, vel ſi earum Longitudines & Latitudines ſint notæ, innoteſcet quoque earundem diſtantia.

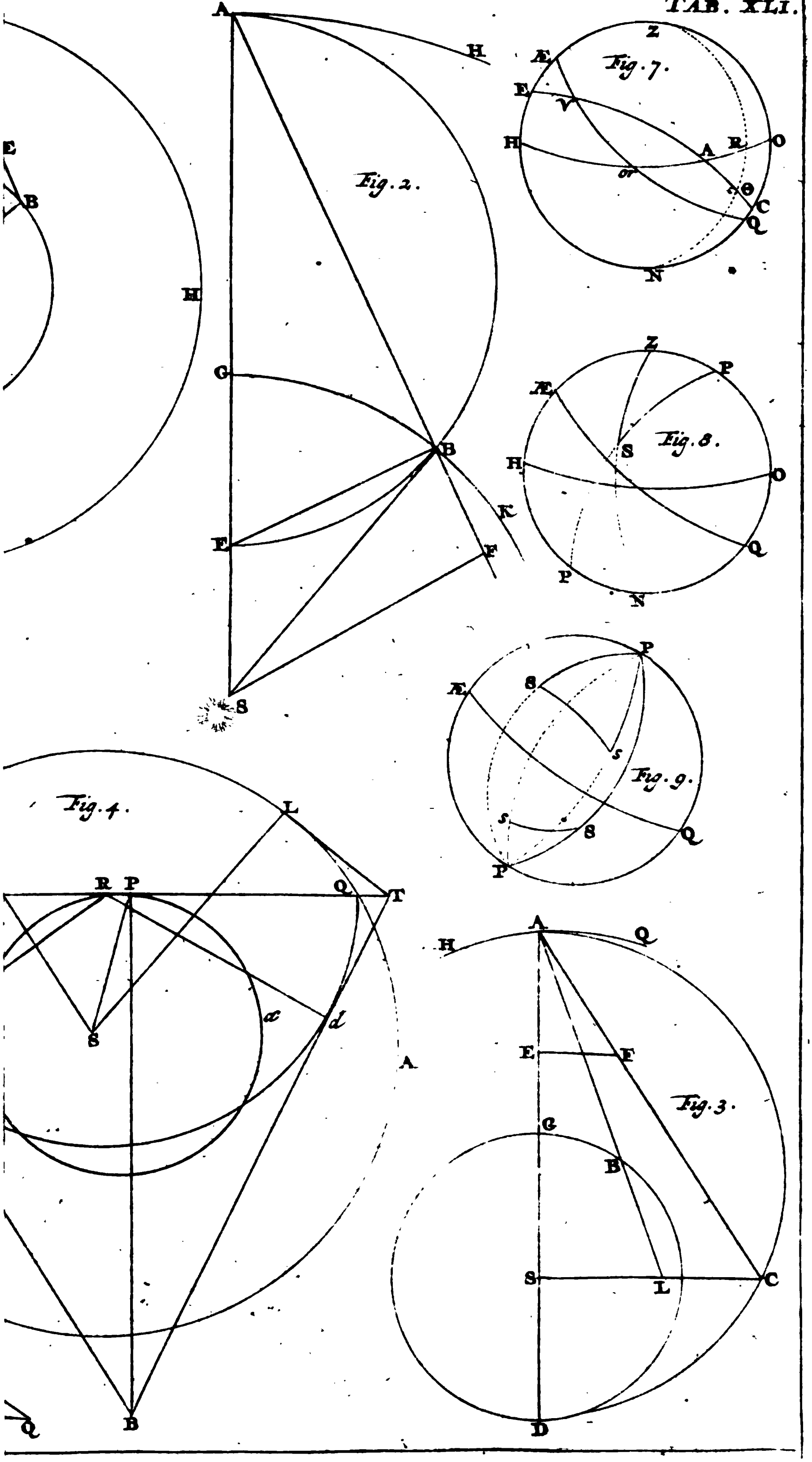
Probl. 17. *Dato tempore & loco; Thema cæli erigere.* Compoſito globo cæleſti (vel ſi hic abſit, terreſtri) ad dati loci latitudinem, inveſtigatum locum Solis dato tempori congruentem adjunge Meridiano, & indicem horæ duodecimæ; tum volve globum, donec index oſtendat horam datam: vel ſi accuratius operari libeat, inventæ per Probl. 5. Aſcenſioni Rectæ Solis adjice gradus, quot competunt horis & minutis à meridie elapſis, computando pro qualibet hora gradus 15. & pro quaternis minutis horariis gradus ſingulos; abjectis, ſi ſit opus, gradibus 360; ita conflabis Aſcenſionem Rectam Medii Cœli, ſive gradum Æquinoctialis dato temporis momento culminantem, ideoque ſub Meridiano collocandum. Tum ſemicirculi poſitionis extremitates cardinibus Meridiei & Septentrionis affige. Mox à gradu Æquatoris culminante computa in ipſo Æquinoctiali verſus orientem gradus 30, & per ipſum 30 gradum traduc ſemicirculum poſitionis, & obſerva gradum, quo is ſecat eclipticam, is enim eſt cuſpis domus *undecimæ*, quam adnotabis in charta. Rurſus admove ſemicirculum poſitionis gradui Æquinoctialis, inde à culminante gradu ſexageſimo, & nota gradum, quo ſecatur ecliptica, ita acquires cuſpidem domus *duodecimæ*, notandam ſimiliter in charta. Deinde transfer ſemicirculum poſitionis ad plagam occidentalem, & à gradu Æquatoris culminante computa verſus occidentem gradus 30, & per punctum Æquatoris, ubi deſinit numeratio, trajice ſemicirculum poſitionis, qui quo loco ſecat eclipticam, oſtendit cuſpidem domûs *nonæ*. Denique per gradum Æquatoris inde à Meridiano 60 trajectus ſemicirculus poſitionis oſtendit in ecliptica cuſpidem domûs *octavæ*. Ipſe vero Meridianus ſecat ecliptitam in cuſpide decimæ, at Horizon ortivus quo loco ſecat eclipticam, exhibet cuſpidem *primæ*, quæ *aſcendens* vocatur, & *Horoſcopus*; occiduus vero Horizon prodit in eadem ecliptica cuſpidem *ſeptimæ*, quæ quemadmodum è diametro opponitur primæ, ita & octavæ opponitur *ſecunda*, & nonæ *tertia*, & undecimæ *quinta*, & duodecimæ *ſexta*.

Probl. 18. *Erecti thematis punctum quodvis ad punctum quodvis dirigere.* Si Planetæ & aſpectui cuivis locum ſuum aſſignes in Zodiaco ſecundum longitudinem & latitudinem, & eligas Planetam quemvis vel gradum eclipticæ, quem dirigere velis, vocabis hunc, docendi gratiâ *locum primum*; & locum ad quem iſtum primum dirigere eſt animus, vocabis *ſecundum*. Tum per locum primum, (qui & *Significator* dici ſolet) trajicito ſemicirculum poſitionis, & quo loco is ſecat Æquinoctialem, eum gradum diligenter notato. Retento autem ſemicirculo poſitionis in iſto ſitu, volve globum verſus occidentem, donec locus ſecundus appellat ad ſemicirculum poſitionis, & tum viciſſim obſerva gradum Æquinoctialis, qui illi ſubjacet. Aufer gradum prius notatum à poſteriori (ſuffectis, ſi opus ſit, 360;) quod reſtat, eſt *arcus directionis* quæſitus.

FINIS.

TRI-

TAB. XLI.



TRIGONOMETRIÆ
PLANÆ ET SPHÆRICÆ
ELEMENTA:
ITEM
DE NATURA
ET
ARITHMETICA
LOGARITHMORUM
TRACTATUS BREVIS.

TRIGONOMETRIÆ.

PLANÆ ET SPHÆRICÆ

ELEMENTA.

DEFINITIONES.

EX datis Trianguli lateribus angulos, & ex angulis latera laterumve rationes, & mixtim assequi, Trigonometriæ munus est. Ad quod præstandum, necesse est, ut non tantum Peripheriæ circulares, sed & rectæ lineæ circulis adscriptæ, in notas aliquot & certas partes secari supponantur.

Placuit itaque Veteribus Mathematicis, peripheriam circuli in 360 partes (quos gradus appellant) dividere; & unumquemque gradum in 60 minuta prima, & hæc singula in 60 secunda, & rursus horum unumquodque in 60 minuta Tertia, & ita continuo partiri. Et angulus quilibet dicitur esse tot graduum & minutorum, quot sunt in arcu qui angulum illum metitur.

Quidam gradum in partes centesimas, potius quam sexagesimas partiri volunt: & utilius fortasse esset, non gradus sed & ipsum circulum in decupla ratione secare; quæ divisio forsan aliquando obtinebit. Verum si circulus constet 360 gradibus, ejus quadrans quæ est mensura anguli recti, erit harum partium 90. Si circulus in 100 partes secetur, Quadrans erit 25 partium.

Complementum Arcus, est differentia ejus à Quadrante.

Chorda sive *subtensa* est recta linea ab uno Arcûs termino ad alterum ducta.

Sinus rectus alicujus arcus qui & simpliciter sinus dici solet,

let, est perpendicularis cadens ab uno arcus termino ad radium per alterum terminum ejusdem Arcus ductum. Est igitur semisubtensa dupli Arcus; scil. est DE = ; DO, & est
Tab.42. fig. 1. arcus DO duplus ipsius DB. Hinc sinus arcus 30 gr. æqualis est dimidio radii, nam per 15 El. 4. Latus Hexagoni circulo inscripti, hoc est, subtensa 60 gr. æqualis est radio. Sinus dividit Radium in duo segmenta CE EB; quorum unum CE quod centro & sinu recto intercipitur, est sinus complementi arcûs DB ad quadrantem) nam est CE = FD qui est sinus arcus DH) & vocatur *cosinus*. Alterum segmentum BE quod sinu recto & peripheria intercipitur, vocatur *sinus versus:* aliquando dicitur Arcûs *sagitta*.

Quod si per unum Arcus terminum D producatur à centro recta CG, donec occurrat rectæ BG super diametro ad ejus terminum B perpendiculari; vocabitur in Trigonometria CG *Secans*, & BG *Tangens* arcus DB.

Cosecans & Cotangens Arcûs est secans vel tangens Arcus, qui est complementum alterius ad Quadrantem. *Nota*. Sicut eadem est Chorda Arcûs & ejusdem complementi ad circulum. Sic idem est sinus, eadem Tangens, eademque secans Arcûs & ejusdem complementi ad semicirculum.

Sinus Totus est sinus maximus, seu sinus 90 graduum qui circuli radio æqualis est.

Canon Trigonometricus est Tabula, quæ à minuto incipiens, seriatim exhibet quas habent longitudines singuli sinus Tangentes & Secantes, respectu radii, qui unitatis loco ponitur, & in partes 10000000 vel plures decimales dividi intelligitur. Adeo ut ope hujus Tabulæ, cujuslibet Arcûs vel anguli sinus Tangens vel secans haberi potest. Et vicissim ex dato sinu Tangente vel secante dabitur qui iis respondet arcus vel angulus. Observandum est in sequentibus R esse notam Radii, S notam sinus coS cosinus, T notam Tangentis, & coT co Tangentis.

CON-

CONSTRUCTIO CANONIS.

PROP. I. THEOREMA.

Datis duobus quibuslibet Trianguli rectanguli lateribus, reliquum quoque dabitur.

Est enim per 47 Elementi primi $ACq = ABq + BCq$ & $ACq - BCq = ABq$, & vicissim $ACq - ABq = BCq$. unde per extractionem Radicis quadratæ, dabitur $AC = \sqrt{ABq + BCq}$ & $AB = \sqrt{ACq - BCq}$. & $BC = \sqrt{ACq - ABq}$. Tab. 42. fig. 2.

PROP. II. PROBL.

Dato DE sinu arcus DB. Invenire Cosinum DF. Tab. 42. fig. 2.

Ex datis CD radio & DE sinu, in Triangulo rectangulo CDE dabitur per præcedentem $CE = \sqrt{CDq - DEq} = DF$.

PROP. III. PROBL.

Dato DE sinu arcus cujusvis DB. Invenire DM vel BM sinum arcus dimidii. Tab. 42. fig. 2.

Dato DE dabitur per præcedentem CE, ac proinde EB quæ est differentia inter cosinum & Radium. In Triangulo igitur rectangulo DBE datis DE & EB dabitur DB cujus semissis DM est sinus arcus $DL = \frac{1}{2}$ arcus DB.

PROP. IV. PROBL.

Dato BM sinu arcus BL invenire sinum dupli Arcus. Tab. 42. fig. 2.

Dato BM sinu, dabitur per Prop. 2. cosinus CM. Sunt autem Triangula CBM DBE æquiangula, ob angulos ad E & M rectos & angulum ad B communem, quare (per 4. 6.) erit CB : CM :: BD vel 2 BM : DE. Unde cum dantur tres priores hujus Analogiæ termini, quartus quoque qui est sinus arcus DB innotescet.

Corol. Est CB :: 2 CM :: BD : 2 DE, hoc est, Radius ad du-

duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ DB ut subtensa arcus DB ad subtensam dupli arcus. Item est CB: 2 CM:: (2BM:2DE::) BM:DE:: $\frac{1}{2}$CB:CM. unde dato sinu arcus alicujus & sinu arcus dupli, dabitur cosinus arcus simpli.

PROP. V.

Tab. 42. fig. 3. *Datis sinubus duorum arcuum BD FD, Invenire FI sinum summæ arcuum. Item EL sinum differentiæ eorundem.*

Ducatur Radius CD, & sit CO cosinus arcus FD, qui proinde dabitur, per O agatur OP parallela ad DK. Item ducantur OM GE parallelæ ad CB. Et ob æquiangula triangula CDK COP CHI FOH FOM. Est primò CD: DK::CO. OP, quæ itaque innotescet. Item est CD:CK ::FO:FM, adeoque & illa nota erit. sed ob FO=EO erit FM=MG=ON. Est itaque OP + FM=FI=sinui summæ arcuum: & OP—FM, hoc est, OP—ON=EL sinui differentiæ arcuum. Q.E.I.

Coroll. Quia arcuum BE BD BF differentiæ sunt æquales, erit BD arcus, medius arithmeticus inter arcus BE BF.

PROP. VI.

Iisdem propositis, Radius est ad duplum cosinus arcus medii, ut sinus differentiæ ad differentiam sinuum extremorum.

Tab. 42. fig. 2. Nam est CD:CK::FO:FM, unde duplicando consequentes CD: 2CK::FO. 2 FM vel ad FG; quæ est differentia sinuum EL FI. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus BD sit 60 grad. Erit differentia sinuum FI EL æqualis FO sinui distantiæ. Nam in eo casu fit CK sinus 30 grad. cujus duplum æquale est radio, adeoque ob CD=2 CK erit FO=FG. Adeoque si duo arcus BE BF ab arcu 60 gr. æquidistent, erit differentia sinuum æqualis sinui distantiæ FD.

Cor.

Cor. 2. Hinc si dentur sinus omnium arcuum, dato intervallo à se invicem distantium ab initio quadrantis usque ad 60 gradus, facile inveniuntur reliqui per unicam additionem. Est enim sinus 61 gr. = sinui 59 gr. + sin. 1 gr. & sinus 62 gr. = sinui 58 gr. + sin. 2 gr. Item sinus 63 gr. = sinui 57 gr. + sin. 3 gr. & ita deinceps.

Cor. 3. Si habeantur sinus omnium arcuum ab initio quadrantis, dato intervallo à se invicem distantium, usque ad datam quamvis quadrantis partem, dabuntur exinde sinus omnes usque ad hujus partis duplum. *ex gr*. Dentur omnes sinus usque ad 15 gr. per præcedentem Analogiam inveniri possunt sinus omnes usque ad 30 gr. Nam est radius ad duplum cosinus 15 gr. ut sinus unius gradus ad differentiam sinuum 14 gr. & 16 gr. ita etiam est sinus 2 gr. ad differentiam sinuum 13 & 17 gr. & ita sinus 3 gr. ad differentiam sinuum 12 & 18 gr. atque sic continuo usque dum pervenietur ad sinum 30 gr.

Similiter ut Radius ad duplum cosinus 30 gr. seu ad duplum sinus 60 gr. ita sinus 1 gr. ad differentiam sinuum 29 & 31 gr. :: sin. 2 gr. ad Differentiam sinuum 28 & 32 gr. :: 3 gr. ad differentiam sinuum 27 & 33 gr. sed in hoc casu est Radius ad duplum cosinus 30 gr. ut 1 ad $\sqrt{3}$. ac proinde si multiplicentur sinus distantiarum ab arcu 30 gr. per $\sqrt{3}$ dabuntur differentiæ sinuum.

Similiter in ipso initio quadrantis minutim exquirere possumus sinus, datis sinubus & cosinubus unius & duorum minutorum. Nam ut Radius ad duplum cosinus 2′ :: sin 1′ : differentiam sinuum 1′ & 3′ :: Sin. 2′ : differentiam sinuum 0′ & 4′ hoc est, ad ipsum sinum 4′. Et similiter ex datis sinubus priorum 4′ inveniuntur sinus reliqui usque ad 8′ & exinde ad 16′ & ita deinceps.

PROP. VII. THEOREMA.

In arcubus exiguis sinus & Tangens ejusdem arcus sunt quam proxime ad se invicem, in ratione æqualitatis.

Nam ob æquiangula triangula CED CBG, erit CE : CB :: ED : TAB. 42. fig. 4.

ED : BG. ſed accedente puncto D ad B, evaneſcit EB reſpectu arcus BD: unde fit CE fere æqualis CB. adeoque & ED fere æqualis BG. Si EB ſit minor radii parte $\frac{1}{10000000}$ erit differentia inter ſinum & tangentem, minor quoque tangentis parte $\frac{1}{100000000}$.

Cor. Cum Arcus ſit tangente minor, ſinu autem ſuo major; & exigui arcus ſinus & tangens ſunt fere æquales, erit etiam arcus ſuo ſinui vel tangenti fere æqualis, adeoque in exiguis arcubus, erit ut arcus ad arcum ita ſinus ad ſinum.

PROP. VIII.

Invenire ſinum Arcus unius minuti.

Latus Hexagoni circulo inſcripti, hoc eſt, ſubtenſa 60 graduum æqualis eſt Radio, (*per* 15tam 4ti.) Radii itaque ſemiſſis erit ſinus Arcus 30 gr. Dato itaque ſinu Arcus 30 grad. invenitur ſinus arcus 15 gr. (*per* 3tiam hujus.) Item ex dato ſinu 15 gr. per eandem invenitur ſinus 7 gr. 30. min. & ſinus hujus dimidii 3 gr. 45′ ſimiliter invenitur; & ita deinceps, donec duodecima peracta biſectione, perveniatur ad arcum 52″ 44‴ 3⁗ 45′′′′′ cujus coſinus fere æqualis eſt radio, in quo caſu (uti conſtat ex prop. 7.) ſunt ſinus arcubus ſuis proportionales; adeoque ut arcus 52″ 44‴. 3⁗. 45′′′′′ ad arcum unius minuti ita erit ſinus prius inventus ad ſinum arcus unius minuti, qui igitur dabitur.

Dato ſinu unius minuti, invenietur per prop. 2 & 4, ſinus duorum minutorum ejuſque coſinus.

PROP. IX. THEOREMA.

Si angulus BAC in peripheria circuli exiſtens, biſecetur recta AD, Et producatur AC quoad DE = AD ipſi occurrat in E : erit CE = AB.

TAB. 42. fig. 5. In Quadrilatero ABDC (per 22. 3.) ſunt anguli B & ACD æquales duobus rectis = DCE + DCA (per 13. 1.) unde erit angulus B = DCE. Quin etiam eſt angulus E = DAC (per 5. 1.) = DAB & eſt DC = DB. quare Triangula BAD & CED ſunt congrua & CE eſt æqualis AB. Q.E.D.

PROP.

PROP. X. THEOREMA.

Sint arcus AB BC CD DE EF &c. æquales; Arcuumque AB AC AD AE &c. subtensæ ducantur, erit TAB. 48. fig. 6.
AB : AC :: AC : AB + AD :: AD : AC + AE :: AE : AD + AF :: AF : AE + AG.

Producantur AD in H, AE in I, AF in K, & AG in L, ut triangula ACH ADI AEK AFL sint Isoscelia. Et quoniam angulus BAD bisectus est, fiet DH = AB per præcedentem. Similiter erit EI = AC, FK = AD, item GL = AE.

Sed Triangula Isoscelia ABC CAH DAI EAK FAL, ob angulos ad bases æquales, sunt æquiangula. Quare erit ut AB: AC :: AC: AH = AB + AD :: AD: AI = AC + AE :: AE: AK = AD + AF :: AF : AL = AE + AG. Q.E.D.

Corol. Quoniam est AB ad AC ut Radius ad duplum cosinus Arcus $\frac{1}{2}$ AB, (per corol. prop. 5.) erit quoque ut Radius ad duplum cosinus arcus $\frac{1}{2}$ AB ita $\frac{1}{2}$ AB: $\frac{1}{2}$ AC :: $\frac{1}{2}$ AC: $\frac{1}{2}$ AB + $\frac{1}{2}$ AD :: $\frac{1}{2}$ AD: $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ AE :: $\frac{1}{2}$ AE: $\frac{1}{2}$ AD + $\frac{1}{2}$ AF &c. Sint jam arcus AB BC CD &c. singula 2′. Erit $\frac{1}{2}$ AB sinus unius minuti, $\frac{1}{2}$ AC sinus 2′. $\frac{1}{2}$ AD sinus 3′. $\frac{1}{2}$ AF sinus 4′ &c. Unde datis sinubus unius & duorum minutorum sinus omnes reliqui sic facillime habentur.

Dicatur cosinus arcus unius minuti, hoc est, sinus arcus 89 gr. 59′ Q & fient sequentes Analogiæ, R: 2 Q :: Sin. 2′: Sin. 1′ + Sin. 3′. quare dabitur sinus 3′. Item R: 2 Q :: S. 3′: S. 2′ + S. 4′. quare dabitur S. 4′.

Item R : 2 Q :: S. 4′ : S. 3′ + S. 5′. quare habetur sinus 5′.

R: 2 Q :: S. 5′ : S. 4′ + S. 6′ proinde dabitur S. 6′. Atque ita deinceps ad singula quadrantis minuta dabuntur sinus. Et quoniam Radius seu primus Analogiæ terminus est Unitas; operationes per multiplicationem contractam & subductionem facillime expediuntur.

Inventis sinubus, usque ad gradum sexagesimum. Reliqui sinus per solam additionem habentur (per cor. 1. pr. 5.)

Datis sinubus, Tangentes & secantes ex Analogiis sequentibus

TAB. 42. fig. 1. tibus invenire possunt. Ob æquiangula Triangula CED CBG CHI.

CE:ED::CB:BG. hoc est, coS:S::R:T.
GB:BC::CH:HI. h. e. T:R::R:coT.
CE:CD::CB:CG. h. e. coS:R::R:Secant.
DE:CD::CH:CI. h. e. S:R::R:coSecant.

SCHOLIUM.

Magnus ille Geometra, summusque Philosophus Dominus Newtonus *Primus series in infinitum convergentes exhibuit, quibus ex datis arcubus, eorum sinus computari possint. Nam si Arcus dicatur* A *& Radius sit unitas invenit ejus sinum fore.*

$$A - \frac{A^3}{1.2.3} + \frac{A^5}{1.2.3.4.5} - \frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{A^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}.$$

&c. Cosinum autem esse

$$1 - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{A^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} \text{ \&c.}$$

Hæ series initio quadrantis cum Arcus A *parvus est celerrime convergunt. Nam in serie pro sinu, si* A *non superet decem minuta, duo primi ejus termini scil.* $A - \frac{1}{6}A^3$ *dant sinum ad 15 figurarum loca, si Arcus* A *non major sit gradu, tres primi exhibent sinum ad totidem loca, adeoque pro primis & ultimis Quadrantis sinubus hæ series sunt admodum utiles. Sed quo major sit arcus* A, *eo pluribus opus est terminis ut inveniatur sinus in numeris qui sunt veri ad datum figurarum locum. Tandem autem lentissime convergunt series cum Arcus fere æqualis est Radio. Cui rei ut remedium adferatur ego alias excogitavi series* Newtonianis *similes, in quibus suppono arcum, cujus sinus quæritur, esse summam vel differentiam duorum arcuum scil. esse* A + z *vel* A − z: *notosque esse sinum & cosinum arcus* A. *scil. sit* a *sinus arcus* A *&* b *ejus cosinus. Sinus Arcus* A + z *per hanc seriem exprimetur*

1.2

1. $a + \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5}$ &c.

2. *Ejus Cosinus* $b - \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} + \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5} - \frac{bz^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Similiter sinus Arcus A—z *est*

3. $a - \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} + \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} - \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Et cosinus est

4. $b + \frac{az}{1} - \frac{bz^2}{1.2} - \frac{az^3}{1.2.3} + \frac{bz^4}{1.2.3.4} + \frac{az^5}{1.2.3.4.5}$ *&c.*

Arcus A *est medius Arithmeticus inter arcus* A—z *&* A+z. *Differentiæ sinuum sunt*

5. $- \frac{bz}{1} - \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} + \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} - \frac{az^5}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

6. $- \frac{bz}{1} + \frac{az^2}{1.2} - \frac{bz^3}{1.2.3} - \frac{az^4}{1.2.3.4} + \frac{bz^5}{1.2.3.4.5} + \frac{az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Unde differentiarum differentia seu differentia secunda

7. *Prodit* $- \frac{2az^2}{1.2} - \frac{2az^4}{1.2.3.4} + \frac{2az^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Seu $2a \times \frac{z^2}{1.2} - \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}$ *&c.*

Quæ series æqualis est duplo sinus arcus medii ducto in sinum versum arcus z *& celerrime convergit. Adeo ut* *si z sit minutum primum, terminus seriei primus dat differentiam secundam ad 15 figurarum loca; secundus autem terminus ad 25 loca.*

Hinc datis sinubus duorum quorumvis arcuum intervallo minuti distantium, facili admodum operatione inveniri possint sinus reliquorum omnium arcuum qui sunt in eadem progressione.

In serie prima & secunda si Arcus A *sit* = 0 *erit* $a = 0$ *&* b *ejus cosinus sit radius seu* 1. *& hinc destructis terminis ubi est* a *& pro* b *posito* 1 *series deveniunt* Newtonianæ. *In serie tertia & quarta. si* A *sit* 90 *gr. fiet* $b = 0$ *&* $a = 1$ *unde quoque destructis terminis ubi est* b *& pro* a *posito* 1 *rursus prodibunt series* Newtonianæ.

Omnes hæ series ex Newtonianis *facile fluunt per prop.* 5. *hujus.*

PROP. XI.

In Triangulo Rectangulo, si Hypotenusa sit Radius, latera sunt sinus angulorum oppositorum; si vero crus alterum fiat Radius, crus reliquum est Tangens anguli oppositi, & Hypotenusa est anguli secans.

TAB. 42. Manifestum est CB esse sinum arcus CD, ejusque cosinum
fig. 7. esse AB; sed arcus CD est mensura anguli A, & complemen-
fig. 8. tum mensuræ anguli C. Præterea in 8va. figura posito AB radio, est BC Tangens, & AC secans arcus BD, qui est mensura anguli A, & similiter in eadem figura posito BC radio, est BA Tangens & AC secans arcus BE vel anguli C. Q. E. D.

Est igitur, ut AC secundum datam quamvis mensuram æstimata ad BC in eadem mensura æstimatam, ita erit 10000000 numerus partium in quas dividi supponitur Radius, ad numerum qui exprimit in iisdem partibus longitudinem quam habet sinus anguli A, hoc est,

Erit AC : BC :: R : S, A

Simili ratione erit AC : BA :: R : S, C

Item AB : BC :: R : T, A

Et BC : BA :: R : T, C

In

In his itaque proportionalibus si dantur tres quælibet, per Regulam Trium invenietur quarta.

PROP. XII.

Trianguli plani latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.

Trianguli circulo inscripti latera perpendicularibus radiis bisecentur. Et erunt semilatera sinus angulorum ad peripheriam. Est enim angulus BDC ad centrum duplex anguli BAC ad peripheriam (per 20. El. 3.) cujusque itaque dimidium sc. BDE æquale est BAC, atque ejus sinus est BE. Eadem ratione erit BF sinus anguli BCA. Et AG erit sinus anguli ABC. Tab 42. fig 9.

In Triangulo rectangulo est BD = $\frac{1}{2}$ BC = Radio (per 31. El. 3.) sed Radius est sinus anguli recti unde $\frac{1}{2}$ BC est sinus anguli A. fig. 10.

In Triangulo Amblygonio, ductis BL CL, erit angulus L complementum anguli A ad duos rectos (per 22. El. 3.) ac proinde idem erit utriusque anguli sinus. Est autem BDE (cujus sinus est BE) = angulo L. quare erit & BE sinus anguli BAC. Sunt itaque in omni triangulo semisses laterum sinus angulorum oppositorum, manifestum autem est latera esse inter se ut ipsorum semisses. Q.E.D. fig. 11.

PROP. XIII.

In Triangulo Plano summa Crurum, differentia Crurum, Tangens semisummæ angulorum ad basim & Tangens semidifferentiæ eorundem sunt proportionales.

Sit Triangulum ABC cujus crura AB BC & Basis AC; producatur AB ad H ut sit BH = BC; erit AH summa crurum, fiat BI = BA, & erit IH differentia crurum. Item est HBC angulus = angulis A + ACB (per 32. El 1.) cujus itaque dimidium EBC = semisummæ angulorum A & ACB, ejusque Tangens (posito Radio = EB) est EC. Ducatur BD. ad AC parallela fiatque HF = CD. Et ob HB = CB erit (per 4. El. 1.) angulus HBF = CBD = BCA (per 29. El. 1.) Est etiam angu- Tab 42. fig. 12.

lus

lus HBD = angulo A: unde erit FBD differentia angulorum A & ACB; Et EBD eorum semidifferentia, cujus tangens est ED. Per I ducatur IG parallela ad AC vel BD & fiet (per 2. El. 6.) AB : BI :: CD : DG. At est AB = BI, unde erit & CD = DG. at est CD = HF, unde HF = DG & proinde HG = DF & ½HG = ½DF = DE. Et quia triangula AHC IHG sunt æquiangula, erit AH : IH :: HC : HG :: ½HC : ½HG :: EC : ED. hoc est, erit AH summa crurum ad IH differentiam crurum ut EC Tangens semissis summæ angulorum ad Basim, ad ED Tangentem semissis differentiæ eorundem. Q. E D.

PROP. XIV.

In Triangulo Plano, Basis, summa laterum, Differentia laterum, Differentia segmentorum basis sunt proportionales.

TAB. 43. fig. 1. Trianguli BCD basis esto DC, centro B radio BC describatur circulus, & producatur DB in G, ex puncto B in basin cadat perpendicularis BE, erit DG = DB + BC = summæ laterum, & DH = differentiæ laterum, & segmenta basis sunt DE CE quorum differentia est DF. Quoniam (per cor. prop. 38. El. 3.) rectangulum sub DC DF æquale est rectangulo sub DG DH, erit (per 16. El. 6.) DC : DG :: DH : DF.

PROBLEMA.

Datis duarum quarumvis quantitatum summa & differentia, ipsas quantitates invenire.

TAB 43. fig. 2. Si ad semisummam addatur semidifferentia, aggregatum erit æquale majori; si autem à semisummâ subducatur semidifferentia, residuum erit æquale minori. Sint enim AB BC duæ quantitates; & capiatur AD = BC. Fiet DB differentia. Quarum summa est AC, quæ bisecta in E dat AE vel

EC

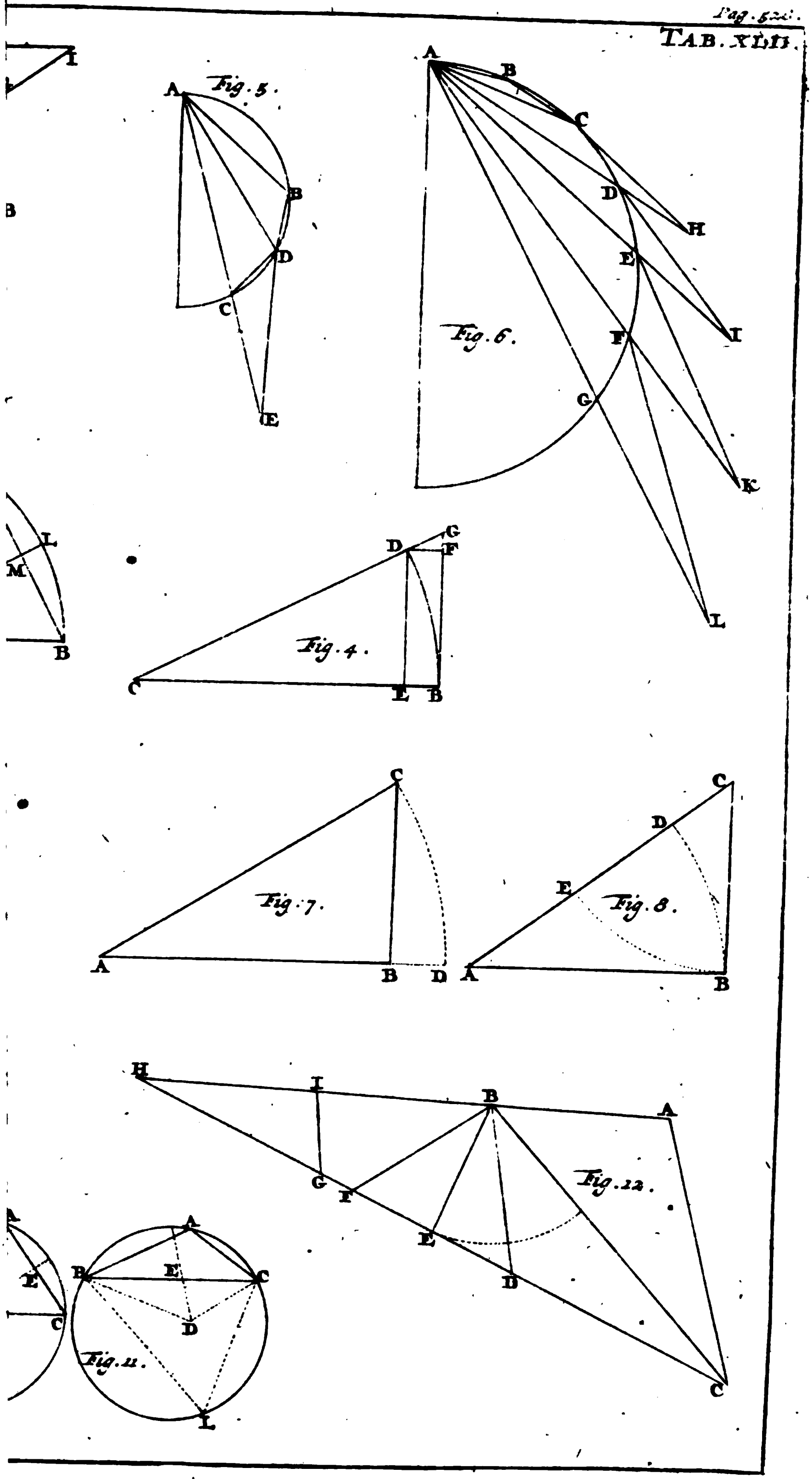


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 11.

E C semisummam & D E vel E B semidifferentiam. Porro est AB = AE + EB = semisummæ + semidifferentia, & BC = CE — EB = semisummæ — semidifferentia.

IN quovis Triangulo plano datis duobus angulis, datur tertius qui est summæ duorum reliquorum complementum ad duos rectos.

In Triangulo autem rectangulo dato alterutro angulo acuto, datur reliquus, qui est dati complementum ad rectum.

Datis autem duobus trianguli rectanguli lateribus, ut inveniatur reliquum non opus est canone sed perficitur ope prop. primæ hujus.

Trianguli Rectanguli solutiones Trigonometricæ sunt quæ sequuntur.

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	AB BC cruribus.	Anguli.	AB: BC:: R: T anguli A. Cujus complementum est Angulus C.
2	AB AC crure & Hypoten.	Anguli.	AC: AB:: R: S, C cujus complementum est angulus A.
3	AB & A crure & angulo.	BC crus alterum.	R: T, A:: AB: BC.
4	AB & C crure & angulo.	AC Hypotenusa.	S, C: R:: AB: AC.

TAB. 43. fig. 3.

Tab. 43. fig. 4.

In Triangulis obliquangulis.

	Datis.	Quær.	Fiat.
1	A. B. C & AB angulis & latere.	BC & AC latera.	S,C:S,A::AB:BC. Item S,C:S,B::AB:AC; datis duobus angulis datur tertius, unde casus cum dantur duo anguli & latus; reliqua quæruntur, recidit in hunc casum.
2	A. B. C. omnibus angulis.	AB. AC BC omnia latera.	S,C:S,A::AB:BC. Et S,C:S,B::AB:AC. unde datis angulis invenire licet proportiones laterum, at non ipsa latera, nisi ipsorum unum prius innotescat.
3	AB:BC,&C duobus lateribus & angulo uni opposito.	A & B anguli.	AB:BC: S,C:S,A, qui proinde inveniatur. Sed quia idem est sinus anguli & ejus complementi ad duos rectos, prænoscenda est anguli A Species.
4	AB BC & B. lateribus duobus & angulo interjecto.	Anguli A & C.	BC + AB : BC − AB:: T, $\frac{A + C}{2}$: T, $\frac{A - C}{2}$ unde datur differentia angulorum A & C quorum summa quoque est nota; & proinde per *Problema post prop.* 14. dabuntur ipsi anguli.
5	AB. BC AC omnibus lateribus.	Anguli.	Demisso à vertice in Basim perpendiculo. Quærantur segmenta basis per prop. 14. Fiat scil. BC: AC + AB :: AC − AB : DC − DB, & ex hac analogia dabuntur BD. DC. & proinde per resolutionem triangulorum rectangulorum ABD ADC dabuntur anguli.

fig. 5.

TRI-

TRIGONOMETRIÆ SPHÆRICÆ ELEMENTA.

DEFINITIONES.

1. Sphæræ Poli, sunt duo puncta in superficie Sphæricâ, quæ sunt Axis extrema.

2. Polus circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes, sunt inter se æquales.

3. Circulus in sphæra maximus est, cujus planum transit per sphæræ centrum, & cujus centrum idem est cum centro Sphæræ.

4. Triangulum Sphæricum est figura comprehensa sub arcubus trium maximorum in Sphæra circulorum.

5. Angulus Sphæricus est is qui in superficie sphæricâ, continetur sub duobus arcubus maximorum circulorum; qui æqualis est inclinationi planorum istorum circulorum.

PROP. I.

Circuli maximi ACB AFB se bifariam secant. Tab 43. *fig.* 6.

Cum enim circuli habent idem centrum, communis eorum sectio erit utriusque circuli diameter, quæ eos bifariam secabit.

Cor. Hinc in superficie, sphæræ duo maximorum circulorum Arcus semicirculis minores, spatium non comprehendunt, non enim possunt, nisi in duobus punctis semicirculo oppositis, sibi invicem occurrere.

PROP. II.

TAB 43. fig. 6. *Si à polo C circuli cujusvis AFB, ducatur ad ejus centrum recta CD, ea ad planum istius circuli perpendicularis erit.*

In circulo AFB ducantur diametri quævis EF GH; Et quoniam in triangulis CDF CDE, sunt CD DF æquales CD DE, & basis CF æqualis basi CE (per def. 2.) erit (per 4. El. 1.) angulus CDF= angulo CDE; ac proinde uterque rectus erit, similiter demonstrabitur, angulos CDG CDH esse rectos; unde (per 4. El. 11.) erit CD perpendicularis ad planum circuli AFE. Q.E.D.

Cor 1. Circulus maximus distat à polo suo intervallo Quadrantis; nam ob angulos CDG CDF rectos, erunt ipsorum mensuræ, sc. arcus CG CF quadrantes.

Cor. 2. Circuli maximi per polum alterius circuli transeuntes cum ipso faciunt angulos rectos; & vicissim, si cum altero circulo faciunt angulos rectos; transibunt per polum alterius istius circuli; nam per rectam DC eos transire necesse est.

PROP. III.

TAB 43. fig 6. *Si polo A describatur maximus circulus ECF, arcus CF interceptus inter AC AF, est mensura anguli CAF, vel CBF.*

Per *corol.* 1. præcedentis, sunt arcus AC AF quadrantes, ac proinde anguli ADC ADF sunt recti, quare (per defin. 6. El. 11.) angulus CDF (cujus mensura est arcus CF) æqualis est inclinationi planorum ACB AFB, æqualis quoque angulo Sphærico CAF vel CBF. Q.E.D.

Cor. 1. Si arcus AC AF sunt Quadrantes, erit A polus circuli per puncta C & F transeuntis, est enim AD ad planum FDC normalis, (per 4. El. 11.)

Cor. 2. Anguli ad verticem sunt æquales, uterque enim est æqualis inclinationi circulorum. Item anguli qui sunt deinceps sunt æquales duobus rectis.

PROP.

PROP. IV.

Triangula erunt æqualia & congrua, si duo latera habeant duobus lateribus æqualia, & angulos æqualibus lateribus comprehensos etiam æquales.

PROP. V.

Item Triangula erunt æqualia & congrua, si latus cum angulis adjacentibus in uno triangulo sit æquale lateri cum angulis adjacentibus in altero triangulo.

PROP. VI.

Triangula æquilatera sunt etiam æquiangula.

PROP. VII.

In Triangulis Isoscelibus, anguli ad basim sunt æquales.

PROP. VIII.

Si anguli ad basim fuerint æquales, erit Triangulum Isosceles.

Eodem modo demonstrantur quatuor propositiones præcedentes ut in triangulis planis.

PROP. IX.

Quælibet duo trianguli latera reliquo sunt majora.

Nam arcus circuli maximi, inter duo quælibet in superficie sphæræ puncta, est via brevissima.

PROP. X.

Quodlibet trianguli latus minus est semicirculo.

Producantur trianguli ABC latera AC, AB, donec conveniunt in D, erit arcus ACD semicirculus, qui major est quam AC. Tab. 43. fig. 7.

PROP. XI.

Trianguli latera sunt circulo minora.

Est enim DB+DC major quam BC, (per prop. 9.) & utrin- Tab. 43. fig. 7.

trinque addendo BA+AC, erit DBA+DCA, hoc eſt, circulus major quam AB+BC+AC, qui ſunt tria latera trianguli ABC.

PROP. XII.

TAB. 43. fig. 8. *In triangulo ABC, major angulus A majori lateri ſubtenditur.*

Fiat angulus BAD=angulo B, & erit AD=BD (per 8. hujus) unde BDC=DA+DC, & hi arcus majores ſunt quam AC, eſt itaque latus BC, quod ſubtendit angulum BAC, majus quam AC, quod ſubtendit angulum B.

PROP. XIII.

TAB. 43. fig. 7. *In quolibet triangulo ABC, ſi ſumma Crurum AB BC ſit major æqualis vel minor ſemicirculo; internus angulus ad baſim AC erit major æqualis aut minor externo & oppoſito BCD, ideoque ſumma angulorum A & ACB major erit, aut æqualis, aut minor duobus rectis.*

Sit primò AB+BC=ſemicirculo=AD, erit BC=BD; & anguli BCD & D æquales, (per 8 hujus) unde & angulus BCD erit=angulo A.

Sit ſecundo AB+BC majores quam ABD, erit BC major quam BD; unde & angulus D, (hoc eſt angulus A) major erit angulo BCD. (per 12. hujus) Similiter oſtendetur, ſi AB+BC ſint ſimul minores ſemicirculo, fore angulum A minorem angulo BCD. & quoniam anguli BCD & BCA ſunt=duobus rectis; ſi angulus A ſit major BCD, erunt A & BCA majores duobus rectis. Si A ſit=BCD erunt A & BCA æquales duobus rectis. Si vero A ſit minor quam BCD, erunt A & BCA minores duobus rectis. Q.E.D.

PROP. XIV.

TAB. 43. fig. 9. *In quolibet triangulo GHD, laterum poli, ductis circulis maximis, conſtituunt aliud triangulum XMN, quod ſupplementum eſt trianguli GHD; nempe latera NX*

XM

XM & NM erunt supplementa ad semicirculos arcuum qui sunt mensuræ angulorum D, G, H. Quin etiam mensuræ angulorum M, X, N, erunt supplementa ad semicirculos, laterum GH GD & HD.

Polis G, H, D, describantur maximi circuli XCAM TMNO XKBN. Et quia G est polus circuli XCAM, erit GM = Quadranti, (per cor. 1. prop. 2.) & ob H polum circuli TMO, erit HM quoque Quadrans; quare (per corol. 1. prop. 3.) erit M polus circuli GH. Similiter quia D est polus circuli XBN, & H polus circuli TMN, erunt arcus DN HN Quadrantes; ac proinde (per cor. 1. prop. 3.) N erit polus circuli HD. Et eadem ratione, ob GX DX quadrantes, erit X polus circuli GD. Hisce præmissis.

Quoniam est NK = Quadranti, (cor. 1. prop. 2.) & XB = Quadranti, erunt NK + XB hoc est NX + KB = duobus Quadrantibus seu semicirculo; adeoque est NX supplementum arcus KB seu mensuræ anguli HDG ad semicirculum. Similiter quia est MC = Quadranti, & XA = Quadranti; erunt MC + XA, hoc est, XM + AC = duobus Quadrantibus seu semicirculo, & proinde XM est supplementum arcûs AC qui est mensura anguli HGD. Quinetiam, ob MO, NT Quadrantes, erunt MO + NT = OT + NM = semicirculo itaque est NM supplementum ad semicirculum arcûs OT seu mensuræ anguli GHD. Q.E.D.

Præterea quia DK HT sunt quadrantes, erunt DK + HT seu KT + HD æquales duobus Quadrantibus, seu semicirculo. Est ergo KT, seu mensura anguli XNM, supplementum lateris HD ad semicirculum. Nec dissimili methodo ostendetur OC mensuram anguli XMN esse supplementum lateris GH. Et BA mensuram anguli X esse supplementum lateris GD. Q.E.D.

PROP. XV.

Triangula æquiangula sunt etiam æquilatera.

Nam eorum supplementa sunt æquilatera, (per 14. hujus) ergo

ergo & æquiangula, quare & ipsa sunt æquilatera, per prop. 14 partem secundam.

PROP. XVI.

Trianguli tres anguli sunt majores duobus rectis, & minores sex rectis.

Tab 43. fig. 9. Nam tres mensuræ angulorum G, H, D, una cum tribus lateribus trianguli X N M faciunt tres semicirculos, (per 14. hujus) sed tria latera trianguli X N M minora sunt duobus semicirculis, (per 11. hujus) quare tres mensuræ angulorum G H D majores sunt semicirculo, & proinde anguli G H D majores erunt duobus rectis.

Propositionis secunda pars patet, nam in quolibet triangulo, externi & interni anguli simul tantum faciunt sex rectos, unde interni sunt minores quam sex recti.

PROP. XVII.

Tab. 43. fig. 6. *Si à puncto R quod circuli A F B E polus non est, in circumferentiam cadant arcus maximorum circulorum R A R B R G R V, maximus est R A, qui per ejus polum C incedit; reliquus vero minimus, cæteri prout à maximo recedunt minores sunt, faciuntque cum priore circulo A F B angulum obtusum ex parte maximi arcus.*

Quia C est polus circuli A F B, erunt C D & huic parallela R S perpendiculares ad planum A F B; Ductis autem S A S G S V; erit (per 7. El. 3.) S A major quam S G, & S G major quam S V. unde in Triangulis rectangulis planis R S A R S G R S V, erunt R S q + S A q seu R A q majora quam R S q + S G q seu R G q, & proinde R A major erit R G; & arcus R A major arcu R G. Similiter erunt R S q + S G q seu R G q majora quam R S q + S V q seu R V q; & proinde R G major R V, & arcus R G major arcu R V.

2do.

2do. Est angulus RGA major angulo CGA qui rectus est. (per coroll. prop. 3.) Et angulus RVA major angulo CVA qui quoque rectus est, quare anguli RGA RVA sunt obtusi.

PROP. XVIII.

In triangulo rectangulo ad A, crura angulum rectum continentia sunt ejusdem affectionis cum angulis appositis, hoc est, si crura sint majora aut minora Quadrantibus, anguli illis oppositi erunt majores aut minores rectis angulis. Tab. 53. fig. 6.

Nam si AC sit Quadrans, C erit polus circuli AFB, & anguli AGC vel AVC erunt recti. Si crus AR sit majus quadrante, erit angulus AGR major recto (per 17. hujus.) Si crus sit minus quadrante ut AX, angulus AGX erit minor recto.

PROP. XIX.

Si duo crura trianguli rectanguli (& consequenter anguli) sint ejusdem affectionis, id est, utrumque vel majus vel minus Quadrante, hypotenusa erit minus quadrante.

In triangulo ARV vel BRV, sit F polus cruris AR, & erit RF quadrans, qui major est quam RV (per 17. hujus.) Tab. 43. fig. 6.

PROP. XX.

Si sint diversæ affectionis, hypotenusa erit major quadrante.

Nam in triangulo ARG, est RG major quam RF qui est quadrans.

PROP. XXI.

Si Hypotenusa sit major vel minor quadrante, crura anguli recti, ideoque & anguli oppositi sunt ejusdem aut diversæ affectionis, Hæc propositio est priorum conversa; & facile ex iisdem sequitur.

PROP. XXII.

Tab.43. fig.10.11. *In quovis triangulo ABC, si anguli B & C ad basim sunt ejusdem affectionis, perpendicularis AP cadet intra triangulum; si sint diversæ affectionis, perpendicularis cadet extra triangulum.*

In primo casu si perpendicularis non cadat intra, cadet extra triangulum, (ut in fig. 11.) Tum in triangulo ABP, est AP ejusdem affectionis cum angulo B; & similiter in triangulo ACP, est AP ejusdem affectionis cum angulo ACP; ergo cum ABC & ACP sunt ejusdem affectionis, erunt anguli ABC & ACB diversæ affectionis; quod est contra hypothesim.

In 2*do*. Casu si perpendicularis non cadat extra, cadet intra, (ut in fig. 10.) Et in triangulo ABP, est angulus B ejusdem affectionis cum crure AP, & similiter in triangulo ACP est angulus C ejusdem affectionis cum AP, unde anguli B & C sunt ejusdem affectionis, quod est contra hypothesim.

PROP. XXIII.

Tab.43. fig. 12. *In Triangulis BAC BHE rectangulis ad A & H, si idem fuerit angulus acutus B ad basim BA vel BH, Sinus hypotenusarum erunt sinubus arcuum perpendicularium proportionales.*

Nam rectæ CD EF perpendiculariter insistentes eidem plano sunt parallelæ. Item FR DP radio OB perpendiculares, sunt quoque parallelæ; unde & plana triangulorum EFR CDP sunt parallela (per 15. El. 11.) Quare & CP ER horum planorum communes sectiones cum plano per BE CO transeunte parallelæ erunt (per 16. El. 11.) Triangula igitur CDP EFR æquiangula erunt. Quare CP sinus Hypotenusæ BC est ad CD sinum arcus perpendicularis CA; ut ER sinus hypotenusæ BE est ad EF sinum arcus perpendicularis EH. Q.E.D.

PROP.

PROP. XXIV.

Iisdem positis, AQ HK sinus basium, tangentibus IA GH arcuum perpendicularium, sunt proportionales. TAB. 43. fig. 12.

Nam similiter ut in præcedente propositione, ostendetur triangula QAI KHG esse æquiangula; unde QA : AI :: KH : HG.

PROP. XXV.

In Triangulo ABC rectangulo ad A. Ut cosinus anguli B existentis ad Basim BA ad sinum anguli verticalis ACB, ita cosinus arcus perpendicularis ad Radium.

Præparatio. Producantur latera BA BC CA ita, ut BE BF CI CH sint Quadrantes, polis B & C ducantur circuli maximi EFDG IHG. & erunt anguli ad EFI & H recti. Quare D est polus BAE (per cor. 2. pr. 2. hujus) & G polus IF CB, erit etiam AE = complemento arcus BA, Item FE mensura anguli B = GD & DF eorum complementum, erit quoque BC = FI = mensuræ anguli G, & CF eorum complementum. Item est CA = HD & DC utriusque complementum. Hisce præmissis, in triangulis HIC DCF rectangulis ad I & F & habentibus eundem angulum C acutum, ob BA minorem quadrante, erit S, DF : S, HI :: S, DC : S, HC id est, cosinus anguli B est ad sinum anguli verticalis BCA ut cosinus CA ad Radium. Q. E. D. TAB. 43. fig. 13.

PROP. XXVI.

Cosinus basis : cosin. Hypotenusæ :: R : co S perpendicularis.

Nam in Triangulis AED CFD rectangulis ad E & F; habentibus eundem angulum D acutum: ob AE quadrante minorem, est S, EA : S, CF :: S, DA : S, DC. Q. E. D. TAB. 43. fig. 13.

PROP. XXVII.

S, Bascos: R::T, perpendicularis: T, anguli ad basim.

TAB. 43. fig. 13. Nam in Triangulis BAC BEF rectangulis ad A & E & habentibus eundem angulum B acutum, ob AC minorem quadrante, S,BA:S,BE::T,AC:T,EF. Q.E.D.

PROP. XXVIII.

CoS, anguli verticalis: R::T, perpendicularis: T, Hypotenusæ.

TAB. 43. fig. 13. In Triangulis GIF GHD rectangulis ad I & H, & habentibus eundem angulum G acutum, ob HD minorem HC seu quadrante, est S,GH:S,GI::T,HD:T,IF.

PROP. XXIX.

S, Hypotenusæ: R::S, perpendicularis: S, anguli ad basim.

TAB. 43. fig. 13. In Triangulis præcedentibus est S,IF:S,GF::S,HD: S,GD.

PROP. XXX.

Radius: coS. Hypotenusæ::T, anguli verticalis: coT, anguli ad basim.

TAB. 43. fig. 13. In Triangulis HIC DFC rectangulis ad I & F, & habentibus eundem angulum C acutum, ob DF minorem quadrante, est S,CI:S,CF::T,HI:T,DF. hoc est, R:coS, BC::Tang, C:coT, anguli B.

Propositiones sex præcedentes ad omnes casus triangulorum rectangulorum resolvendos sufficiunt, sequuntur illi numero sedecim cum suis analogiis ex hisce deductis.

Datis

	Datis præter ang rectum	Quær.		
1	A C & C	B	R: coS, C A :: S, C: coS, B ejusdem speciei cum C A.	per 25 inverse
2	A C & B	C	coS, C A : R :: coS, B : S, C ambigui.	per 25
3	B & C	A C	S, C: coS, B :: R: coS, C A ejusdem speciei cum ang. B.	per 25 & 18
4	B A C A	B C	R:coS, B A :: coS, A C: coS, B C Si B A A C fuerint ejusdem affectionis nec Quadrantes, erit B C minor quadrante; si diversæ, erit B C quadrante major.	per 26 & 19 20
5	B A B C	A C	coS, B A : R :: coS, B C: coS, C A Si B C sit major aut minor quadrante, B A & C A erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur B A ejusque Species, ergo	per 26 & 21
6	B A C A	B	S, B A : R :: T, C A: T, B ejusdem affectionis cum latere opposito C A.	per 27 & 18
7	B A B	A C	R : S, B A :: T, B: T, A C, ejusdem speciei cum B.	per 27 & 18
8	A C B	B A	T, B: R :: T, C A : S, B A ambigui.	per 27
9	B C C	A C	R: coS, C:: T, B C:T, C A. Si B C sit major aut minor quadrante, anguli C & B sunt ejusdem aut diversæ affectionis, quare data specie ang. B. dabitur A C.	per 28 & 21
10	A C C	B C	coS, C:R:: T, A C: T, B C. prout ang. C & A C fuerint ejusdem aut diversæ affectionis, B C erit minor aut major quadrante.	per 28 20 21

TAB. 43. fig. 13.

	Datis præter ang. rectum.	Quær.	[illegible]	
11	BC AC	C	T,BC:R::T,CA:coS,C. Si BC fuerit major aut minor Quadrante, CA & BA & proinde anguli erunt ejusdem aut diversæ affectionis, sed datur species CA, ergo dabitur species anguli C.	per 28 21
12	BC B	AC	R:S,BC::S,B:S,AC ejusdem speciei cum B.	per 29 & 18
13	AC B	BC	S,B:S,AC::R:S,BC ambigui	per 29
14	BC AC	B	S,BC:R::S,AC:S,B ejusdem speciei cum CA.	per 29
15	B C	BC	T,C:R::coT,B:coS,BC. prout anguli B & C ejusdem aut diversæ affectionis fuerint, erit BC minor aut major quadrante.	per 30 19 20
16	BC C	B	R:coS,BC::T,C:coT,B. prout BC fuerit minor aut major quadrante; anguli C & B erunt ejusdem aut diversæ affectionis. Sed datur species anguli C. quare dabitur species anguli B.	per 30 21

De Resolutione Triangulorum Rectangulorum Sphæricorum, per quinque partes circulares.

Perpensis Analogiis, quibus Triangula Sphærica Rectangula solvuntur, Dominus *Neperus*, nobilis ille Logarithmorum Inventor, duas excogitavit Regulas memoriâ facile retinendas, quarum ope omnes sedecim casus resolvi possunt; Nam cum in hisce triangulis, præter angulum rectum, sint tria latera & duo anguli, latera angulum rectum com-

comprehendentia, hypotenusæ autem & reliquorum angulorum complementa, vocavit *Neperus partes circulares*. Et cum datæ sunt duæ quælibet partes, & quæritur Tertia. Harum trium una, quæ dicitur *pars media*, vel adjacet duobus reliquis partibus, quæ itaque vocantur *extremæ adjacentes*; vel neutri adjacet, in quo casu, dicuntur *extremæ oppositæ*; Sic si complementum anguli B ponatur pars media, Crus AB & complementum Hypotenusæ BC sunt partes extremæ adjacentes; At complementum anguli C, & latus AC sunt extremæ oppositæ. Item posito complemento hypotenusæ BC parte media, complementa angulorum B & C sunt extremæ adjacentes; & AB AC crura sunt extremæ oppositæ. Sic etiam posito crure AB parte media, complementum anguli B, & AC sunt extremæ adjacentes; Nam angulus rectus A non intercipit adjacentiam, quia non est pars circularis. At eidem parti mediæ complementum anguli C & complementum hypotenusæ BC sunt extremæ oppositæ. Hisce præmissis. TAB. 43. *fig.* 14.

REGULA PRIMA.

In Triangulo Rectangulo Sphærico, Rectangulum sub Radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub Tangentibus partium Adjacentium.

REGULA SECUNDA.

Rectangulum sub radio & sinu partis mediæ, æquale est rectangulo sub cosinubus partium oppositarum.

Utriusque Regulæ tres sunt casus. Nam pars media vel potest esse complementum anguli B vel C, vel complementum hypotenusæ BC; vel denique unum ex cruribus scil. AB vel AC.

Casus 1. Sit complementum anguli C pars media. Et erunt AC & complementum hypotenusæ BC extremæ adjacentes. Per pr. 28. Est ut cosinus anguli verticalis C ad Radium, Ita Tangens CA ad Tangentem Hypotenusæ BC per- TAB 43. *fig.* 13.

permutando erit coS. C : T, C A :: R : T, B C. sed ut notum est, R : T, B C :: coT, BC : R. quare coS, C : T, A C :: coT, BC : R; Unde R ⋈ coS, C = T, A C ⋈ coT, B C.

Eidem complemento anguli C parti mediæ, extremæ oppositæ sunt complementum anguli B & A B, (& per prop. 25.) coSinus anguli C est ad sinum anguli C D F ut co Sinus D F ad Radium, est vero Sinus C DF = S, A E = coS, B A, & coS, D F = S, E F = S, ang. B unde erit coS, C : coS, B A :: S, B : R. & R ⋈ coS, C = coS. B A ⋈ S B hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ, æquatur rectangulo sub cosinubus extremarum oppositarum.

Casus 2. Sit complementum hypotenusæ B C pars media, & complementa angulorum B & C erunt extremæ adjacentes. In triangulo D C F (per prop. 27.) Est S, CF : R :: T, D F : T, C. unde permutando S, C F : T, D F :: (R : T, C ::) coT, C : R. est autem S, C F = coS, B C & T, D F = coT, B. quare est R ⋈ co S, B C = coT, C ⋈ coT, B. hoc est, Radius ductus in sinum partis mediæ æquatur producto ex Tangentibus partium adjacentium extremarum.

Eidem parti mediæ, scil. complemento B C; adsunt extremæ oppositæ A B A C, & (per prop. 26.) est coS, B A : coS, BC :: R : coS, A C. quare erit R ⋈ coS, B C = coS, B A ⋈ coS, A C.

Cas. 3. Sit denique A B pars media, & erunt complementum anguli B & A C extremæ adjacentes, (& per pr. 27.) S, A B : R :: T, C A : T, B. unde erit S, A B : T, C A :: (R : T, B ::) coT, B : R. adeoque erit R ⋈ S, A B = T, C A ⋈ coT, B.

Præterea parti mediæ A B, complementum B C, & complementum anguli C sunt extremæ oppositæ; & in triangulo G H D (per prop. 25.) Est coS. D : S, D G H :: coS, G H : R. est vero coS, D = coS, A E = S, A B, & S, G = S. I F = S, B C. Item est coS, G H = S, H I = S, C. quare erit S, A B : S, B C :: S, C : R. & hinc R ⋈ S, A B = S, B C ⋈ S, C.

Itaque in omni casu, rectangulum sub radio & sinu partis mediæ æquale erit tam rectangulo sub cosinubus extremarum oppo-

oppositarum, quam rectangulo sub tangentibus extremarum adjacentium. Et proinde si æquationes illæ resolvantur in Analogias (per 16. Elem. 6.) ope regulæ Proportionis, partes ignotæ innotescent. Et si pars quæsita sit media, primus Analogiæ terminus erit Radius, secundum & tertium occupant locum tangentes vel cosinus partium extremarum. Si vero quæratur extremarum una, Analogia incipi debet cum altera, atque Radius sinusque partis mediæ, in mediis ponantur locis, ut quartum teneat pars quæsita.

In Triangulis Sphæricis obliquangulis BCD, demisso arcu perpendiculari AC, ab angulo C in basim BD, (productam si opus fuerit,) ut duo fiant Triangula BAC DAC rectangula; eorum ope resolvi possunt plerique casus Triangulorum obliquangulorum. Tab. 44. fig. 1. 2.

PROP. XXXI.

Cosinus angulorum B & D ad basim BD, sinubus angulorum verticalium BCA DCA sunt proportionales. Tab. 44. fig. 1. 2.

Nam coS, ang. B: S, BCA:: (coS, CA: R::) coS, D: S, DCA (per 25. hujus.)

PROP. XXXII.

Cosinus laterum BC DC sunt proportionales cosinubus basium BA DA. Tab. 44. fig. 1. 2.

Est enim coS, BC: coS, BA:: (coS, CA: R::) coS, DC: coS, DA. (per 26 hujus.)

PROP. XXXIII.

Sinus basium BA DA, sunt in reciproca proportione tangentium angulorum B & D ad Basim BD. Tab. 44. fig. 1. 2.

Quia per 27. hujus est, S, BA: R:: T, AC: T, anguli B. Item per eandem, inverse R: S, DA:: T, ang. D: T, AC. erit ex æquo in perturbata ratione (per 23. El. 5.) S, BA: S. DA:: T, ang. D: T, ang. B.

PROP. XXXIV.

Tab.44. fig. 1. 2. *Tangentes laterum BC DC sunt in recitroca proportione cosinuum angulorum verticalium BCA, DCA.*

Quia per 28. hujus permutando, Est
T,BC: R ::T,CA:coS,BCA
& per eandem R :coS,DCA::T,DC:, T,CA
quare ex æquo in perturbata ratione est
T,BC:coS,DCA::T,DC:coS,BCA.

PROP. XXXV.

Tab.44. fig. 1. 2. *Sinus laterum BC DC sinubus angulorum oppositorum B & D sunt proportionales.*

Quia per 29. hujus S,BC:R:: S,CA:S, ang. B
& per eandem inverse R:S,DC::S,ang.D:S,CA
erit ex æquo in perturbata ratione S,BC:S,DC::S,D:S,B.

PROP. XXXVI.

Tab 44. fig. 3. *In Triangulo quovis Sphærico ABC, CF ⋈ AE vel FM ⋈ AE, rectangulum sub sinubus crurum BC BA est ad radii quadratum, ut IL seu IA—LA differentia sinuum versorum Basis AC, & differentiæ crurum AM, ad GN sinum versum anguli B.*

Polo B describatur circulus maximus PN; sintque BP BN quadrantes; & PN est mensura anguli B; eodem polo B per C describatur circulus minor CFM; horum circulorum plana recta erunt plano BON. (per 20. h.) & PG CH perpendiculares in idem planum, cadent in communes sectiones ON FM puta in G & H. ducatur HI perpendicularis ad AO, & planum per CH HI perpendiculare erit plano AOB, unde AI perpendicularis ad HI, erit perpendicularis ad rectam CI, (per def. 4. El. 11.) est itaque AI sinus versus arcus AC, & AL sinus versus arcus AM=BM—BA=BC—BA. Triangula isoscelia CFM PON sunt æquian-

æquiangula, ob MF NO item CF PO parallelas (per 16. El. 11.) quare demissis perpendiculis CH PG in latera FM ON, similiter divisa erunt Triangula; & erit FM:ON:: MH:GN. Itemque ob triangula AOE DIH DLM æquiangula erit AE:AO::IL:MH at ostensum est, esse FM:ON::MH:GN quare erit AE × FM ad AO × ON, ut IL × MH ad MH × GN seu ut IL ad GN. hoc est rectangulum sub sinubus crurum est ad quadratum Radii ut differentia sinuum versorum basis & differentiæ crurum BC BA ad sinum versum anguli B. Q. E. D.

PROP. XXXVII.

Differentia Sinuum versorum duorum arcuum ducta in dimidium Radii, æqualis est rectangulo sub sinu semisummæ & sinu semidifferentiæ eorundem arcuum.

Sint duo arcus BE BF, quorum differentia EF sit bisecta in D, & erit BD semisumma arcuum, & FD semidifferentia. Est GE=IL differentiæ sinuum versorum arcuum BE BF; Item est FO sinus semidifferentiæ arcuum. Ob æquiangula triangula CDK FEG; erit DK:GE:: (CD:FE::) $\frac{1}{2}$CD:$\frac{1}{2}$FE. Unde est DK × $\frac{1}{2}$FE seu DK × FO =GE × $\frac{1}{2}$CD=IL × $\frac{1}{2}$CD. Q. E. D. Tab. 44. fig. 4.

PROP. XXXVIII.

Sinus versus cujusvis arcus, ductus in dimidium Radii, æqualis est quadrato sinus dimidii ejusdem arcus.

Triangula CBM DEB sunt æquiangula ob angulos ad M & E rectos & angulum ad B communem. Quare est EB:BD ::BM:BC erit itaque EB × BC=BM × BD & EB × $\frac{1}{2}$BC =BM × $\frac{1}{2}$BD=BMq. Q. E. D. Tab. 44. fig. 5.

PROP. XXXIX.

In quolibet Triangulo ABC, cujus crura angulum B continentia sint BC AB, & basis AC eundem angulum subtendat; si capiatur AM arcus = diffe-

rentiæ crurum $= BC - AB$. *erit Rectangulum sub sinubus crurum BC BA ad quadratum Radii ut Rectangulum sub sinu arcus* $\frac{AC + AM}{2}$ *& sinu arcus* $\frac{AC - AM}{2}$ *ad Quadratum sinus dimidii anguli B.*

Quoniam est rectangulum sub sinubus crurum AB BC ad quadratum radii, ut IL ad sinum versum anguli B, vel ut $\frac{1}{2}$ R $\times$ IL ad $\frac{1}{2}$ R ductum in sinum versum anguli B (per prop. 36. hujus) Est autem $\frac{1}{2}$ R $\times$ IL = rectangulo sub sinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ (per pr. 37. hujus.) Item est $\frac{1}{2}$ R ductus in sinum versum anguli B æqualis Quadrato sinus dimidii anguli B. Quare erit Rectangulum sub sinubus crurum, ad Radii quadratum, ut Rectangulum sub sinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$ ad Quadratum sinus dimidii anguli B. Q. E. D.

Sequuntur duodecim Casus Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

TAB. 44 fig. 1. 2.

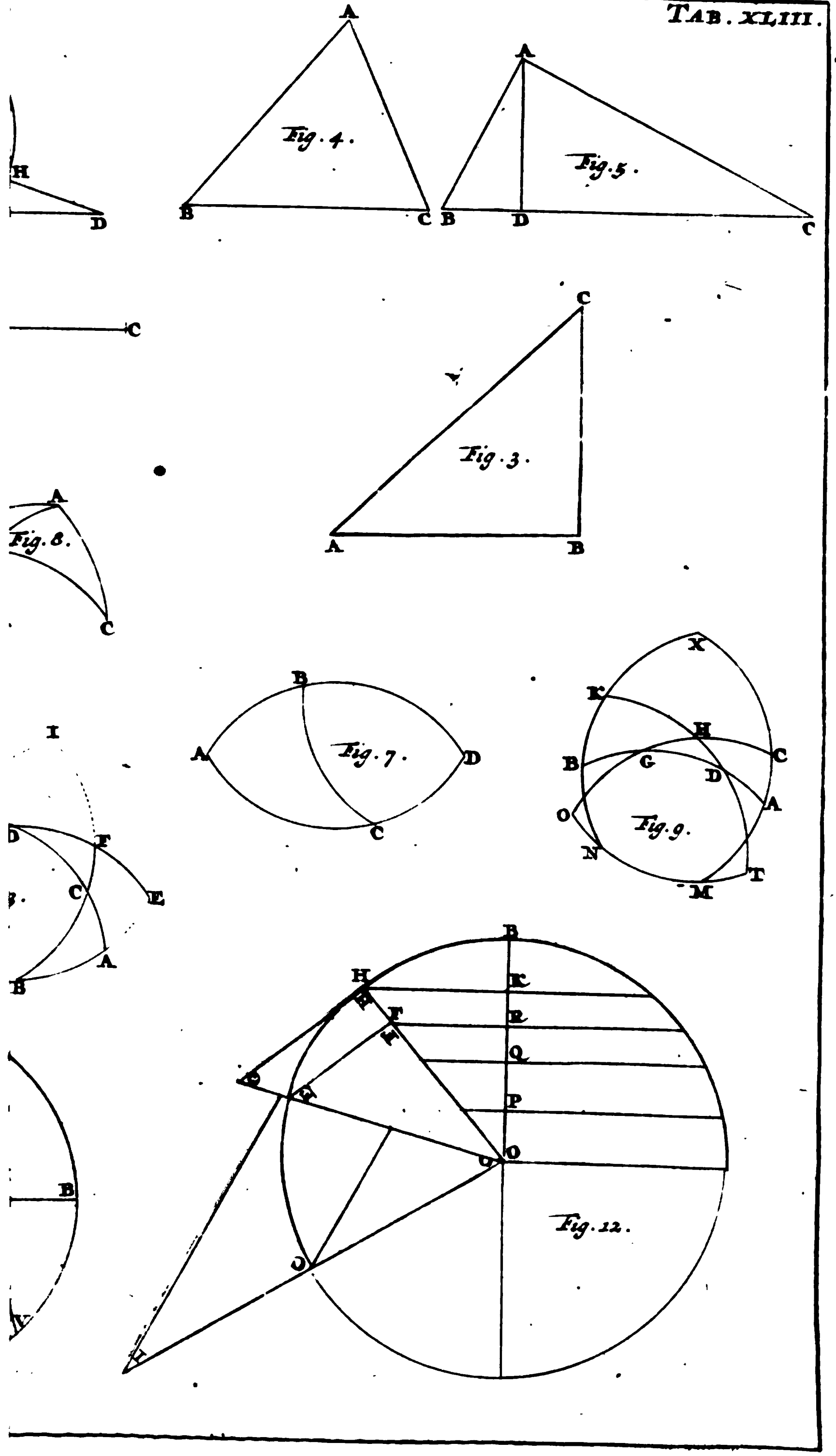
	Datis	Quær.	Fiat.
I	Ang. B, D, & BC.	Ang. C.	coS, BC : R :: coT, B : T, BCA (per 30. hujus.) Item coS, B : S, BCA :: coS, D : S, DCA (per 31. hujus.) Quare angulorum BCA DCA summa, si perpendicularis cadat intra triangulum, vel differentia, si extra cadat, erit = BCD. Num perpendicularis cadit intra vel extra, cognoscitur ex affectione angulorum B & D (per 22. hujus) quod semel monuisse sufficiat.

Datis

	Datis.	Quær.	Fiat.
2	Ang. B, C, & latere B C.	Ang. D.	coS,BC:R::coT,B:T,BCA (per 30. hujus) & S,BCA:S,DCA::coS,B:coS,D (per 31. hujus.) Si BCA sit minor BCD, angulus D erit ejusdem affectionis cum angulo B. Sin BCA sit major BCD, anguli B & D erunt affectionis diversæ per conversam pr. 22.
3	BC CD lateribus & ang. B.	BD latus.	R:coS,B::T,BC:T,BA. (per 28. hujus) & coS,BC:coS,BA::coS,DC:coS,DA (per 32. hujus) horum BA DA summa vel differentia, prout perpendicularis cadit intra, vel extra Triangulum, est æqualis BD quod cognosci nequit nisi cognita sit species alterius anguli D.
4	BC DB lateribus & ang. B.	CD latus.	R:coS,B::T,BC:T,BA (per 28. hujus.) Et coS,BA:coS,BC::coS,DA:coS,DC. (per 32. h.) Prout DA similis est aut dissimilis CA vel ang. BDC, erit DC minor aut major Quadrante (per 19 & 20 hujus.)
5	B, D, ang. & B C. latere.	BD latus.	R coS,B::T,BC:T,BA (per 28 hujus.) Et T,D:TB::S,BA S,DA (per 33. hujus) quorum BA DA summa vel differentia - BD.
6	BC BD lateribus & ang. B.	Ang. D.	R coS,B::T,BC:T,BA (per 28. hujus.) Et S,DA:S,BA::TB:T,D (per 33 hujus.) Prout BD minor est aut major quam BA, angulus D similis aut dissimilis erit angulo B. (per 22. hujus.)
7	BC DC lateribus & ang. B.	Ang. C.	coS,BC:R::coT,B:T,BCA (per 30. h.) Et T,DC:T,BC::coS,BCA:coS,DCA (per 34 hujus.) Angulorum BCA DCA summa aut differentia, prout perpendicularis cadit intra vel extra triangulum, est æqualis angulo BCD.

		Datis.	Quær.	Fiat.
	8	B, C, ang. & BC latere.	DC latus.	coS, BC : R :: co T, B : T, BCA. (per 30 hujus.) Item co S, DCA : co S, BCA : T, BC : T, DC (per 31. h.) Si angulus DCA similis sit angulo B (hoc est, si AD sit similis CA) erit DC minor quadrante. Si anguli DCA & B sint dissimiles, erit DC quadrante major, quod sequitur (ex pr. 18, 19 & 20 h.)
	9	BC DC lat. & ang. B.	D. ang.	S, CD : S, B :: S, BC : S, D qui ambiguus est. Analogia sequitur (ex prop. 35. hujus.)
	10	B, D, ang. & BC lat.	DC	S, D : S, BC :: S, B : S, DC quod latus ambiguum est.
Tab. 44. fig. 3.	11	AB BC CA omnibus lateribus.	Ang. B.	Rectangulum sub sinubus crurum AB BC : quadratum Radii :: rectangulum sub sinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ & $\frac{AC-AM}{2}$: Quadrato sinus ½ ang. B. per prop. 39.
Tab. 43. fig. 9.	12	G, H, D omnibus ang.	GD latus.	In Triangulo XNM, Est MN complementum anguli GHD ad semicirculum. XM complementum anguli G & XN complementum anguli D. & angulus X complementum est lateris GD ad semicirculum. Quare mutatis angulis in latera, & lateribus in angulos; eadem est operatio quæ est in casu 11 hujus, cum arcus & eorum complementa ad semicirculos habeant eosdem sinus.

TAB. XLIII.



DE
NATURA ET ARITHMETICA
LOGARITHMORUM
PRÆFATIO.

Ingens olim compendium accepit Mathesis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi & aliàs plane intractabiles sine ullo tædio in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, sive cursum navis dirigat Nauta, sive curvarum altiorum indolem investiget Geometra, sive stellarum loca exquirat Astronomus, sive alia naturæ phænomena explicet Physicus, sive demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re Mathematica primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissimè illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias Logarithmorum proprietates selegerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu, qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra Arithmeticæ speciosæ & Geometriæ elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile Logarithmorum Inventum Nepero Scoto Merchestonii *Baroni debetur, qui primus canonem Logarithmorum*

rum descripsit, construxit, & edidit, Edinburgi *Anno* 1614. *Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris Inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen* Neperum *Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruatur.*

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam Neperus *excogitavit, & communicato consilio cum Domino* Henrico Briggio, *Geometriæ in Academia* Oxoniensi *Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam redactos compleret. Sed* Nepero *demortuo, totum quod restabat onus in* Briggium *devolutum est, qui magno labore, & summa qua pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab* 1 *usque ad* 20000) *aliisque undecim ab* 90000 *usque ad* 101000, *pro quibus omnibus numeris, supputavit Logarithmos quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est* Londini *anno* 1624.

Eundem Canonem iterato edidit Goudæ *apud* Batavos, *anno* 1628. Adrianus Vlacq, *suppletis, ut docuerat* Briggius, *chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.*

Computavit etiam Briggius *Logarithmos Sinuum & Tangentium, pro singulis Gradibus graduumque centesimis, ad* 15 *figurarum loca, quibus adjunxit sinus Tangentes & secantes veros seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum & Tangentium dicuntur sinus & Tangentes Artificiales, ipsi vero sinus & Tangentes, naturales vocantur. Has Tabulas simul cum Tractatu de Tabularum constructione & usu, post mortem* Briggii, *sub nomine* Trigonometriæ Britannicæ *edidit* Henricus Gelibrand Londini *Anno* 1633.

Post illud tempus, pluribus in locis Tabularum compendia prodiere. In quibus sinus Tangentes, eorumque Logarithmi,

rithmi, tantum constant septem notarum locis, & numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 *usque ad* 10000, *qui pro plerisque casibus sufficere possunt.*

Harum Tabularum dispositio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit Nathaniel Roe Anglus Suffolciensis, *quamque, quibusdam in melius mutatis, sequitur* Sherwinus *in Tabulis suis Mathematicis* Londini *Anno* 1705 *editis, in quibus habentur Logarithmi Numerorum omnium ab unitate usque ad* 101000 *septem figurarum notis constantes, Logarithmorum quoque differentiæ partesque proportionales adscribuntur, quarum ope Logarithmi numerorum usque ad* 10000000 *facile haberi possunt: quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Praeterea in iisdem prostant Sinus Tangentes & Secantes, cum eorum Logarithmis & differentiis pro quolibet gradu & minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicae inservientibus.*

CAPUT I.

De ortu & natura Logarithmorum.

Quemadmodum in Geometria, linearum magnitudines numeris sæpe definiuntur; ita quoque in Arithmetica vicissim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, assumendo scil. lineam aliquam quæ ipsa unitatem repræsentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, & ita deinceps, exponet. Hac ratione quorundam numerorum Genesis & proprietates melius concipiuntur, clariusque in animo versantur, quam per abstractos numeros fieri possit.

Hinc si quælibet linea a in seipsam ducatur, quæ exinde prodit quantitas a^2, non æstimanda est tanquam duarum dimensionum, sive ut Quadratum Geometricum cujus latus est linea a, sed tanquam linea quæ sit tertia proportio-

 nalis

nalis lineæ pro unitate aſſumptæ, & lineæ a. Sic etiam ſi a^2 per a multipliciter, quæ prodit a^3 non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu cubus Geometricus, ſed linea quæ eſt quartus terminus in progreſſione Geometricâ cujus primus terminus eſt 1 ſecundus a. Nam termini $1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5\ a^6\ a^7$ &c. ſunt in continua ratione 1 ad a: & indices terminis affixi oſtendunt locum ſeu diſtantiam, quam quiſque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 eſt in quinto loco ab unitate, a^6 in ſexto ſeu ſexies magis diſtans ab unitate quam a ſeu a^1, qui immediate ſequitur unitatem.

Si inter terminos 1 & a inſeratur medius proportionalis qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$, nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter a & a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$, nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius a ab unitate.

Si inter 1 & a inſerantur duo medii proportionales; horum primus eſt radix cubica ipſius a, cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate tertiá tantum parte diſtantiæ ipſius a, adeoque radix cubica ſcribi debet per $a^{\frac{1}{3}}$. Hinc Index ipſius Unitatis eſt 0, nam unitas non diſtat à ſeipſâ.

Eadem ſeries quantitatum Geometrice proportionalium continuari poteſt utrinque, tam deſcendendo verſus ſiniſtram, quam aſcendendo verſus dextram; termini enim

$$\frac{1}{a^5}\ \frac{1}{a^4}\ \frac{1}{a^3}\ \frac{1}{a^2}\ \frac{1}{a}\ 1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5 \text{ \&c.}$$

ſunt omnes in eadem progreſſione Geometrica. Adeoque cum diſtantia ipſius a ab unitate ſit verſus dextram & poſitiva ſeu + 1, diſtantia æqualis in contrariam partem ſcil. diſtantia termini $\frac{1}{a}$ erit negativa ſeu -1, qui erit index termini $\frac{1}{a}$ pro quo itaque ſcribi poteſt a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index -2 oſtendit terminum in ſecundo loco ab uni-

unitate versus sinistram locari; idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} est idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi ostendunt terminos ad quos pertinent, in partem discedere contrariam ei, qua ab unitate progrediuntur termini, quorum indices sunt positivi. Hisce præmissis.

Si super linea AN utrinque indefinite extensâ, capiantur AC CE EG GI IL dextrorsum. Item ΑΓ ΓΠ &c. sinistrorsum, omnes inter se æquales: & ad puncta Π Γ AC EG IL erigantur super AN perpendiculares rectæ ΠΣ ΓΔ AB CD EF GH IK LM quæ sint omnes continue proportionales, numerosque repræsentent, quorum AB sit unitas. Lineæ AC AE AG AI AL —ΑΓ —ΑΠ distantias numerorum ab unitate respective exponent, sive locum & ordinem quem quisque numerus in serie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate distat. Ita AG cum sit tripla rectæ AC, erit numerus GH in tertio ab unitate loco, si modo CD sit in primo, sic LM erit in quinto loco cum sit AL = 5 AC. Tab. 44. fig. 7.

Quod si proportionalium extremitates ΣΔ BD FH KM rectis lineis jungantur; figura ΣΠ LM fit polygonum pluribus aut paucioribus constans lateribus, prout plures aut pauciores in progressione fuerint termini.

Si partes AC CE EG GI IL bisecentur in punctis *c e g i l* & rursus excitentur perpendiculares *cd ef gh ik lm*, quæ sint mediæ proportionales inter AB CD, CD EF, EF GH, GH IK, IK LM, nova orietur proportionalium series, cujus termini incipiendo ab eo qui proxime sequitur unitatem duplo plures sunt, quam in prima serie, & terminorum differentiæ minores fiunt, propiusque ad rationem æqualitatis accedunt termini quam prius; quin etiam in hac nova serie, rectæ AL AC distantias terminorum LM CD ab unitate exponent, scil. cum AL decies major sit quam A*c*; erit LM decimus seriei terminus ab unitate, & ob A*e* triplo majorem quam A*c*, erit *ef* tertius seriei terminus, mo-

 do

do *cd* ſit primus: & inter AB & *ef* erunt duo medii proportionales, inter AB vero & LM erunt novem termini medii proportionales.

Quod ſi linearum extremitates B*d*D*f*F*h*H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus conſtans lateribus.

Si rurſus diſtantiæ A*cc*CC*ee*E &c. biſecari concipiantur, & inter binos quoſque terminos, ad medias illas diſtantias inſeri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium ſeries, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior. Terminorum vero differentiæ minores erunt; junctiſque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur ſecundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum à ſeinvicem diſtantias.

Quin in hac nova ſerie, diſtantiæ AL AC &c. determinabunt terminorum ordines ſeu locos, nempe ſi ſit AL quintuplo major quam AC; ſitque CD quartus ab unitate ſeriei terminus: erit LM iſtius ſeriei terminus viceſimus ab unitate.

Si ſic continuo inter binos quoſque terminos inſerantur medii proportionales, fiet tandem numerus terminorum ſeriei, ſicut & laterum polygoni major quolibet dato numero ſeu infinitus; latera vero ſingula magnitudine diminuta fient quavis datâ rectâ lineâ minora; Adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea conſiderari poteſt, tanquam polygonum cujus latera ſunt numero infinita, & magnitudine minima.

Curva ſic deſcripta dicitur *Logarithmica*, in qua ſi numeri per rectas ad axem AN normaliter inſiſtentes, repræſententur, portio Axis inter numerum quemlibet, & Unitatem intercepta, oſtendit locum ſeu ordinem quem numerus ille obtinet in ſerie Geometrice proportionalium, & æqualibus intervallis ab invicem diſtantium. Verbi gratia, ſi AL ſit quintuplo major quam AC, ſintque ab unitate ad LM mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad CD ducenti

centi termini ejusdem seriei, seu erit C D terminus seriei ducentesimus ab unitate; & quicunque supponatur numerus terminorum ab AB ad M, erit istius numeri pars quinta numerus terminorum ab AB ad CD.

Curva Logarithmica potest etiam concipi duobus motibus describi, quorum unus æquabilis est, alter vero in data quadam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. si recta AB super AN uniformiter incedat, adeo ut terminus ejus A æqualibus temporibus, æqualia spatia describat, interea tamen ita crescat AB, ut æqualibus etiam temporibus, incrementa capiat, quæ sint toti lineæ crescenti proportionalia, hoc est si AB progrediendo in cd, augeatur parte sui od, & hinc æquali tempore quando in CD perven erit, augeatur simili parte Dp, quæ sit ad dc ut incrementum do ad AB: similiter, dum æquali tempore ad ef pervenerit, crescat parte fq, quæ sit ad DC ut Dp ad dc seu ut do ad AB, id est, in æqualibus temporibus, incrementa facta sint semper totis proportionalia.

Vel si linea AB regrediendo in contrariam partem, in constanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia spatia ΑΓ ΓΠ pertransit, decrementa patiatur ΑΒ — ΓΔ ΓΔ — ΠΣ quæ sint ipsis ΑΒ ΓΔ proportionalia. Lineæ sic crescentis aut decrescentis terminus Logarithmicam describet. Nam cum sit AB: do :: dc: Dp :: DC: fq erit componendo AB: dc :: dc: DC :: DC: fe & ita deinceps.

Per hos duos motus, unum scil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipse *Neperus* Logarithmorum originem exposuit, Logarithmum sinus cujusque arcus vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum sinûs totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit.*

Ex hac Logarithmicæ descriptione constat, numeros omnes in æqualibus distantiis, esse continue proportionales. Quin etiam patet, quod si sint quatuor numeri AB CD IK LM tales, ut distantia inter primum & secundum sit æqualis distantiæ inter tertium & quartum, qualiscunque sit distantia secundi à tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia distantiæ AC IL. sunt æquales, erit AB ad incrementum Dc ut IK ad incrementum MT; unde componendo AB: DC :: IK: ML. Et vicissim, si quatuor numeri sint proportionales, erit distantia inter primum & secundum, æqualis distantiæ inter tertium & quartum.

Distantia inter duos quoslibet numeros, dicitur Logarithmus rationis istorum numerorum, & metitur non quidem ipsam rationem, sed numerum terminorum in data serie Geometrice proportionalium progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiæ inter alios duos numeros; Ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia IL inter numeros IK LM dupla distantiæ Ac quæ est inter numeros AB cd, bisecta IL in l ob Ac = Il = lL, erit ratio IK ad lm æqualis rationi AB ad cd, adeoque ratio IK ad LM quæ est duplicata rationis IK ad lm, (per *defin.* 10. *El.* 5.) erit etiam duplicata rationis AB ad cd.

Similiter si distantia EL sit tripla distantiæ AC; erit Ratio EF ad LM triplicata rationis AB ad CD. Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales ab EF ad LM quam sunt ejusdem rationis termini ab AB ad CD, at tam ratio EF ad LM, quam ratio AB ad CD, componitur ex rationibus æqualibus intermediis (per 5. *defin. El.* 6.) Adeoque ratio EF ad LM ex triplo pluribus rationibus composita. Triplicata erit rationis AB ad CD. Similiter si sit GL distantia quadrupla distantiæ Ac, erit ratio GH ad LM Quadruplicata rationis AB ad cd. & ita deinceps.

Numeri cujuslibet Logarithmus, est Logarithmus rationis Unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem & illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratia si ab uni-

unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10 000 000 hoc est si sit numerus 10 in loco 10 000 000^{m}; per computationem invenietur, esse in eadem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3 010 300, hoc est numerus binarius stabit in loco 3 010 300mo. Similiter ab unitate usque ad 3, invenientur termini proportionales 4 771 213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10000000, 3010300, 4771213. erunt Logarithmi numerorum 10, 2, & 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y, erit secundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10 000 000^{mus}, erit $y^{10000000}=10$. Item erit $y^{3010300}=2$. Item $y^{4771213}=3$, & ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri, qui est ab unitate primus. Et potestatum indices sunt numerorum Logarithmi.

Cum Logarithmi sint distantiæ numerorum ab unitate, ut superius ostensum est. Erit Logarithmus ipsius unitatis 0, nam unitas non distat à se ipsa. Et fractionum Logarithmi sunt negativi seu infra nihil descendentes, hi enim in contrariam discedunt partem, adeoque si numeri ab unitate proportionaliter crescentes habeant Logarithmos positivos, seu signo + affectos, Numeri ab unitate similiter decrescentes, seu fractiones habebunt Logarithmos negativos, seu signo − affectos. Quod verum est quando Logarithmi æstimantur per distantias numerorum ab unitate.

At si initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, sed ab unitate quæ est in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratia à fractione $\frac{1}{1\ 00000\ 00000}$; tunc omnes fractiones hac majores habebunt Logarithmos positivos, reliquæ minores, obtinebunt Logarithmos negativos, sed de hac re plura postea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus D C E F G H I K &c. distantiæ CE EG GI &c. sint æquales, erunt horum

rum numerorum logarithmi AC AE AG AI &c. æquidifferentes, seu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi sunt omnes in progressione Arithmetica. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, videl. Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti, æquales servant differentias.

In prima quam *Neperus* edidit Logarithmorum specie, posuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate distare, quantum ipse terminus unitatem superabat. h. e. Si *vn* sit primus seriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum seu distantiam A*n* vel B*y* æqualem esse voluit ipsi *vy*, seu incremento numeri supra unitatem, ut si *vy* sit 1,0000001, ejus Logarithmum A*n* ponebat 0,0000001, & hinc computatione factâ Numerus Denarius seu 10 erit 23025850^{us} seriei terminus, qui itaque numerus est Logarithmus denarii in hac Logarithmorum forma, & exprimit ejus distantiam ab unitate in partibus quarum *vy* vel A*n* est una.

At hæc positio omnino arbitraria fuit, potest enim distantia primi termini, ad ipsius excessum supra unitatem, datam quamvis habere proportionem, & pro varia illa ratione, quæ pro arbitrio supponi potest, esse inter *vy* & B*y*, incrementum primi termini supra unitatem & ejusdem ab unitate distantiam, diversæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum speciem in aliam magis commodam postea mutavit *Neperus*, in qua posuit numerum denarium non esse 23025850^{mum}, seriei terminum, sed terminum 10000000^{m}, inque hac Logarithmorum forma, primum incrementum *vy* erit ad distantiam B*y* vel A*n*, ut unitas seu AB ad fractionem decimalem, 0,4342994, quæ itaque exponet Longitudinem subtangentis AT.

TAB 45. fig. 2. Post mortem *Neperi*, vir summus Dominus *Henricus Briggius*, immenso labore, Logarithmorum Tabulas ad hanc formam construxit & edidit. In hisce tabulis cum logarithmus denarii seu ejus distantia ab unitate ponitur 1,0000000, sintque 1, 10, 100, 1000, 10000 &c, continue proportionales, erunt æquidistantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit

2,

2, 0000000. millenarii 3, 0000000 & numeri 10000 Logarithmus fiet 4, 0000000 & ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipere debent per 0, ſeu debet eſſe 0 in primo loco verſus ſiniſtram, ſunt enim minores quam Logarithmus numeri 10 cujus initium eſt unitas; & Logarithmi numerorum inter 10 & 100 unitate incipiunt, ſunt enim majores quam 1. 0000000 & minores quam 2. 0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 & 1000 binario incipiunt, ſunt enim majores quam logarithmus numeri 100, quem incipit 2. & minores logarithmo numeri 1000 qui incipit per 3; eodem modo oſtendetur in Logarithmis numerorum in 1000 & 10000, primam figuram verſus ſiniſtram debere eſſe 3; & in Logarithmis numerorum ab 10000 uſque ad 100000 prima verſus ſiniſtram figura erit 4, & ita deinceps.

Prima cujuſque logarithmi figura verſus ſiniſtram dicitur characteriſtica ſeu index; quia oſtendit altiſſimum ſeu remotiſſimum locum numeri à loco unitatum. v. gr. Si index logarithmi ſit 1. numeri reſpondentis altiſſimus ſeu remotiſſimus verſus ſiniſtram ab unitate locus, erit locus decadum. Si index 2, remotiſſima numeri reſpondentis figura erit in ſecundo ab unitatum loco, hoc eſt erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altiſſimam numeri ſui figuram eſſe in tertio ab unitatum loco, & inter millenarios locari.

Logarithmi numerorum omnium qui ſunt in progreſſione decupla aut ſubdecupla, characteriſticis ſeu indicibus ſuis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iiſdem ſcribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. nam cum ſit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; diſtantiæ inter 1 & 17. inter 10 & 170, inter 100 & 1700, inter 1000 & 17000 erunt omnes æquales, adeoque cum diſtantia inter 1 & 17 ſeu Logarithmus numeri 17 ſit 1.2304489 erit logarithmus numeri 170 = 2. 2304482, & Logarithmus numeri 1700 erit 3.2304489 ob numeri 100 Logarithmum = 2.0000000, & ſimiliter ob numeri 1000 Logarithmum = 3. 0000000 Logarithmus numeri 17000 erit 4.2304489.

 Sic

Sic etiam numeri 6748. 674, 8. 67, 48. 6, 748. 0, 6748. 0, 06748. ſunt continue proportionales ſcil. in ratione ad 1, eorum itaque à ſe invicem diſtantiæ æquales erunt diſtantiæ ſeu Logarithmo numeri 10, ſeu æquales 1, 0000000. quare cum Logarithmus numeri 6748 ſit 3, 8291751, reliquorum logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0, 6748	−1,8292751
0, 06748	−2,8291751

In duobus ultimis logarithmis, Indices tantum ſunt negativi, reliquis figuris poſitivis manentibus, adeoque cum reliquæ figuræ addendæ ſunt, ſubtrahendi erunt indices, & vice verſa.

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmetica ubi numeri ſunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

Quoniam in multiplicatione, unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, diſtantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis erit diſtantiæ inter multiplicandum & productum; ſi itaque numerus GH per numerum EF eſſet multiplicandus, diſtantia inter GH & productum debet eſſe æqualis diſtantiæ AE, ſeu Logarithmo multiplicatoris, ſi itaque capiatur GL æqualis AE, erit numerus LM productus, hoc eſt, ſi ad AG logarithmum multiplicandi addatur AE Logarithmus multiplicatoris, ſumma erit Logarithmus producti. (Tab 44. fig. 7.)

In Diviſione Unitas eſt ad diviſorem, ut quotus ad dividendum; adeoque diſtantia inter diviſorem & unitatem æqualis erit diſtantiæ inter dividendum & quotum. Sic ſi LM per EF eſſet dividendus, erit diſtantia EA æqualis diſtantiæ inter LM & quotum, adeoque ſi capiatur LG æqualis EA, EA; ad G erit quotus. Hoc est, si ab AL Logarithmo Dividendi, auferatur GL seu AE Logarithmus divisoris, restabit AG Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmetica perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo, & expeditius fiunt, per additionem aut subductionem Logarithmorum.

Sit exempli gratia numerus 7589 multiplicandus per 6757 addendo Logarithmos ut in margine videre est, habetur Logarithmus producti cujus index 7 monstrat esse in producto septem locos præter unitatum locum; & quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 & numerum producto majorem esse 51279000, quin capiendo differentias adjunctas, & partes proportionales; invenio notas ante-penultimam & penultimam esse 87, in ultimo autem seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63 adeoque verus productus erit 51278173. Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constant 7 figurarum locis præter characteristicam, adeoque ubi opus est, Tabulæ *Vlacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum; vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Log. 3.8801846
Log. 3.8297539
Log. 7.7099385

Si numerus 78956 dividendus sit per 278, substrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis, cui Logarithmo respondet, Numerus 282, 719 qui itaque erit quotiens.

Log. 4. 8954004
Log. 2. 4440448
Log. 2. 4513556

Cum unitas, numerus quilibet assumptus, ejus quadratus, cubus, Biquadratus, &c. sint continue proportionales, eorum à se invicem distantiæ æquales erunt. Manifestum itaque est Quadrati distantiam ab unitate, duplam esse distantiæ radicis ab ab eadem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, Bi-quadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si dupliciter logarithmus numeri, dabitur logarithmus Quadrati, Si triplicetur, logarithmus cubi, si quadruplicetur, prodit Logarithmus Biquadrati. Et vice versa si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus Radicis quadratæ ejusdem numeri: Quin & ejusdem Logarithmi tertia pars erit logarithmus Radicis Cubicæ, & pars quarta Logarithmus Radicis biquadraticæ, & ita deinceps.

Hinc Radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur Radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars dimidia 0, 3494850, erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, seu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui respondet numerus 2, 23606 quam proxime.

CAPUT III.

De Arithmetica Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

Quotiescunque Fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Logarithmi partem, & subducendi alteram, expedit ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, sed ab unitate, quæ sit in decimo vel centesimo loco fractionum decimalium, v. g. po-

Tab. 45. fig. 1. ne PO esse $\frac{1}{10000000000}$ & Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis distabit ab unitate versus sinistram, quam numerus 10 ab eadem distat versus dextram sunt enim Decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate usque ad PO. Adeoque si AB sit unitas, ejus Lo-

Logarithmus in hac suppositione non erit o, sed erit OA = 10 0000000. Nam distantia denarii ab unitate est. 1.0000000, unde distantia numeri 10, ab PO erit 11, 000 0000; Item Distantia numeri 100 à PO, seu ejus Logarithmus à PO incipiens, erit 12.000 0000 & numeri 1000 Logarithmus seu distantia à PO erit 13.000 0000; atque hac ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10.& Fractiones quorum indices fuerunt — 1, aut — 2, aut — 3, &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At si Logarithmi incipiunt à loco Fractionis cujus numerator est unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum est quoties fractiones occurrunt minores quam PO) illa Fractio centies plus distabit ab unitate quam 10 ab ea distat, adeoque Unitatis Logarithmus habebit Indicem 100. Numeri Denarii Logarithmus Indicem habebit 101. Et numeri centenarii Logarithmo congruet Index 102, & ita deinceps Indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quae sunt majores PO (à quo initium ducitur) Logarithmi erunt positivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. sunt in continua progressione Geometrica, æqualiter à se invicem distabunt, & eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; Adeoque cum Logarithmus denarii sit 11. 0000000, & unitatis Logarithmus sit 10. 0000000 erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10}$ = 9. 0000000; & fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8, 0000000; & similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quin etiam eadem ratione si index Logarithmicus Unitatis sit 100 & denarii 101, Erit index Logarithmi Fractionis $\frac{1}{10}$, 99, & Fractionis $\frac{1}{100}$ Index Logarithmi erit 98; & Fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura quæ cyphra non sit, ponenda fuerit v. gr. Si index sit 4 ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10 scil. 6 ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6^ta ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si Unitatis index sit 100 & fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam Fractio GH per fractionem DC multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter Unitatem & multiplicatorem æqualis distantiæ inter multiplicandum & productum. Quare si capiatur GI=AC, ad I erit productus IK. Et proinde si ab OG Logarithmo multiplicandi, auferatur GI vel AC, restabit OI Logarithmus producti. Est vero AC=OA−OC, quæ ablata ab OG, relinquetur OG+OC−OA=OI, hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris & multiplicandi, & è summa auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur logarithmus producti. ex. gr. Sit Fractio decimalis 0, 00734 per fractionem 0, 000876 multiplicanda, pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, & fractionum Logarithmi erunt ut in margine, qui additi, & rejecto Logarithmo Unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco, quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, & productus erit, 00000642984.

97, 8656961
96, 9425041
94, 8082002

In Divisione, divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum, & proinde distantia inter divisorem & unitatem, æqualis erit distantiæ inter dividendum & quotum. Itaque si fractio IK dividenda esset per DC, capienda erit IG=CA & locus quoti erit G. Est vero CA=OA−OC quæ ad OI addita fit OA+OI−OC=OG. hoc est si addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, & à summa auferatur Logarithmus divisoris, restabit logarithmus quotientis; sic si numerus CD per IK esset dividendus, capienda erit distantia CS=IA, & erit ST quotiens; cujus Logarithmus est OA+OC−OI. Sit CD=0, 347 IK=0, 00478. ad logarithmum ipsius CD addatur Logarithmus Unitatis, hoc est ejus Indici præponatur 1 aut 10, & ex eo subducatur logarithmus divisoris, restabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monstrat quotientem esse inter nume-

19, 5403295
7, 6794279
11, 8609016

ros qui sunt à 10 ad 100 quæro itaque numerum logarithmo respondentem, quem invenio esse 72, 549. Si fractionis vulgaris verbi gr. $\frac{7}{8}$ logarithmus desideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem est, ejus indici præponatur 1 aut 10 & subducatur ab eo logarithmus denominatoris 8, restabit logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis, 875.

10,8450980
0,9030900
9,9420080

Ut Fractionis cujuslibet D C potestates habeantur, capiendæ sunt CE EG GI IL singulæ æquales AC, & EF erit quadratus, GH Cubus, IK biquadratus numeri DC, sunt enim ab unitate continue proportionales. Est præterea $AE = 2AC = 2OA - 2OC$, unde $OE = OA - AE = 2OC - OA$, hoc est logarithmus quadrati est duplus logarithmi radicis, minus logarithmo unitatis. Similiter ob $AG = 3AC = 3OA - 3OC$ erit $OG = OA - AG = 3OC - 2OA =$ Logarithmo cubi = Triplo Logarithmi lateris minus duplo logarithmi unitatis. Eadem ratione, quia $AI = 4AC = 4OA - 4OC$, erit $OI = 4OC - 3OA$; qui est Logarithmus Biquadrati. Et universaliter fractionis potestas sit n, logarithmus L, erit logarithmus potestatis $n = nL - nOA + OA$, hoc est multiplicando logarithmum fractionis per n, & è producto abjiciendo logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur logarithmus potestatis n ejusdem fractionis.

Ex. gr. sit Fractio $\frac{1}{20}$ =, 05 cujus quæratur potestas 6ª hujus fractionis logarithmus est 8, 6989700 qui multiplicatus per 6 dat numerum 52, 1938200, & ex 52 ablato numero 50 qui est index Logarithmi unitatis in 5 ductus, restabit logarithmus potestatis 6ᵗᵃ scil. 2, 1938200 cui respondet numerus 000 0000 15625. nam index 2 ostendit septem cyphras primæ figuræ præponendas esse.

Si Fractionis, 05 potestas octava desideretur, multiplicando logarithmum per 8, prodit 69, 5917600, at cum ex numero 69 auferri non potest 70, qui est septies index logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem

cem logarithmi unitatis esse 100. & index logarithmicus fractionis, erit 98. hic logarithmus in 8 ductus dat 789.5917600 & ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis, est septies logarithmus unitatis, restabit 89.5917600 logarithmus potestatis 8^{va} Fractionis $\frac{1}{2}$. cui congruens numerus est 00000 00000 39062. nam cum Index sit 89 & ejus differentia ab 100 est 11; figura prima fractionis significativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus, radices potestatum desiderentur. v. gr. Fractionis EF, quæratur radix quadrata. Quoniam Radix est media proportionalis inter Fractionem & unitatem; bisectâ AE in C, erit CD radix quadrata fractionis EF. Est vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$, Adeoque OC Logarithmus Radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$. Si fractionis GH radix cubica quæratur. Radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & GH, secetur itaque AG in tres partes æquales, quarum prima sit AC, erit CD radix quæsita, & quoniam est $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$ si hæc subducatur ab OA, restabit $\frac{2 OA + OG}{3} = OC$ scil. Logarithmo Radicis cubicæ fractionis GH. Sic etiam fractionis IK radix biquadratica habetur, secando AI in quatuor partes æquales. Nam Radix est prima trium mediarum proportionalium inter unitatem & Fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI =$, & erit CD Radix biquadratica Fractionis IK. Sed est $\frac{1}{4} AI = \frac{OA - OI}{4}$ adeoque $OC = OA - AC = \frac{3 OA + OI}{4}$

Uni-

Universaliter si fractionis LM desideretur radix potestatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{nOA - OA + OL}{n}$, hoc est si indici Logarithmico fractionis, præponatur numerus $n-1$. & logarithmus sic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæsitæ. Sic si quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ sive, 5 hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica desideratur, & fiet 29. 6989700 cujus numeri triens est 9, 8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$ & congruens Logarithmo numerus est, 7937 qui erit radix quæsita.

CAPUT IV.

De Regula Proportionis seu Aurea Logarithmica.

Datis tribus numeris, qua ratione quartus proportionalis inveniendus sit, nos docet proportionis Regula; scil. termini secundus & tertius in se invicem ducendi sunt, & productus dividendus est per primum, qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæsitum. At per logarithmos minore labore habetur ille quartus; Nam si è summa Logarithmorum secundi & tertii auferatur logarithmus primi, qui restat numerus est logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam & hic labor minui aliquantulum potest, si loco logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, seu differentia logarithmi à numero 100000000, &, obtinetur si pro singulis logarithmi figuris scribantur earum differentiæ à 9. Complementum hoc Arithmeticum cum reliquis duobus logarithmis in unam summam conjiciatur, & à summa, unitatis nota in primo versus sinistram loco sita abjiciatur, restabit logarithmus quarti termini quæsiti; atque hoc modo per unicam Numerorum trium additionem invenitur logarithmus termini quæsiti. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri A B C & è summa secundi & tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E, & ab eo auferatur A, restabit E−A si numeri BC & E−A in unam summam addantur, & è summa trium rejiciatur E, restabit B+C−A. sic si subducendus est numerus 15 ex 23 capio numeri 15 complementum ad 100 quod est 85, hunc numerum addo ad 23 & summa fit 108 ex quo sublato 100 restabit numerus 8. Sequuntur Exempla Trigonometrica Regulæ proportionis per Logarithmos soluta.

85
23
108

TAB. 44. fig. 8. Sit Triangulum ABC rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46. angulus B 98 gr. 32'. & latus BC, 3478. & quæritur latus AC. Fiat (per *cas.* 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B ut BC ad AC. Et quia sinus Log. anguli A est primus analogiæ terminus ejus vice substituto complementum Arithmeticum ejusdem,

Arith. comp. L,S,B.	0.2228938
Log. Sin B.	9.9951656
Log BC.	3.5413296
Log. AC	13.7593888.

& addo Log. BC, Log. S, B & prædictum complementum in unam summam; & è summa rejecta unitate quæ est in primo versus sinistram loco, dabitur Logarithmus lateris AC, cui congruens numerus est 5766, 306 æqualis AC lateri quæsito.

TAB. 44. fig. 9. Sit Triangulum Sphæricum ABC, in quo dantur omnia latera scil. BC = 30 grad. AB = 24 gr. 4'. & AC = 42 gr. 8'. quæritur angulus B. Producatur BA ad M ut fit BM = BC erit AM differentia laterum BC BA æqualis 5 gr. 56. (Per *cas.* 11. in Triangulis obliquangulis Sphæricis.) Fiat ut rectangulum sub sinubus crurum AB BC ad quadratum Radii, ita Rectangulum sub sinubus Arcuum $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$ ad quadratum sinus anguli ½ B.

Est

Est vero $\frac{AC+AM}{2}$ = 24 gr. 2′. & $\frac{AC-AM}{2}$ = 18 gr. 6.

Et quia primus analogiæ terminus est rectangulum sub sinubus AB BC, & secundus terminus est quadratum Radii; Summa Log. Sin. AB BC subducenda erit ex duplo Log. Radii & qui restat numerus addendus est ad summam Log. S $\frac{AC+AM}{2}$ $\frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac si singuli Log. Sinus arcuum AB BC subducerentur à Logarith. Radii, vel si horum sinuum capiantur complementa Arithmetica, atq; complementa illa & prædicti sinus in unam conjicerentur summam. Summa illa erit Logarithmus quadrati sinus dimidii anguli B; logarithmi itaque dimidium 9. 8965274 est Log. Sinus anguli B = 51 gr. 59″. 56″. & hujus anguli duplum erit 103 gr. 59′. 52″ = angulo E qui erat inveniendus.

Log. S, BC comp. Arith.	0. 3010299
Log. S, AB comp. Arith.	0. 3898364
Log. S $\frac{AC+AM}{2}$	9. 6098803
Log. S, $\frac{AC-AM}{2}$	9. 4923083
2 Log. S, Ang. B	19. 7930549

CAPUT. V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, Et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

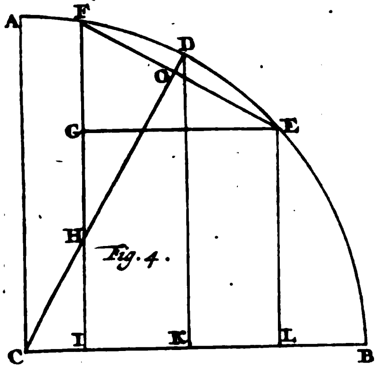
SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V V Y Y Q &c. æquales, & ad puncta S V Y Q &c. *Tab. 45. fig. 1.*

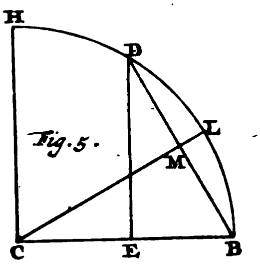
&c. erigantur perpendiculares ST VX YZ Qπ &c. ex natura curvæ, erunt omnes continuè proportionales, quin etiam continua incrementa Xx Zz πϖ erunt totis proportionalia. Nam ob ST : VX :: VX : YZ :: YZ : Qπ erit dividendo ST : Xx :: VX : Zz :: YZ : πϖ, & componendo VX : Xx :: YZ : Zz :: Qπ : πϖ. Hinc si Xx sit pars quælibet rectæ ST, erit Zz eadem pars rectæ VX, & πϖ quoque eadem pars rectæ YZ. ex. gr. Si Xx sit $\frac{1}{10}$ ST erit Zz = $\frac{1}{10}$ VX, & πϖ = $\frac{1}{10}$ YZ seu quod eodem redit, erit VX = ST + $\frac{1}{10}$ ST. YZ = VX + $\frac{1}{10}$ VX, item Qπ = YZ + $\frac{1}{10}$ YZ.

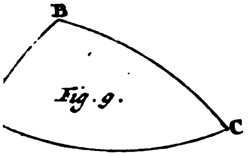
Fiat ut ST ad VX, ita AB unitas ad NR; erit AN = SV; adeoque rectæ SV VY YQ &c. erunt singulæ æquales logarithmo ipsius RN, & AV Logarithmus termini VX erit æqualis AS + AN = Logarithmo ipsius ST + Logarithmo ipsius NR. Item AY Logarithmus termini YZ æqualis erit AS + 2 AN = Log. ST + 2 Log. NR, & AQ logarithmus Termini Qπ æqualis erit AS + 3 AN = Log. ST + 3 Log. NR. Et universaliter si Logarithmus numeri NR multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam à termino primo, & productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continua ratione minuantur, & Qπ sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando Logarithmum numeri NR per numerum qui exponit ejus termini distantiam à primo, & subducendo productum è Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusa, verbi gratia ab OP ita Logarithmus numeri Qπ erit OQ.

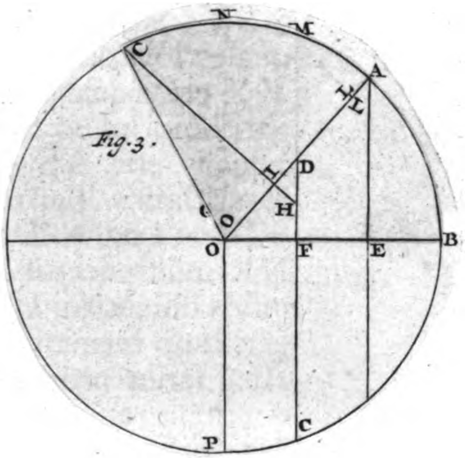
Exponat jam LM quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam à creditore fœnori elocatam, ea lege ut singulis annis, usura annua sorti annumeretur, & finito primo anno, sit usura seu lucrum Kk, & IK aggregatum sortis & lucri pariat

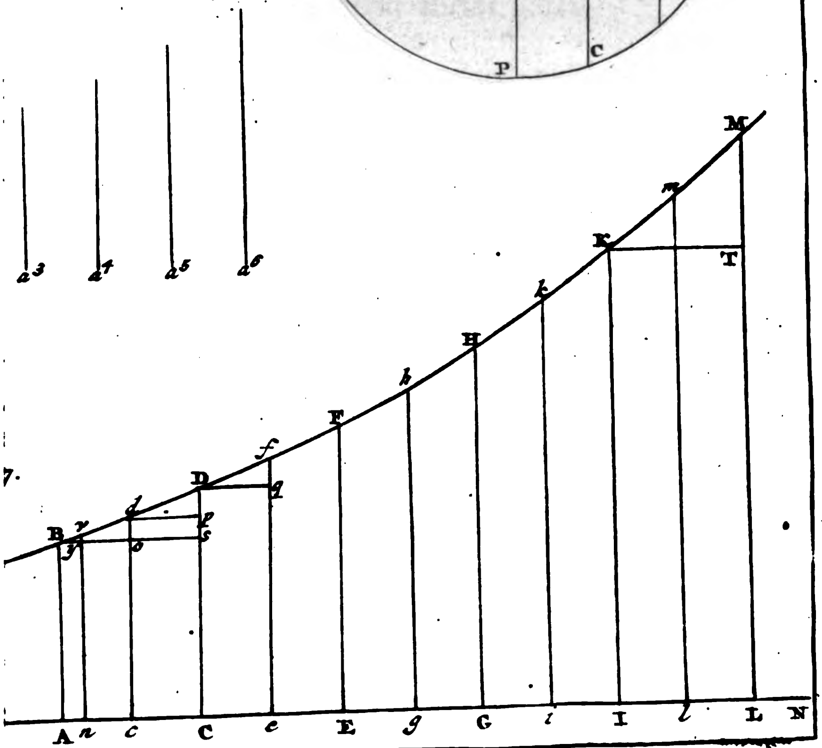
usu-


A
F
D
O
G
E
H
Fig. 4.
C
I
K
L
B


H
D
L
Fig. 5.
M
C
E
B


B
Fig. 9.
C


N
M
C
A
Fig. 3.
D
H
O
O
F
E
B
C
P


a3
a4
a5
a6
M
m
K
T
k
H
h
F
f
D
q
d
p
B
r
y
o
s
7.
A
n
c
C
e
E
g
G
i
I
l
L
N

usuram Hh quæ sit ipsi IK proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura Hh finito anno secundo, sorti accedat, & sors ea sit GH, quæ ad finem anni tertii pariat usuram Ff, ipsi GH proportionalem; Ponamus sortem singulis annis augeri parte sui vicesima $\frac{1}{20}$, adeoque erit $IK = LM + \frac{1}{20}LM$, $GH = IK + \frac{1}{20}IK$. $EF = GH + \frac{1}{20}GH$, & ita deinceps. Erunt proinde termini LM IK GH EF, &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM semiobolus, Anglice *Afarthing*. Ob LM ad IK ut 1 ad $1+\frac{1}{20}$ vel ut 1 ad 1, 05. ut AB ad NR, erit NR=1, 05, cujus Logarithmus AN est 0.0211893, vel magis accurate 0. 0211892991. Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fœnori expositus est. Multiplicetur AN per 600 productus erit 12. 7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97, 0177288. (nam est semiobolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109. 7313082 erit Logarithmus numeri quæsiti, cumque index 109 superat indicem Unitatis novenario seu 9, erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum Unitatum, & numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 5386500000, & minor quam 5386600000. Unus itaque semiobolus fœnori datus; finitis sexcentis Annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000; Cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsa rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat Qπ quamvis pecuniæ summam quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si Debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecunia illa prodiret; Quin & minor summa fœnori exposita, potest post annum cum sua usura, summam Qπ adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum sua usura pecuniam Qπ adæquat, præsens pecuniæ Qπ valor dicitur. Sit AN Logarithmus Rationis, quam sors habet ad aggregatum sortis & usuræ, hoc est, si sors sit usuræ annuæ vigecupla, sit AN Logarithmus numeri $1+\frac{1}{20}$, seu 1, 05, & capiatur QY æqualis AN; erit AY Logarithmus præsentis valoris pecuniæ Qπ. Patet enim pecuniam YZ fœnori expositam finito anno parituram pecuniam Qπ, adeoque ut habeatur logarithmus præsentis valoris, seu YZ; ex Logarithmo AQ detrahi debet Logarithmus AN, & restabit AY logarithmus præsentis valoris vel YZ. Si summa Qπ non nisi post duos annos exactos debeatur; à Logarithmo AQ subtrahendus est numerus 2 AN, & manebit AV logarithmus præsentis valoris, seu summæ quæ pro pecunia Qπ solvi statim debeat. Nam manifestum est pecuniam VX fœnori expositam, spatio duorum annorum, pecuniam Qπ procreaturam. Eadem ratione, si summa Qπ non nisi post tres annos debetur, à logarithmo Qπ subtrahendus erit numerus 3 AN, & qui restat AS, erit logarithmus numeri ST, seu erit ST præsens valor summæ Qπ post tres annos solvendæ. Et Universaliter, si logarithmus AN multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis, debetur summa Qπ, & productus numerus ex logarithmo AQ subducatur, hac ratione dabitur logarithmus numeri, qui erit præsens valor summæ Qπ. Hinc patet si 5386500000 libræ Angl. Societati alicui finitis sexcentum annis solvendæ fuerint; tantæ pecuniæ præsentem valorem, vix unum semiobolum adæquaturum.

TAB. 45. fig. 2. Si in Axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ HG EF, ABCD quæ sint proportionales, & extremitates ipsarum FH, DB, rectis jungantur, quæ productæ cum Axe conveniant in P & K, erunt rectæ GP AK semper æquales. Nam ob GH : EF :: AB : CD. erit GH : FS :: AB : DR. Sed ob æquiangula triangula PGH HSF; Item KAB BRD æquiangula erit PG : HS :: (GH : FS :: AB : DR ::) KA : BR. Quarum proportionalium consequentes HS BR æquales sunt, Antecedentes igitur PG KA æquales erunt. Q. E. D.

Si

Si rectæ CD EF ad AB GH æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, & punctum F cum H, rectæ DBK FHP quæ prius secabant curvam, vertentur in Tangentes BT, HV; & rectæ AT GV semper sibi invicem æquales erunt, hoc est, portio Axis AT vel GV intercepta inter ordinatam & Tangentem quæ Subtangens dicitur, erit ubique constantis & datæ longitudinis, quæ est præcipua Logarithmicæ Proprietas. Nam in diversis Logarithmicis, Subtangentes curvarum species seu formas determinabunt.

In duabus diversæ speciei Logarithmicis, ejusdem numeri Logarithmi, seu distantiæ ab unitate, erunt subtangentibus suarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ HBD SNY, quarum Subtangentes sint AT MX, sitque AB = MN = unitati, item DC = QY; erit AC Logarithmus numeri CD, in Logarithmica HD, ad MQ logarithmum numeri QY, seu ejusdem CD in Logarithmica SY, ut subtangens AT ad subtangentem MX. Concipiatur interseri inter AB CD vel NM QY, infinitos terminos continue proportionales, in ratione AB ad *ab* vel MN ad *mn*; & ob AB = MN erit *ab* = *mn*. item erit *bc* = *no*. Et termini proportionales cum in utraque figura sint numero æquales, divident lineas AC MQ in partes numero æquales, quarum primæ sint A*a* M*m*, partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc est erit A*a* : M*m* :: AC : MQ. Quoniam autem Triangula TAB B*cb* sunt similia (nam pars curvæ B*b* coincidet fere cum portione Tangentis) Item triangula XMM N*on* sunt similia. Erit A*a* vel B*c* : *bc* :: TA : AB. TAB 45. fig. 2. 3.

Item est *no* vel *bc* : N*o* :: MN vel AB : MX.
Unde erit ex æquo, B*c* : N*o* :: TA : MX :: A*a* : M*m* :: AC : MQ. Q.E.D. Si AT vocetur *a*, ob AB : AT :: *bc* : B*c*; erit $Bc = \frac{a \times bc}{AB}$.

Hinc si detur Logarithmus numeri, qui sit unitati proximus,

mus, vel illam minimo excessu superat, dabitur Logarithmicæ subtangens, est enim excessus bc ad Logarithmum Bc ut AB unitas ad subtangentem AT. Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam Logarithmorum, ut alteruter numerorum ad Subtangentem v. gr. Si Incrementum bc sit 00000 00000, 00001 02255 31945 60259, & Bc vel Aa logarithmus numeri ab sit, 00000 00000 00000 44408 92098 50062. duobus his numeris & unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet 43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis AΓ, quæ est subtangens Logarithmicæ quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor Pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ sorti adjecta, una cum ipsa, usuram pariat, finito secundo temporis momento, sorti pariter accessuram, & ita deinceps. Quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua Unitatis, seu unius libræ & si integer Annus seu 1 dat usuram a, particula anni indefinite exigua Mm dabit usuram ipsi Mm proportionalem M$m \times a$; & proinde si Unitas per MN exponatur, ejus incrementum primum erit $no =$ M$m \times a$. Per puncta Nn concipiatur Logarithmica describi, cujus Axis est OMQ. In hac curva, si portio Axis MQ tempus exponat, ordinata QY pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. = Mm, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione MN ad mn, id est crescent eâdem ratione, qua pecunia crescit.

Tab 45. fig. 3.

Tangat Logarithmicam in N recta NX, ejus subtangens MX erit constans & invariabilis, & Triangulum minimum Non simile erit Triangulo XMN. At ostensum est, esse incrementum $no =$ M$m \times a =$ N$o \times a$ erit itaque no : No :: N$o \times a$:

No ::

$No::a:1$. Sed ut no ad No, ita erit NM ad MX. Quare erit, ut a ad 1, ita NM seu 1 ad MX $= \frac{1}{a} =$ subtangenti.

Quod si Usura annua sit pars sortis vicesima, seu si sit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit MX $= \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diversis Logarithmorum formis, ejusdem numeri Logarithmi sunt Subtangentibus suarum curvarum proportionales: si MQ tempus Annuum, seu unitatem, exponat; QY erit pecunia quæ finito anno debetur. Ut verò innotescat QY; Fiat ut MX seu 20 ad 0, 4342944 (qui numerus exponit subtangentem Logarithmicæ, quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*) ita Annus, sive Unitas, ad Logarithmum *Briggianum*, qui numero QY congruit; logarithmus autem ille invenietur 0. 0217147 cui Respondens numerus = QY est 1,05127, cujus incrementum supra unitatem sive sortem ,05127 pauxillum superat annuam usuram ,05. Adeo ut si usura annua centum librarum sit quinque libræ, usura proportionalis singulis anni momentis sorti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni. *lib. sol. d.*
5 : 2 : $6\frac{1}{2}$.

Si quæratur Usura ejusmodi, ut singulis momentis pars ipsius sorti continue crescenti proportionalis, ad sortem accedat, ea lege ut finito Anno producat incrementum quod sit sortis pars quælibet data v. gr. vicesima. Fiat ut Log. numeri 1, 05 ad 1, hoc est ut 0, 0211893 ad 1; ita Subtangens 0,4342944 ad $\frac{1}{a} = 20,49$, & erit $a = \frac{1}{20,49} = ,0488$. Nam si concipiatur pars Usuræ ,0488 momento respondens, hoc est eandem habens rationem ad ,0488 quam habet annus ad momentum, & fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita sors ad ejus incrementum momentaneum; quæ hac ratione continuò crescit pecunia, ad finem anni augebitur vicesima sui parte.

CAPUT VI.

De Methodo qua Henricus Briggius *Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio.*

Tab. 45. fig. 2. Quamvis *Briggius* lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique Rationem ex contemplatione Logarithmicæ evidentissime patebit. In qualibet Logarithmica HBD sint tres ordinatæ AB *ab qs* quam proxime æquales, hoc est earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem; Erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissimæ sibi invicem erunt. & pars curvæ B*s* ab iis intercepta cum recta linea fere coincidet, certe tam prope possunt ordinatæ sibi invicem admoveri, ut differentia curvæ, a recta ipsam subtendente, habeant ad ipsam subtensam, minorem qualibet data rationem. Triangula igitur B*c b* B*r s* pro rectilineis assumi possunt, & erunt æquiangula. Quare est *sr*:*bc*:: B*r* : B*c*:: A*q* : A*a*: hoc est excessus linearum supra minimam AB, erunt logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi qua tam numeri quam Logarithmi per differentias & partes proportionales corriguntur. Quod si AB sit unitas, erunt numerorum logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Si intra numeros denarium & unitatem capiatur medius proportionalis, seu quod idem est, numeri denarii extrahatur Radix quadratica, Radix illa seu numerus in medio erit loco intra denarium & Unitatem. & ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi qui denario competit ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum & unitatem, iterum inveniatur medius proportionalis quod fit extrahendo numeri inventi Radicem quadraticam, hic numerus Unitati duplo vi-

cinior

minor erit quam prior, cujusque logarithmus erit prioris logarithmi semissis, seu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hac ratione continuo extrahatur Radix quadratica & bisecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum cujus differentia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\ 00000\ 00000\ 00000}$ istius logarithmi qui Denario tribuitur. *Briggius* peractis 54 Radicum extractionibus; Invenit numerum 1, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejusque logarithmum fore 0, 00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702. supponatur Logarithmus hic æqualis A q sive B r, & sit q s numerus radicum extractione inventus; erit differentia r s qua unitatem superat =, 00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus logarithmus inveniendus sit) & unitatem quærantur (ut superius ostensum est) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem superans ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ significativæ sequantur. Sit numerus ille $a\,b$, & notæ significativæ, præfixis cyphris differentiam $b\,c$ denotabunt. Deinde fiat ut differentia $r\,s$ ad differentiam $b\,c$ ita B r Logarithmus datus ad B c vel A a Logarithmum numeri $a\,b$; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ sunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæsiti. Hac etiam ratione inveniri possit Subtangens Logarithmicæ nempe si fiat $r\,s$: B r : : A B seu unitas : A T subtangenti, quæ itaque invenietur 0, 43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum logarithmi innotescent, nempe si detur numerus quivis N M ejusque Logarithmus, & quæratur alterius numeri logarithmus qui ad N M satis accedat fiat ut N M ad subtangentem X M ita $n\,o$ differentia numerorum ad N o differentiam Logarithmorum Quod si N M Unitas = A B dabuntur logarithmi multipli- TAB. 45. fig. 3.

tiplicando differentias minimas $b\,c$ per subtangentem constantem A T.

Hac ratione invenientur Logarithmi numerorum 2 3 & 7, & inde dabuntur Logarithmi numerorum 4 8 16 32 64 &c. 9 27 81 243 &c. item 7 49 343 &c. Si à logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus restabit logarithmus Quinarii. & proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compositi, nempe 6 12 14 15 18 20 21 24 28 &c. facile logarithmis suis instruuntur, addendo logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum logarithmos, per tot Radicum extractiones invenire, molestum admodum & laboriosum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias Primas, Secundas, & Tertias &c. Logarithmos supputare. Quo itaque absque tanta molestia Numerorum logarithmi obtineantur, Magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallisius*, & nuper *Halleius* series infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius & certius logarithmi, ad quot volueris loca supputati haberi possunt; De hisce seriebus, eruditum Tractatum scripsit peritissimus Geometra *Halleius* inter Acta Philosophica Societatis Regiæ extantem, ubi series illas nova methodo demonstrat, modumque computandi logarithmos per eas docuit. Liceat hic subjungere novam seriem, ex qua expedite & facile fluunt Logarithmi saltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, Numeri $z - 1$ $z + 1$. erunt pares, & proinde dabuntur eorum logarithmi, & Logarithmorum differentia, quæ dicatur y; Quin etiam datur Logarithmus numeri qui est medius Geometricus inter numeros $z - 1$ & $z + 1$ æqualis scil. semisummæ logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis logarithmo

TAB. XLV.

Fig. 1.

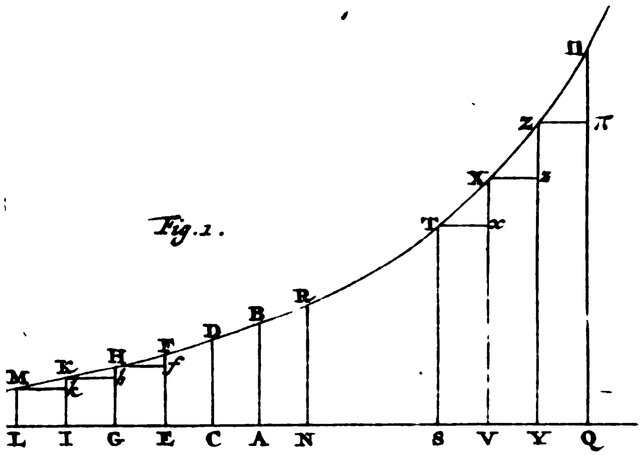


Fig. 2.

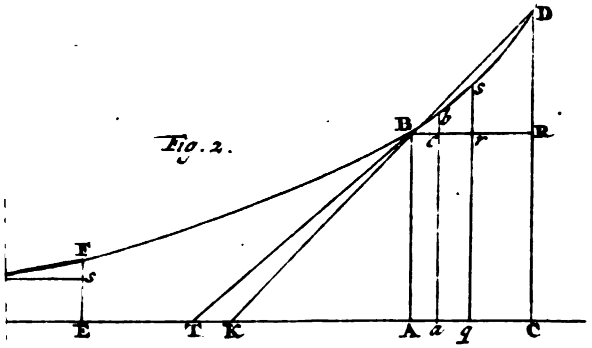
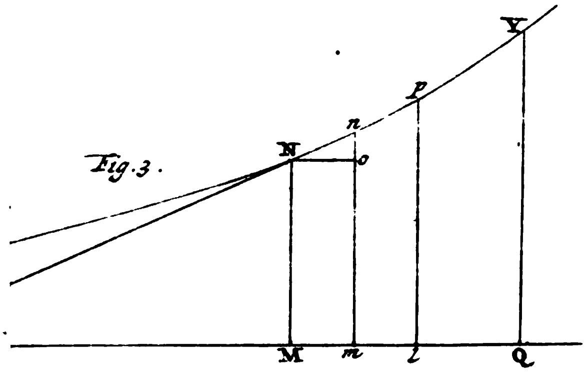


Fig. 3.



mo Rationis quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ & $z+1$ ad Arithmeticum medium scil. numerum z.

Si Numerus superat 1000, Primus seriei terminus $\frac{y}{4z}$ sufficit ad producendum logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca, secundus terminus dabit logarithmi loca viginti. At si z major sit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, & hinc ejus usus optimus erit, in supplendis logarithmis Chiliadum à *Briggio* prætermissis; Hujus rei capiamus exemplum, sit inveniendus logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem est ac logarithmus binarii præfixo Indice 4. & differentia Logarithmorum 20000 & 20002, idem est ac differentia Logarithmorum pro numeris 10000 & 10001, scil. 0, 00004 34272 7687. Hæc differentia si per $4z$ seu 80004 dividatur Quotiens $\frac{y}{4z}$ erit ——— 0, 00000 00005 42813

Huic quoto addatur log. numeri Geometrici medii, summa erit Logarithmus numeri 20001.

0, 00000 00005 42813
4, 30105 17093 02416
4, 30105 17098 45230

Hinc patet, ut habeatur logarithmus ad quatuordecim loca non opus esse producere quotum ultra sex loca. At si logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut a *Vlacquo* in suis Tabulis factum est, duæ primæ quotientis notæ sufficiunt. Et si hac methodo computentur Logarithmi pro numeris supra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exscribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis quæ ab *Halleio* inventæ sunt, facile sequitur, qui autem plura de iis scire cupit, Præfatum Tractatum adeat & discat.

FINIS.

DE
VIRIBUS
CENTRALIBUS.

JOHANNIS KEILLII
EX
ÆDE CHRISTI OXONIENSIS, A. M. EPISTOLA
AD
Clarissimum Virum
EDMUNDUM HALLEJUM,
Geometriæ Professorem Savilianum,
DE
LEGIBUS VIRIUM CENTRIPETARUM.

Haud oblitus es, uti arbitror, Vir Clarissime, te, cum nuper esses Oxonii, Theorema, quo lex vis centripetæ, *Quantitatibus finitis* exhiberi possit, mecum communicasse: quod Theorema tibi monstravit egregius Mathematicus D. *Abrahamus de Moivre*; dixitque Dominum Isaacum Newtonum, Theorema, huic simile, prius invenisse. Cum autem ejus demonstratio perfacilis sit, eam, itemque alia de eadem re cogitata, non possum tibi non impertire. Etsi minime dubitem, quin, si idem argumentum pertractare libuisset, tu acerrimo quo polles ingenii acumine, rem omnem penitus exhaurire potuisses.

THEOREMA.

Si corpus urgente vi centripeta in curva aliqua moveatur; erit vis illa in quovis curvæ puncto, in ratione composita ex directa ratione distantiæ corporis à centro virium, & reciproca ratione cubi perpendicularis à centro in rectam in eodem puncto curvam tangentem demissæ, ducti in radium curvaturæ, quem ibi obtinet curva.

Sit QAO curva quælibet á mobili urgente vi centripeta ad punctum S tendente descripta. Sitque AO arcus in mi- *Tab 47. fig. 1.*

 nimo

nimo quovis tempore percursus. Pr ejus tangens, AR radius circuli æquicurvi, hoc est cujus peripheriæ pars minima cum arcu AO coincidat. Et sit SP recta à puncto S in tangentem perpendiculariter demissa; ducantur Om ad SA & On ad SP parallelæ. Et exponat Om vim qua mobile in A urgetur versus S. Vis qua perpendiculariter à tangente recedit corpus, erit ut On, id est vis tendens versus R & faciens ut mobile, eadem qua prius velocitate latum, describet circulum æquicurvum arcui AO erit ad vim tendentem versus S, qua corpus in curva AO movetur, ut On ad Om, vel ob æquiangula triangula ut SP ad SA. Sed corporum in circulis latorum vires centripetæ sunt ut quadrata velocitatum applicata ad radios; per Corol. Theorem. 4. *Princip. Newtoni.*

Est vero velocitas reciproce ut SP, sive directe ut $\frac{1}{SP}$, adeoque quadratum velocitatis erit ut $\frac{1}{SP^2}$: vis igitur ut On sive vis qua in circulo æquicurvo moveri potest corpus, erit ut $\frac{1}{SP^2 \times AR}$: Ostensum autem est, esse SP ad SA ut vis tendens versus R, qua corpus in circulo æquicurvo moveri potest, ad vim tendentem versus S: sed est vis tendens versus R ut $\frac{1}{SP^2 \times AR}$, adeoque cum sit $SP : SA :: \frac{1}{SP^2 \times AR} : \frac{SA}{SP^3 \times AR}$ erit vis tendens versus S, ut $\frac{SA}{SP^3 \times AR}$. Q. E. D.

TAB. 44. fig. 2. *Cor.* Si curva QAO sit circulus, erit vis centripeta tendens versus S, ut $\frac{SA}{SP^3}$. Adeoque si vis centripeta tendat ad

S punc-

S punctum in circumferentia situm, erit (per 32 tertii) angulus PAS = ang. AQS; adeoque ob similia triangula ASP. ASQ, erit AQ : AS :: AS : SP : unde $SP = \frac{AS^2}{AQ}$ & $SP^3 = \frac{AS^6}{AQ^3}$ unde $\frac{SA}{SP^3} = \frac{SA \times AQ^3}{AS^6} = \frac{AQ^3}{AS^5}$, hoc est, ob datum AQ, erit vis reciproce ut AS^5.

Sit DAB, Ellipsis, cujus Axis DB, foci F & S, AR, OR duæ perpendiculares in curvam sibi proximæ: ducantur KL, OT, in SA, & KM in OR perpendiculares. Quia SA : SK :: *FA+SA : FS, hoc est data ratione, erunt rectarum SA, SK Fluxiones AT, Kk ipsis SA, SK proportionales; & est AL =* ½ lateris recti = ½L. Porro ob KA ad SP parallelam, est angulus ASP = KAL = TOA ob ang. TAO utriusque complementum ad rectum: quare KA : AL :: SA : SP, unde $SP = \frac{L \times SA}{2\ KA}$ & $KA = \frac{L \times SA}{2\ SP}$ Tab 47. fig. 3. * Prop. 3. Elem. 6ti * Prop. 6. partis 4tæ Sect. Con. Milnii.

Porro ob æquiangula triangul. KMk, GPS & OTA, SPA.

Est KM : Kk :: GP : GS :: AP : SK
Item Kk : AT :: SK : SA
Item AT : AO :: AP : SA

Erit KM : AO :: AP^2 : SA^2 :: $SA^2 - SP^2$: SA^2 :: $SA^2 - \frac{L^2 \times SA^2}{4\ AK^2}$: SA^2 :: $4\ AK^2 - L^2$: $4\ AK^2$, unde L^2 : $4\ AK^2$ :: (AO − KM : AO ::) AK : AR ac proinde $AR = \frac{4\ AK^3}{L^2}$.

Eodem prorsus ratiocinio invenietur radius curvaturæ in Hyperbola æqualis $\frac{4\ AK^3}{L^2} = \frac{L \times SA^3}{2SP^3}$.

 In

Tab. 47. fig. 4. In parabola vero facilior est calculus. Nam ob datam subnormalem, est Kk semper $= AT =$ Fluxioni Axis; & triangula KkM, ATO, SPA, AKL, æquiangula, unde $KM : Kk :: AP, SA$, item est AT vel $Kk : AO :: AP : SA$, unde $KM : AO :: AP^2 : SA^2 :: SA^2 - SP^2 : SA^2 ::$ unde erit $SP^2 : SA^2 :: AO - KM : AO :: AK : AR$, ac proinde $AR = \frac{SA^2 \times AK}{SP^2}$; sed est $AL = \frac{1}{2}$ lateris Recti $= \frac{1}{2}L$, & $AK : AL :: SA : SP$, quare erit $\frac{L \times SA}{2\ AK} = SP$, & $SP^2 = \frac{L^2 \times SA^2}{4 AK^2}$, quare erit $AR = \frac{4 AK^3}{L^2}$; vel quoniam est, $AK = \frac{L \times SA}{2 SP}$, erit $AR = \frac{L \times SA^3}{2 SP^3}$.

Tab. 47. fig. 5. Atque ex his facillima oritur constructio, pro determinando Radio curvaturæ in quavis sectione Conica. Sit enim AK perpendicularis in sectionem occurrens axi in K, ex K super AK, erigatur perpendicularis HK, cum AS producta concurrens in H. Ex H erigatur super AH, perpendicularis HR, erit AR radius curvaturæ.

In parabola paulo simplicior adhuc evadit constructio. Nam quoniam ex natura parabolæ est $SA = SK$, & Angulus AKH rectus, erit S centrum circuli per AKH transeuntis, unde invenitur radius curvaturæ producendo SA in H, ut $SH = SA$, & in H erigendo perpendicularem HR; & R erit centrum circuli osculantis parabolam in A.

Tab. 47. fig. 3. Vis centripeta tendens ad focum sectionis Conicæ, in qua corpus movetur, est reciproce proportionalis quadrato distantiæ. Nam quoniam $AR = \frac{L \times SA^3}{2SP^3}$ erit $\frac{SA}{SP^3 \times AR} =$

SA

$\frac{SA \times 2SP^3}{SP^3 \times L \times SA^3} = \frac{2}{L \times SA^2}$ hoc est ob datam $\frac{2}{L}$ erit vis centripeta ut $\frac{1}{SA^2}$.

Sit Ellipsis BAD, quam tangit in A recta GE. Sintque SP per centrum Ellipsis & KA per contactum, transeuntes, perpendiculares in tangentem. Erit $SP \times KA$ = quartæ parti figuræ axis seu = quadrato semiaxis minoris = $BO \times DE$. Nam ob æquiangula triang. GBO, GLA, GAK, GPS & GDE,

$$SP : SG :: BO : GO$$
$$SG : DG :: BG : LG :: GO : GA$$
$$DG : DE :: GA : AK,$$

unde $SP : DE :: BO : AK$, & $SP \times AK = DE \times BO = \frac{1}{4} L \times SB$.

Hinc si Mobile moveatur in Ellipsi, vi centripeta tendente ad centrum Ellipsis, erit vis illa directe ut distantia; nam est $\frac{SP^3 \times 4AK^3}{L^3}$ = datæ quantitati. Quia est $SP \times AK$ quantitas data. Vis igitur, ut $\frac{SA}{SP^3 \times AR}$, erit, ut SA distantia.

In figura tertia Demissa ab altero umbilico F: in Tangentem perpendiculari FI. Ob æquiangula triangula SAP, FAI, TAB. 47. fig. 3. erit $SA : SP :: FA : FI = \frac{SP \times FA}{SA}$ unde erit $SP \times FI = \frac{SP^2 \times FA}{SA}$ = quadrato semiaxis minoris, unde si axis major vocetur b, minor autem $2d$, erit $SP^2 = \frac{d^2 SA}{b - SA}$ & $SP = \frac{d\sqrt{SA}}{\sqrt{b - SA}}$

 In

In Hyperbola autem est $SP = \frac{d\overline{SA}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{b+SA}}$

In Parabola est $SP = \sqrt{dSA}$, posito ejus latere recto $= 4d$.

Quoniam est $TA^2 : TO^2 :: AP^2 : SP^2 :: SA^2 - SP^2 : SP^2 :: SA^2 - \frac{d^2SA}{b-SA} : \frac{d^2SA}{b-SA} :: SA - \frac{d^2}{b-SA} : \frac{d^2}{b-SA} :: bSA - SA^2 - d^2 : d^2$, erit $\sqrt{bSA - SA^2 - d^2} : d :: TA : TO$, cumque sit $TA = S\dot{A}$, erit $TO = \frac{d\dot{SA}}{\sqrt{bSA - SA^2 - d^2}}$.

Tab 47. fig. 7. Sit jam QAO, Quælibet curva, cujus arcus minimus sit AO, tangentes in punctis A & O, AP, Op. Radius curvaturæ AR, perpendiculares in tangentes sint SP, Sp, erit $\frac{SA \times TA}{fP} = AR$. Nam ob æquiangula triangula est $fP : AO :: PA : RA$ & $AO : TA :: SA : PA$; unde ex æquo erit $fP : TA$ vel $S\dot{A} :: SA : RA$, est vero $fP = S\dot{P}$, quare erit $RA = \frac{SA \times S\dot{A}}{S\dot{P}}$

Hinc si distantia SA, in suam fluxionem ducatur, & dividatur per fluxionem perpendicularis, habebitur radius Curvaturæ; quo Theoremate facile determinatur curvatura in radialibus curvis. Ex. gr. Sit AQ, Spiralis nautica; quoniam angulus SAP datur, ratio quoque SA ad SP dabitur; sit illa ratio a ad b, erit $SP = \frac{bSA}{a}$ & $S\dot{P} = \frac{bS\dot{A}}{a}$ & $AR = \frac{SA \times S\dot{A}}{S\dot{P}} = \frac{aSA}{b}$, unde facile constabit, spiralis nauticæ evolutam esse eandem spiralem, in alia positione.

Quo-

Quoniam $AR = \frac{SA \times \dot{SA}}{\dot{SP}}$, erit $\frac{SA}{SP^3 \times AR} = \frac{\dot{SP}}{SP^3 \times \dot{SA}}$ atque hinc rursus, ex data relatione SA ad SP, facile invenietur lex vis centripetæ.

Exemplum. Sit VAB Ellipsis, cujus focus S, Axis major $VB = b$, axis minor $= 2d$, latus Rectum $= 2R$. Sitque VaQ alia curva, ita ad hanc relata, ut sit perpetuo angulus VSA angulo VSa proportionalis, & sit $Sa = SA$. Quæritur lex vis centripetæ tendentis ad S, qua corpus in curva VaQ moveri potest. Tab. 47. fig. 8.

Quoniam angulus VSA est ad VSa, in data ratione; horum angulorum incrementa erunt in eadem ratione, sitque ea ratio m ad n; unde erit $ot = \frac{n \times OT}{m}$.

Est autem $OT = \frac{d\dot{SA}}{\sqrt{bSA - SA^2 - d^2}}$ unde erit $ot = \frac{nd\dot{SA}}{m\sqrt{bSA - SA^2 - d^2}}$. Quoniam autem est $SA^2, SP^2 :: ta^2 + ot^2 : ot^2 :: SA^2 + \frac{n^2d^2\dot{SA}^2}{m^2 \times \overline{bSA - SA^2 - d^2}} : \frac{n^2d^2\dot{SA}^2}{m^2 \times \overline{bSA - SA^2 - d^2}}$

$:: 1 + \frac{n^2d^2}{m^2 \times \overline{bSA - SA^2 - d^2}} : \frac{n^2d^2}{m^2 \times \overline{bSA - SA^2 - d^2}}$

$:: m^2bSA - m^2SA^2 - m^2d^2 + n^2d^2 : n^2d^2$, unde erit $\sqrt{m^2bSA - m^2SA^2 - m^2d^2 + n^2d^2} : nd :: SA : SP$, & $SP = \frac{ndSA}{\sqrt{m^2bSA - m^2SA^2 - m^2d^2 + n^2d^2}}$.

Cujus ut habeatur fluxio pro $m^2bSA - m^2SA^2 - m^2d^2 +$

Ff ff n^2

$n^2 d^2$. Scribatur x & erit $SP = \frac{n d\, SA}{\sqrt{x}}$, & $SP^3 = \frac{n^3 d^3\, SA^3}{x^{\frac{3}{2}}}$; & est $\dot{x} = m^2 b\, S\dot{A} - 2m^2\, SA \times S\dot{A}$, & $S\dot{P} = nd\, S\dot{A} \times x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{n\, ASA\, \dot{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$, & reducendo partes ad eundem denominatorem; erit $S\dot{P} = \frac{nd\, S\dot{A}\, x - \frac{1}{2} n d\, SA\, \dot{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Et in numeratore loco, x & $\dot{x}$, ponendo ipsorum valores, & ordinando fit $S\dot{P} = \frac{nd\, S\dot{A} \times \frac{1}{2} m^2 b\, SA - m^2 d^2 + n^2 d^2}{x^{\frac{3}{2}}}$, unde erit $\frac{S\dot{P}}{SP^3 \times S\dot{A}} = \frac{\frac{1}{2} m^2 b\, SA - m^2 d^2 + n^2 d^2}{n^2 d^2\, SA^3}$. Sed est $\frac{\dot{P}}{SP^3 \times S\dot{A}}$, ut vis centripeta, quare erit vis, ut $\frac{\frac{1}{2} m^2 b\, SA - m^2 d^2 + n^2 d^2}{n^2 d^2\, SA^3}$ vel ob datam n^2 d^2 in denominatore erit vis, ut $\frac{\frac{1}{2} m^2 b\, SA - m^2 d^2 + n^2 d^2}{SA^3}$, vel loco d^2 ponendo $\frac{bR}{2}$, erit vis ut $\frac{\frac{1}{2} m^2 b\, SA^2 - \frac{1}{2} m b R + \frac{1}{2} n^2 b R}{SA^3}$, seu ob datam $\frac{b}{2}$, ut $\frac{A^3 m^2 SA - R m^2 + R n^2}{SA^3} = \frac{m^2}{SA^2} + \frac{R n^2 - R m^2}{SA^3}$. Quae omnia exacte coincidunt cum iis, quae à Domino Newtono de vi centripeta corporis in eadem curva moti, traduntur, in *Prop 44. Princip.*

Quoniam vis centripeta tendens ad punctum S, qua urgente corpus in curva moveri potest, est semper, ut

SP

$\frac{S\dot{P}}{SP^3 \times S\dot{A}}$; hinc ex data lege vis centripetæ, inveniri potest relatio SA ad SP, ac proinde per methodum tangentium inversam, exhiberi potest curva, quæ data vi centripeta describi possit. Sit v. g. vis reciproce ut distantiæ Dignitas quælibet m, hoc est, sit $\frac{S\dot{P}}{SP^3 \times S\dot{A}} = \frac{b}{a^2 SA^m}$, erit $\frac{S\dot{P}}{SP^3} = \frac{b\,S\dot{A}}{a^2 SA^m}$, & capiendo harum fluxionum fluentes; erit

$$\tfrac{1}{2}\,SP^{-2} = \frac{b\,SA^{1-m} + e}{\overline{m-1} \times a^2},$$ unde erit $$\frac{\frac{m-1}{2} \times a^2}{b\,SA^{1-m} + e} = SP^2,$$

& multiplicando tam numeratorem, quam denominatorem fractionis, per SA^{m-1}; & loco $\frac{m-1}{2}\,a^2$ ponendo d^2, fit $\frac{d^2\,SA^{m-1}}{b + e\,SA^{m-1}} = SP^2$; quare erit $SP = \frac{d\sqrt{SA^{m-1}}}{\sqrt{b + e\,SA^{m-1}}}$.

Quod si quantitas constans e sit nihilo, æqualis erit $SP = \frac{d\sqrt{SA^{m-1}}}{\sqrt{b}}$.

Adeoque, si vis reciproce, ut distantiæ quadratum, poni potest $SP = \frac{\sqrt{d^2 SA}}{\sqrt{b}}$, & curva erit parabola, cujus latus rectum est $\frac{4d^2}{b}$, vel potest esse $SP = d \times \frac{\sqrt{SA}}{\sqrt{b - SA}}$, & curva erit Ellipsis; vel denique potest esse $SP = d \times \frac{SA}{\sqrt{b + SA}}$, & curva evadit Hyperbola.

Si vis sit reciproce ut distantiæ cubus supponi potest, ut SP sit $= \frac{d SA}{b}$, & curva sit spiralis nautica, vel fieri potest, ut sit $SP = \frac{d SA}{\sqrt{b - e SA^2}}$, & curva erit eadem cum ea, cujus constructionem à sectore hyperbolæ petit Dominus Newtonus; vel potest esse $SP = \frac{d SA}{\sqrt{b + e SA^2}}$, & ejus curvæ constructionem per sectores Ellipticos tradit idem Newtonus. *Cor*. 3. *Prop*. 41. *lib*. 1. *Princip*.

Si vis centripeta sit reciproce ut distantia; relatio inter SA & SP, æquatione Algebraica definiri nequit, Curva tamen per Logarhythmicam vel per quadraturam Hyperbolæ construitur, fit enim $SP = \frac{d}{\sqrt{b - L.SA}}$, ubi L. SA designat Logarythmum ipsius SA.

Haec omnia sequuntur ex celebratissima nunc dierum Fluxionum Arithmetica, quam sine omni dubio primus invenit Dominus *Newtonus*, ut, cuilibet ejus Epistolas à *Wallisio* editas legenti, facile constabit, eadem tamen Arithmetica postea mutatis nomine & notationis modo, à Domino *Leibnitio* in Actis Eruditorum edita est.

TAB. 47. fig. 1. Moveatur jam corpus in curva QAO, urgente vi centripeta tendente ad S; & celeritas corporis in A dicatur C; celeritas autem qua corpus, urgente eadem vi centripeta, in eadem distantia, in circulo moveri potest, dicatur *c*. Constat ex Theoremate primo, quod si SA exponat vim centripetam tendentem ad S; vis centripeta tendens ad R, qua urgente, corpus cum celeritate C, circulum cujus radius est AR describet; per SP exponetur. Corporum autem circulos describentium, vires centripetæ sunt, ut velocitatum quadrata ad circulorum radios applicata, quare erit SP:

$SP : SA :: \frac{C^2}{AR} : \frac{c^2}{SA}$, unde erit $SP \times AR : SA^2 :: C^2 : c^2$ & $C : c :: \sqrt{SP \times AR} : SA$.

Si SP cum SA coincidat, ut fit in figurarum verticibus erit $C : c :: \sqrt{AR} : \sqrt{SA}$. Quod si curva sit sectio conica AR, radius curvaturae in ejus vertice est aequalis dimidio lateris recti $= \frac{1}{2} L$, ac proinde erit velocitas corporis in vertice sectionis, ad velocitatem corporis in eadem distantia circulum describentis, in dimidiata ratione lateris recti, ad distantiam illam duplicatam.

Quoniam est $AR = \frac{SA \times S\dot{A}}{S\dot{P}}$, erit $C^2 : c^2 :: \frac{SP \times SA \times S\dot{A}}{S\dot{P}} : SA^2 :: \frac{SP \times S\dot{A}}{S\dot{P}} : SA :: SP \times S\dot{A} : SA \times S\dot{P}$, adeoque ex data relatione SP ad SA, dabitur ratio C ad c, Ex. Grat. Si vis sit reciproce ut distantiae dignitas m, hoc est, sit $\frac{S\dot{P}}{SP^3 \times S\dot{A}} = \frac{b}{a^2 SA^m}$; & erit $S\dot{P} = \frac{b SP^3 \times S\dot{A}}{a^2 SA^m}$, adeoque erit $C^2 : c^2 :: SP \times S\dot{A} : \frac{b SP^3 \times SA \times S\dot{A}}{a^2 SA^m} :: a^2 SA^{m-1} : b SP^2$. Unde si ponatur $SP^2 = \frac{a^2 SA^{m-1}}{b} = \frac{\frac{m-1}{2} a^2 SA^{m-1}}{b}$, erit $C^2 : c^2 :: a^2 SA^{m-1} : \frac{m-1}{2} a^2 SA^{m-1} :: 2 : m-1$ ac proinde erit $C : c :: \sqrt{2} : \sqrt{m-1}$.

Quod si ponatur $SP^2 = \frac{a^2 SA^{m-1}}{b \pm e SA^{m-1}} = \frac{\frac{m-1}{2} a^2 SA^{m-1}}{b \pm e SA^{m-1}}$

 fiet

fiet C^2 ad c^2, ut $a^2 SA^{m-1}$ ad $\frac{\frac{m-1}{2} a^2 b SA^{m-1}}{b - eSA^{m-1}}$, hoc est ut $b - eSA^{m-1}$ ad $\frac{m-1}{2} b$, sed est ratio $b - eSA^{m-1}$, ad $\frac{m-1}{2} \times b$, minor ratione b ad $\frac{m-1}{2} b$, seu ratione 2 ad $m-1$, unde erit C ad c in minore ratione quam est $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{m-1}$.

Similiter, si capiatur $SP = \frac{a^2 SA^{m-1}}{b + eSA^{m-1}}$, invenietur esse C ad c in majore ratione quam est $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{m-1}$.

Cor. Si corpus in parabola moveatur, & vis centripeta tendat ad focum S, erit velocitas corporis, ad velocitatem corporis in eadem distantia, circulum describentis ubique ut $\sqrt{2}$ ad 1, nam in eo casu est $m = 2$ & $m - 1 = 1$. Velocitas corporis in Ellipsi est ad velocitatem corporis, in circulo ad eandem distantiam moti, in minore ratione quam $\sqrt{2}$ ad 1. Velocitas in Hyperbola est ad velocitatem in circulo in majore ratione, quam $\sqrt{2}$ ad 1.

Si corpus in spirali nautica deferatur, est ejus velocitas ubique æqualis velocitati corporis in eadem distantia circulum describentis nam in eo casu est $m = 3$ & $m - 1 = 2$.

PRO-

PROBLEMA.

Posito quod vis centripeta (cujus quantitas absoluta nota est,) sit reciproce, ut distantiæ quadratum & projiciatur corpus secundum datam rectam cum data velocitate: Invenire curvam in qua movetur corpus.

Projiciatur corpus secundum datam rectam AB, cum data velocitate C. Et quoniam quantitas absoluta vis centripetæ nota est, dabitur inde velocitas qua corpus possit circulum ad distantiam SA describere urgente eadem vi; est enim æqualis ei quæ acquiritur, dum corpus vi illâ uniformiter applicata urgente, cadit per $\frac{1}{2}$ SA. Sit illa velocitas c. Ex A in AB, erigatur perpendicularis AK, & in ea capiatur AR, quarta proportionalis ipsis c^2 C^2 & $\frac{SA^2}{SP}$ & erit AR, radius curvaturæ in A. Ex R in AS demittatur perpendicularis RH & ex H in AR perpendicularis HK, & ducta recta SK, dabit axis positionem; Fiat angulus FAK = angulo SAK. Et si FA sit ad SK parallela, figura in qua movetur corpus erit parabola. Si autem axi SK occurrat in F; & puncta S & F, cadant ad eandem partem puncti K, figura erit Hyperbola; sin ad contrarias partes cadant puncta S & F, erit figura Ellipsis, unde focis S & F & axe = SA + FA describetur sectio, in qua corpus movebitur. Tab. 47. fig. 9.

JOAN-

JOHANNIS KEILII,

M. D. & in Academia Oxoniensi *Astronomiæ Professoris* Saviliani, *Observationes in ea, quæ edidit celeberrimus Geometra*

JOANNES BERNOULLI,

In Commentariis Physico-Mathematicis Parisiensibus *Anno* 1710. *de inverso Problemate virium Centripetarum. Et ejusdem Problematis solutio nova.*

Nobilissimum est problema data lege vis centripetæ invenire Curvam quam describit Mobile, de loco dato, secundum datam rectam, & cum data velocitate egrediens: concessis figurarum curvilinearum quadraturis, ejus solutionem perfectam olim dedit Dominus Newtonus in principiis Philosophiæ Mathematicis. Hoc ipsum problema denuo aggressus est vir clarissimus & Geometra celeberrimus Dominus Joannes Bernoulli in Academia Basiliensi Matheseos Professor *. qui non pauca eaque egregia ingenii sui specimina jam pridem edidit, quibus Geometriam reconditiorem non parum ditavit. Unde à tanti viri acumine novam pulchramque Problematis solvendi methodum expectabam. Gestiebam itaque solutionem Bernoullianam perlegere, & cum Newtoniana comparare; quibus tandem diligentius perlectis & examinatis, hæc quæ sequuntur annotavi.

* Vide Commentarios Physico-Mathematicos Parisienses Anno 1710.

Dominus Bernoulli eandem præmittit propositionem quam Newtonus problemati demonstrando prius adhibuit: estque ea in Principiis XL, non minus pulchra quam demonstratu facilis. Scilicet.

Si corpus cogente vi quacunque centripeta moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque

eorum

eorum velocitates, in aliquo æqualium altitudinum casu, æquales; velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Hujus propositionis Demonstrationem Newtonianam, ait Bernoullius, esse nimis implicatam, & suam, quam simpliciorem vocat, ejus loco substituit. At pace tanti viri liceat mihi dicere, si quid discriminis sit inter demonstrationem Bernoullianam & Newtonianam, id in eo situm est, quod hæc multo facilior esse videtur minusque perplexa quam illa. Nam si centro C describantur circuli DI, EK, quorum intervallum DE est quam minimum, sintque corporum in D & I velocitates æquales, & ab N ad IK demittatur perpendiculum NT, fuse ostendit Newtonus vim acceleratricem secundum DE, esse ad vim acceleratricem secundum IK, ut IN ad IT. Nimirum si vis secundum DE vel IN exponatur per rectas DE vel IN, vis illa secundum IN resolvitur in duas IT, TN, quarum illa solum, quæ est ut IT, motum secundum directionem IK accelerat: accelerationes autem seu velocitatum incrementa sunt ut vires & tempora quibus generantur conjunctim. At tempora ob æquales velocitates in D & I, sunt ut viæ descriptæ DE, IK; quare accelerationes in decursu corporum per lineas DE & IK, sunt ut DE ad IT & DE ad IK conjunctim; i. e. ut DE quad. quod est IN quad. ad rectangulum IT × IK. adeoque ob IN quad. = IT × IK, incrementa velocitatum sunt æqualia: æquales igitur sunt velocitates in E & K, & eodem argumento semper reperientur æquales in æqualibus distantiis. Hæc est summa demonstrationis Newtoni, quæ tam dilucide ab eo exponitur, ut inter propositiones elementares paucas faciliores invenies. At non sic procedit Dominus Bernoullius, sed illi sufficit dicere, Mechanicam ostendere vim secundum DE esse ad vim secundum IK, ut IK ad DE. Mechanicam etiam ostendere incrementa velocitatum esse in ratione virium & temporum conjunctim; & initio motus positis velocitatibus æqualibus tempora sunt, ut viæ descriptæ DE, IK; & hinc, (argumento prorsus simili ei quo utitur Newtonus) Tab. 46. fig. 1.

Gg gg con-

concludit incrementum velocitatis, quod acquirit corpus dum describit IK, esse ad incrementum velocitatis dum describitur DE, ut DE × IK ad IK × DE, & proinde velocitatum incrementa ubique in distantiis æqualibus esse æqualia.

At si tironibus facilem voluisset tradere demonstrationem, debuisset propositionem Mechanicam citare, eamque ad præsentem casum accommodare. Et quidem pluribus verbis opus est, ut hoc fiat per theorema quod innuere videtur, in quo agitur de descensu Gravium in planis inclinatis: nullum enim est hic planum datum, quod recto corporum descensui obstat; imo tantum abest ut corpus à plano cohibeatur, ut è contra à plano seu Tangente per vim quandam continuo retrahitur. Procul dubio igitur manifesta magis foret ejus ratiocinii vis, si dimissis Mechanicæ propositionibus, rem omnem ex propriis principiis demonstrasset, uti fecit Newtonus. Nam resolvendo triang. rectang. KNI in duo triangula æquiangula, est KI ad IN ut IN ad IT, adeoque loco rationis IN ad IT ponere potuisset rationem KI ad IN vel ad DE.

Si de loco quovis A in recta AC cadat corpus, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG vi centripetæ proportionalis, sitque BFG linea curva, quam punctum G perpetuo tangit; demonstrat Newtonus velocitatem corporis in loco quovis E esse ut areæ curvilineæ ABGE latus quadratum. Adeoque si velocitas dicatur v, erit v^2*, ut area ABGE: & si P sit altitudo maxima, ad quam corpus in Trajectoria revolvens, deque quovis ejus puncto eâ, quam ibi habet, velocitate sursum projectum ascendere possit: sitque quantitas A distantia corporis à centro, in alio quovis orbitæ puncto; & vis centripeta sit semper ut ipsius A dignitas quælibet, scil. ut A^{n-1}, velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{nP^n - nA^n}$.

* Vide Propos. 39. & 40. Principiorum.

Similiter Dominus Bernoullius ostendit, si distantia à centro dicatur x, velocitas v & vis centripeta ϕ, esse $v = \sqrt{ab - \int \phi x}$: ubi ex Quadraturis constat esse aream ABGE

$= ab$

$= ab - \int \phi x$. Perinde itaque eſt, ſive exprimatur quadratum Velocitatis per aream ABGE, ſive per quantitatem huic æqualem $ab - \int \phi x$. Et ſi vis centripeta ϕ ſit ut $n A^{n-1}$ ſeu $n x^{n-1}$, fit $ab = P^n$ & $\int \phi x = A^n$, adeoque $ab - \int \phi x$ eſt, ut quantitas $P^n - A^n$.

Deſcribat corpus curvam VK, vi centripeta tendente ad C, deturque circulus VXY, centro C intervallo quovis CV deſcriptus. Q ſit quantitas conſtans, atque $\frac{Q}{A} = z$. Sitque Kl elementum Curvæ; IN vel DE elementum altitudinis, XY elementum arcus: demonſtrat Newtonus Elementum arcus ſeu XY exprimi poſſe per hanc formulam $\frac{Q \times IN \times CX}{AA\sqrt{ABGE - z^2}}$. Similiter ex præmiſſis Dominus Bernoullius, poſito Arcu UX $= z$, & altitudine ſeu diſtantia $= x$, elementum arcus ad hanc reducit formulam ſcil. $z = \frac{a^2 c x}{\sqrt{abx^4 - x^4\int\phi x - a^2c^2x^2}}$. Et primo quidem aſpectu videbatur formula Newtoniana quodammodo ſimplicior Bernoullianâ, eo quod paucioribus conſtat terminis; at re diligentius explorata, vidi Bernoullianam formulam omnino cum Newtoniana coincidere; nec niſi in notatione quantitatum ab ea differre. Nam ſi pro $ab - \int\phi x$ ponatur ABGE, pro ac ponatur Q, & x pro A, a pro CX, & x pro IN, fit

$$\frac{a^2 c x}{\sqrt{abx^4 - x^4\int\phi x - a^2c^2x^2}} = \frac{Q \times CX \times IN}{\sqrt{A^4 \times ABGE - \frac{Q^2 A^4}{A^2}}} =$$

$\frac{Q \times CX \times IN}{AA\sqrt{ABGE - \frac{Q^2}{A^2}}}$ ſeu ponendo z^2 loco $\frac{Q^2}{A^2}$, (quod facit

 New-

Newtonus commodioris notationis gratia,) Formula Bernoulliana evadit $\frac{Q \times CX \times IN}{A^2 \sqrt{ABGE - z^2}}$. unde constat formulam illam non magis à Newtoniana discrepare, quam verba latinis literis expressa differunt ab iisdem verbis scriptis in Graecis characteribus.

Post traditam generalem formulam; descendit Dominus Bernoullius ad casum particularem, ubi vis centripeta est reciproce ut quadratum distantiæ; & per varias reductiones & operationes satis molestas, constructionem ostendit curvarum quæ urgente ea vi centripeta describi possunt, easque ad æquationes reducendo probat esse sectiones conicas. Deinde queritur Dominum Newtonum supponere sine demonstratione curvas à tali vi descriptas esse sectiones conicas.

Impossibile est, ut credat nullam Newtono notam fuisse hujus rei demonstrationem; noverat enim, eum primum & solum fuisse, qui hanc omnem de vi centripeta doctrinam geometrice tractavit, quique eam ad tantam perfectionem perduxit, ut post plures quam viginti annos, parum admodum à præstantissimis Geometris ei additum sit. Noverat etiam Bernoullius Newtonum, præter generalem problematis inversi solutionem, ostendisse modum quo formari possunt curvæ, quæ vi centripeta decrescente in triplicata distantiæ ratione describuntur, adeoque alterum illum casum ignorare non potuisse. Nec profecto intelligo, qua ratione Bernoullius Newtono objiciat, eum hujus casus demonstrationem prætermisisse; cum ipse non pauca sæpius proposuit Theoremata, quorum demonstrationes nusquam dedit; & quidni liceat Newtono ad alia festinanti hoc idem facere? Interim in nova *Principiorum* editione, facilior multo & magis clara, licet tribus verbis extat hujus rei demonstratio, quam est Bernoulliana.

Tandem Bernoullius, ut necessitatem suæ demonstrationis inversi problematis in hoc particulari casu ostendat, hæc addit. Considerandum est, inquit, quod vis, quæ facit, ut cor-

corpus in spirali logarithmica moveatur, debet esse reciproce, ut cubus distantiæ à centro; at non inde sequitur talibus viribus semper describi debere tales curvas, cum similes etiam vires facere possunt, ut corpus in spirali hyperbolica moveatur.

Miror sane, quod vir Cl. suspicetur Newtonum talem unquam duxisse consequentiam. Nam praeter spiralem logarithmicam, ostendit Newtonus, qua ratione aliæ curvæ, numero infinitæ & diversæ, formari possunt, quæ omnes describantur eadem vi centripeta, qua Spiralis logarithmica; interque eas reponi debet hæc ipsa Spiralis hyperbolica, ut in sequentibus ostendemus.

Exinde autem concludit Newtonus sectiones tantum conicas necessario describi debere per vim centripetam quadrato distantiæ reciprocè proportionalem: nempe quod curvatura orbitæ cujuscunque, ex datis velocitate, vi centripeta, & positione Tangentis, datur; datis autem umbilico, puncto contactus & positione tangentis, semper describi possit sectio conica, quæ curvaturam illam datam habeat. Hoc à me prius ostensum est in actis philosophicis Londinensibus Anno 1708*. In hac igitur sectione, urgente illa vi, corpus movebitur, & in nulla alia; cum corpus de eodem loco, secundum eandem directionem, eadem cum velocitate, & urgente eadem vi centripeta exiens, non possit diversas semitas describere.

* Vide supra p. 597.

Liceat jam mihi Dominum Bernoullium imitari, & inversum de vi centripeta problema longe diversa methodo resolvere, & ad casum particularem applicare; ubi scil. vis est reciproce, ut cubus distantiæ, simulque ostendere demonstrationem *Cor. 3. prop. 41. Principiorum Newtoni.*

Quod ut fiat, quædam ex iis quæ in Actis Philosophicis N°. 317. exposui*, hic præmittenda sunt.

* Vide supra pag. 585. & seq.

Sit VIL curva quævis, quam corpus urgente vi centripeta ad centrum C tendente describit: hanc curvam in duobus punctis infinite vicinis I & K tangant recte IP, Kp, ad quas e centro demittantur perpendiculares CP, Cf; centro item C describantur KE, ID, & ducatur CI.

TAB. 46. *fig.* 2.

Erit vis centripeta ut Quantitas $\frac{Pp}{PC^3 \times IN}$ quod Theorema licet in prædicto loco demonstravimus, ecce aliam ejus demonstrationem. Ex K ducantur Km ad CP & Kn ad CI parallelæ. Et ob æquiangula triangula ICP, IKN, nKm, itemque ob IKm & IpP æquiangula. Erit

Ip vel $IP : IK :: pP : Km$.

$PC : IP :: Km : mn$

$IN : IK :: mn : nK$ unde ex æquo fiet

$PC \times IN : IK^2 :: pP : nK$, & erit $nK = \frac{pP \times IK^2}{PC \times IN}$. Præterea tempus quo describitur arcus IK est ut area seu triangulum ICK, vel ejus duplum $PC \times IK$; adeoque si tempus detur erit $PC \times IK$ quantitas constans. Dato autem tempore, vis centripeta est ut lineola Kn, quæ sub urgente vi illa describitur, adeoque vis centripeta est ut lineola illa Kn ducta in quantitatem constantem $\frac{1}{PC^2 \times IK^2}$, hoc est, erit vis centripeta ut $\frac{1}{PC^2 \times IK^2} \times \frac{Pp \times IK^2}{PC \times IN}$, seu ut quantitas $\frac{Pp}{PC^3 \times IN}$. Quod erat demonstrandum.

Velocitas corporis in quovis loco est ut via in minimo quovis tempore percursa directe, & ut tempus illud inverse; adeoque & ut $IK \times \frac{1}{PC \times IK}$ hoc est, velocitas erit reciproce ut perpendicularis è centro in Tangentem.

Si distantia corporis à centro dicatur x, & perpendicularis in tangentem p, erit $IN = x$ & $Pp = p$ & vis centripeta ex-

po-

poni potest per quantitatem $\frac{f^4\dot{p}}{p^3\dot{x}}$, assumendo quantitatem quamlibet pro f^4.

Adeoque si cum Domino Bernoullio vim centripetam nominemus ϕ, erit $\frac{f^4\dot{p}}{p^3\dot{x}} = \phi$ & $\frac{f^4\dot{p}}{p^3} = \dot{x}\phi$; & capiendo harum quantitatum fluentes erit $\frac{f^4}{2p^2}$ = fluenti quantitâtis $\dot{x}\phi$.

At cum velocitas corporis sit reciprocè, ut perpendicularis p, ejus quadratum exponi potest per $\frac{f^4}{2p^2}$. Si itaque velocitas dicatur v, erit $v^2 = \frac{f^4}{2p^2}$ = fluenti quantitatis $\dot{x}\phi$: Quod si A sit locus, de quo cadere debet corpus, ut acquirat in D vel I velocitatem v, deque loco corporis D erigatur perpendicularis D F = ϕ erit rectangulum DE $\times$ DF = $\dot{x}\phi$. Sit jam B F G linea curva, cujus ordinatæ exponant vires centripetas, seu quantitates ϕ. Fluens quantitatis $\dot{x}\phi$ erit area curvilinea ABFD = $v^2 = \frac{f^4}{2p^2}$, adeoque erit v ut areæ ABFD latus quadratum. Quod si velocitas ea sit quæ ab infinita distantia cadendo acquiritur, erit v^2 seu fluens ipsius $\dot{x}\phi$ æquale areæ o DFO indefinite protensæ.

Hinc semper dabitur quantitas p in terminis finitis, quando area illa curvilinea terminis finitis exponi potest. Sit, verbi gratia, vis centripeta reciprocè ut distantiæ dignitas m, hoc est, sit $\dot{x}\phi = \frac{g\dot{x}}{x^m}$, si velocitas corporis sit ea quæ acquiquiritur cadendo ab infinita distantia, erit $v^2 = \frac{g}{m-1 \times x^{m-1}} = \frac{f^4}{2p^2}$ & in hisce omnibus casibus area indefinite protensa est quantitas finita. Potest autem corpus in trajectoria revolvi velocitate cujus quadratum vel majus fieri potest, vel minus quantitate $\frac{g}{m-1\, x^{m-1}}$, vel huic æquale. Adeoque erit

$$v^2 = \frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{m-1\, x^{m-1}} \pm e^2.$$

Hinc urgentibus his viribus, tria curvarum genera describi possunt; prout e^2 est quantitas positiva, vel negativa, vel nulla.

V. G. Si velocitas major sit ea quæ acquiritur ab infinita distantia cadendo, fit $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{m-1\, x^{m-1}} + e^2$: si velocitas sit minor erit $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{m-1\, x^{m-1}} - e^2$: si æqualis, erit

$$\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{m-1\, x^{m-1}}.$$

Sit $\frac{1}{2} f^4 = a^2 e^2$ & $\frac{1}{m-1} \times g = b^2 e^2$. Et si velocitas corporis sit ea quæ ab infinito cadendo acquiritur, erit $p^2 = \frac{a^2 x^{m-1}}{b^2}$ seu $p = \frac{a x^{\frac{m-1}{2}}}{b}$.

At si velocitas major sit aut minor hac velocitate, fiet ut ostensum est $\frac{f^4}{2p^2} = \frac{g}{m-1\, x^{m-1}} \pm e^2 = \frac{\frac{1}{m-1} g \pm e^2 x^{m-1}}{x^{m-1}}$.

Unde

Unde pro $: f^4$ & $\frac{g}{m-1}$ ponendo earum valores $a^2 e^2$ & $b^2 e^2$; erit $\frac{a^2 e^2}{p^2} = \frac{b^2 e^2 \pm e^2 x^{m-1}}{x^{m-1}}$ seu $\frac{a^2}{p^2} = \frac{b^2 \pm x^{m-1}}{x^{m-1}}$, & fiet $p^2 = \frac{a^2 x^{m-1}}{b^2 \pm x^{m-1}}$.

Adeoque si vis centripeta sit reciproce ut cubus distantiæ; hoc est, si sit $m=3$ & $m-1=2$. Erit $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2}$, vel $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2+x^2}$, vel denique $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 - x^2}$.

In primo casu constat curvam esse spiralem logarithmicam: nam sit $p = \frac{ax}{b}$, & $b : a :: x : p$. adeoque ob constantem rationem b ad a, erit angulus CIP ubique constans.

Ponamus jam esse $p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 + x^2}$ & ex hac suppositione tres oriuntur diversæ curvarum species, prout a major est quam b, aut ei æqualis, aut minor.

Et primo sit a major quam b. Centro C & ad distantiam quamvis datam describatur circulus HYX, cui rectæ CK, CI productæ occurrant in Y & X. Et est $IN^2 : KN^2 :: IP^2 : PC^2$ & ita $CI^2 - PC^2 : PC^2 :: x^2 - p^2 : p^2 :: x^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2+x^2} : \frac{a^2 x^2}{b^2+x^2} :: 1 - \frac{a^2}{b^2+x^2} : \frac{a^2}{b^2+x^2} :: b^2 + x^2 - a^2 : a^2$. Tab. 46. fig. 3.

Quare erit $\sqrt{x^2 + b^2 - a^2} : a :: IN : KN :: x : \frac{ax}{\sqrt{x^2 + b^2 - a^2}} = KN$. Et quoniam est a major quam b, erit $b^2 - a^2$ quanti-

Hh hh tas

tas negativa. Sit illa $-c^2$, unde fit $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2-c^2}}$: Dicatur b radius circuli HY, & est $CK:KN::CY:YX$ hoc est $x:\frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2-c^2}}::b:\frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{x^2-c^2}} = YX = \dot{y}$, si arcus HY vocetur y. Sit $x = \frac{c^2}{z}$ unde $\dot{x} = \frac{c^2\dot{z}}{z^2}$ & $\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\dot{z}}{z}$. Item erit $x^2 - c^2 = \frac{c^4}{z^2} - c^2 = \frac{c^4 - c^2z^2}{z^2} = \frac{c^2}{z^2} \times \overline{c^2 - z^2}$: unde $\sqrt{x^2-c^2} = \frac{c}{z} \times \sqrt{c^2-z^2}$: quibus valoribus substitutis, erit $\frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{-ba\dot{z}}{c\sqrt{c^2-z^2}}$. Sit $a:c::n:1$. hoc est, sit $a = nc$, & fiet XY seu $\dot{y} = \frac{nb\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$: Est vero $\frac{nb\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ad $\frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ut nb ad c; hoc est in ratione data: adeoque earum fluentes, si simul incipiunt, erunt in eadem ratione, hoc est erit HY seu y ad fluentem quantitatis $\frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ ut nb ad c.

Quod si centro C radio $CV = c$ describatur circulus VL, & CG sit $= z$, & $no = \dot{z}$, fiet arcus $mn = \frac{c\dot{z}}{\sqrt{c^2-z^2}}$ fluxioni arcus Qm, quando fluxio est quantitas positiva: sed quan-

quando eſt negativa, ejus fluens eſt arcus V m prioris complementum. Arcus enim ejuſque complementum eandem habent quantitatem fluxionem denotantem, diverſis tantum ſignis affectam; quia creſcente uno decreſcit alter.

Hinc eſt HY ad V m ut $n\,b$ ad c: ſed eſt CV ad CH ut V e: HY, hoc eſt $c : b :: \mathrm{V}e : \frac{b \times \mathrm{V}e}{c} = \mathrm{HY}$, quare erit $\frac{b \times \mathrm{V}e}{c} : \mathrm{V}m :: n\,b : c$, unde $\mathrm{V}e : \mathrm{V}m :: n : 1$.

Præterea ex natura circuli erit $\mathrm{CG} : \mathrm{CV} :: \mathrm{CV} : \mathrm{CT}$, quando mT circulum tangit: hoc eſt erit $z : c :: c : \frac{c^2}{z} = \mathrm{CT} = x$. Hinc ſi capiatur angulus VCe ad angulum VCm ut n ad 1. & producatur Ce ad K ut ſit CK = ſecanti CT, erit K punctum in curva quæſita.

Hic obiter notandum eſt, ſi n ſit numerus, hoc eſt ſi ſit a ad c vel a ad $\sqrt{a^2 - b^2}$ ut numerus ad numerum, curva VI fiet Algebraica: nam in hoc caſu relatio mG ad ſinum anguli VCe æquatione definitur, & inde habebitur relatio ſinus anguli VCe ad CT vel CK per æquationem determinatam, & inde demum dabitur æquatio quæ exprimet relationem inter ordinatam & interceptam à puncto C incipientem. Harum curvarum ordines & gradus in ſcala æquationum Algebraica diverſi erunt pro magnitudine numeri n. In his omnibus curvis ſic deſcriptis Aſymptoti poſitio hac ratione determinatur: fiat angulus VCL ad rectum angulum ut n ad 1. In eo angulo diſtantia corporis à centro evadit infinita. Jam quad. perpendicularis in Tangentem $\mathrm{PC} = \frac{a^2\,x^2}{b^2 + x^2}$, ubi x eſt infinita, fit $\mathrm{PC}^2 = \frac{a^2\,x^2}{x^2}$, ſeu $\mathrm{PC} = a$. Ducatur itaque CR ad CL perpendicularis & æqualis rectæ a, & si per R ducatur RS rectæ CL parallela, hæc curvam tanget ad infinitam distantiam, seu erit curvæ Asymptotos.

Si corpus in quavis harum curvarum descendendo, ad Apsidem imam pervenerit; hinc rursus ascendet in infinitum, & aliam curvam priori similem, seu potius ejusdem curvæ similem portionem, ascendendo describet.

Curvæ hæ possunt pluribus revolutionibus circa centrum torqueri, priusquam ad asymptoton convergere incipiant, & motus angularis rectæ CK erit æqualis totidem rectis quot numerus n constat unitatibus. v. g. si n sit 100, perficientur viginti quinque integræ revolutiones, priusquam distantia à centro evadat infinita.

Aucto numero n, eadem manente a, minuitur c: est enim $\frac{a}{n} = c$ & $\frac{a^2}{n^2} = c^2 = a^2 - b^2$, unde fiet $\overline{n^2 - 1} \times a^2 = n^2 b^2$. Et proinde fiet $a^2 : b^2 :: n^2 : n^2 - 1$; adeoque si b^2 ad æqualitatem accedat ipsius a^2, perveniet quoque $n^2 - 1$ ad rationem æqualitatis cum n^2, & proinde augebitur n & in eadem ratione minuetur c. Ponatur itaque esse b^2 fere æquale ipsi a^2; adeo ut cum differentia sit infinite parva, fiat n numerus infinite magnus, & radius circuli c fiet infinite parvus, seu circulus in suum centrum contrahetur. At sic evanescente c, non pariter evanescit CT, si angulus VCm sit propemodum rectus: nam in omni circulo, etiam minimo, secans anguli recti est quantitas infinita. Curva itaque hæc, ob n numerum infinitum, infinitis numero revolutionibus centrum ambibit, priusquam ad Asymptoton convergere incipiet.

Evanescente autem c fit $b = a$ & $p = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Et quoniam in omni casu est $y = \frac{bax}{x\sqrt{x^2 + c^2}}$, evanescente c fiet y

=

$= \frac{b a \dot{x}}{x^2}$, unde capiendo fluentes fiet $y = \frac{ba}{x}$ seu $xy = ba$ = datæ quantitati.

Hæc curva est Spiralis Hyperbolica, quæ plures habet notabiles proprietates. Si ducatur radius quilibet CIY curvæ occurrens in I, & peripheriæ circuli in Y, & ex C ad CI excitetur perpendicularis CT, atque IT tangat curvam in I, & rectæ CT occurrat in T: erit CT constans recta, æqualis scil. arcui VE; qua proprietate logarithmicam æmulatur, cum CT curvæ subtangens dici possit. Sit enim Radius circuli CE $= b$, arcus VE $= a$, dicatur CI x & VY sit y. Quia est $ba = x \times y$ erit $\frac{ba}{x} = y$ & $\frac{ba\dot{x}}{x^2} = \dot{y}$. Porro est CY:CI :: YX:NK hoc est $b : x :: \frac{ba\dot{x}}{x^2}$:NK: quæ proinde est $\frac{a\dot{x}}{x}$. Et quoniam est IN:NK::CI:CT. hoc est $\dot{x} : \frac{a\dot{x}}{x} :: x$:CT, erit CT $= a$. TAB 46. fig. 4.

Si centro C, intervallo quovis CG, describatur circuli arcus GF, hic arcus inter rectam CV & curvam interceptus erit semper æqualis constanti rectæ CT vel a. Nam quoniam est VL $\times$ CF $=$ CV $\times$ VE; erit VL:VE::CV:CF::VL:GF unde æquantur VE & GF. Si ad CG ex C excitetur normalis CR $=$ VE vel FG vel a, & per R agatur RS rectæ CV parallela, erit RS curvæ Asymptotos. Nam est recta MS æqualis arcui GF; & proinde FS distantia Curvæ ab RS est semper æqualis excessui quo arcus superat suum sinum: at cum distantia crescat in infinitum, excessus ille minuetur in infinitum, & fiet tandem data quavis recta minor, & proinde RS erit Curvæ Asymptotos.

Hh hh 3 Sit

TAB. 46. fig. 3. Sit jam b major quam a; & similiter, ut in priore casu, invenietur KN $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2+b^2-a^2}}$: at quoniam b superat a, erit $c^2 = b^2 - a^2$ quantitas positiva, & KN fiet $= \frac{a\dot{x}}{\sqrt{x^2+c^2}}$ & ponendo radium circuli HY $= b$, invenietur $\dot{XY} = \frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{x^2+c^2}}$. Ponatur $x = \frac{c^2}{z}$, & erit $\dot{x} = \frac{c^2\dot{z}}{z^2}$ & $\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{z}}{z}$.

Erit quoque $x^2 = \frac{c^4}{z^2}$ & $x^2 + c^2 = \frac{c^4}{z^2} + c^2 = \frac{c^4 + c^2z^2}{z^2} = \frac{c^2}{z^2} \times c^2 + z^2$: unde $\sqrt{x^2+c^2} = \frac{c}{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$.

His itaque valoribus substitutis fit $\frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{x^2+c^2}} = -\frac{ba\dot{z}}{c\sqrt{c^2+z^2}} = -\dot{y}$. Nam tale sumi potest initium arcus HY, ut simul cum fluente quantitatis $\frac{-ba\dot{z}}{c\sqrt{c^2+z^2}}$ crescat & decrescat. Fiat $nc = a$ & erit $\frac{nb\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} = \dot{y}$, & $\frac{\frac{1}{2}nb^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} = \frac{1}{2}b\dot{y} =$ sectori CXY.

Est autem $\frac{\frac{1}{2}nb^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} : \frac{\frac{1}{2}c\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}} :: nb^2 : c^2$, hoc est in data

ratiotione. Adeoque erit ſector CXY ad $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$ ſemper in data ratione. Harum itaque quantitatum fluentes erunt in eadem ratione, cum ſimul incipere ponantur. Fluens autem ſectoris CXY eſt ſector CVY & fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$ eſt ſector Hyperbolæ, quod ſic oſtenditur.

Centro C ſemiaxe tranſverſo CV $= c$ deſcribatur Hyperbola æquilatera, & ex duobus punctis vicinis D & F ordinentur ad axem conjungatum rectæ DB, EF; ducantur item CD, CF. Et incrementum ſeu fluxio trianguli BCD æquale erit BE × BD − ſectore DCF: unde ſector DCF (qui eſt Fluxio ſectoris CVD) æqualis erit BE × BD − incremento trianguli BCD. Et ſi BC dicatur z, ob Hyperbolam, eſt $BD^2 = BC^2 + CV^2 = z^2 + c^2$: unde $BD = \sqrt{c^2+z^2}$, & $BE \times BD = \dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$. Triangulum autem BCD eſt $\frac{1}{2} z \times \sqrt{c^2+z^2}$, cujus fluxio eſt $\frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2} + \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2+z^2}}$. Subtrahatur hæc quantitas ab $\dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2}$, & reſtabit ſector Hyperbolæ minimus CDF $= \frac{1}{2}\dot{z} \times \sqrt{c^2+z^2} - \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2+z^2}} = \frac{\frac{1}{2}\dot{z} \times \overline{c^2+z^2} - \frac{1}{2}\dot{z} \times z^2}{\sqrt{c^2+z^2}} = \frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$. Adeoque fluens ſectoris CDF eſt æqualis fluenti quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$. Proinde erit ſector CVD fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2}c^2\dot{z}}{\sqrt{c^2+z^2}}$. Præterea DT recta tangat Hyperbolam & occurrat axi conjugato in T. Eſt ex natura Hyperbolæ BC : CV :: CV : CT,

Tab. 46. fig. 5.

hoc est $a : c :: c - \frac{c^2}{x} = CT \pm x$. Atque hinc oritur constructio quæ sequitur.

TAB. 46. fig. 6. Centro C semiaxe transverso CV, describatur Hyperbola æquilatera Vm, item circulus Ve. Capiatur sector circularis CVe ad sectorem Hyperbolicam CVm ut n ad 1; tangat Hyperbolam in m recta Tm, occurrens Axi conjugato in T: producatur Ce ad k ut fit $Ck = CT$, & punctum k erit in curva quæsita. Nempe talis est ea curva, ut si Ck dicatur x, perpendicularis a C in tangentem ejus demissa erit semper æqualis $\frac{ax}{\sqrt{b^2 + x^2}}$. Quando x est infinita evanescit b^2, & perpendicularis fit $= a$, & tunc coincidit CR cum CV. Si itaque capiatur in axe conjugato $CR = a$, & ducatur RS ipsi CV parallela, erit hæc curvæ Asymptotos.

Si eo usque augeatur n ut fiat quantitas $b^2 - a^2$ infinite parva, tunc evanescet c^2, & quantitas $\frac{bax}{x\sqrt{x^2 + c^2}}$ fit $\frac{bax}{x^3} = \dot{y}$. Unde si capiantur harum quantitatum fluentes, habebimus $\frac{ba}{x} = y$, & $ba = xy$, hoc est rectangulum sub arcu circulari & distantia curvæ à centro erit semper data quantitas; atque hac ratione migrabit curva in spiralem Hyperbolicam. Est itaque spiralis Hyperbolica curva media, seu quasi limes, inter eas curvas, quæ construuntur per sectores circulares & eas quæ construuntur per sectores Hyperbolicos. Itaque spiralis ista Hyperbolica concipi potest formari vel per sectorem circuli aut Ellipsis, vel per sectorem Hyperbolæ, cujus Axis transversus minuitur in infinitum, & in eadem ratione augetur numerus n.

Ad eum jam devenimus casum, ubi velocitas corporis mi-

nor

nor est eâ quæ acquiritur cadendo ab infinita distantia, & ubi Tab. 46. fig. 3.
$p^2 = \frac{a^2 x^2}{b^2 - x^2}$. Et hic simili ratiocinio ac in priori casu, invenietur $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{b^2 - a^2 - x^2}}$, ubi necesse est, ut sit b^2 majus quam a^2. Hinc si $b^2 - a^2$ dicatur c^2, fit $KN = \frac{a\dot{x}}{\sqrt{c^2 - x^2}}$; & proinde XY seu $\dot{y} = \frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{c^2 - x^2}}$.

Sit jam $x = \frac{c^2}{z}$, & fiet $\frac{\dot{x}}{x} = -\frac{\dot{z}}{z}$ seu $\frac{ba\dot{x}}{x} = -\frac{ba\dot{z}}{z}$ & $c^2 - x^2$ erit $= \frac{c^2}{z^2} \times \overline{z^2 - c^2}$, quibus valoribus substitutis fit $\frac{-ba\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{ba\dot{x}}{x\sqrt{c^2 - x^2}} = \dot{y}$. Nam tale ponendum est initium arcus YX, ut simul cum fluente quantitatis $\frac{ba\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}}$ incipiat; unde erit $\frac{\frac{1}{2} b^2 a\dot{z}}{c\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{1}{2} b\dot{y} =$ sectori CXY $=$, $\frac{\frac{1}{2} n b^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$, ponendo $nc = a$. Est vero $\frac{\frac{1}{2} n b^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ad $\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ut $n b^2$ ad c^2, hoc est in ratione constanti. Quare harum quantitatum Fluentes sunt in eadem ratione, hoc est Fluens quantitatis $\frac{1}{2} b\dot{y}$ seu $\frac{\frac{1}{2} n b^2 \dot{z}}{\sqrt{c^2 - z^2}}$ erit ad fluentem quantitatis

$\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ ut $n b^2$ ad c^2. Eſt autem fluens quantitatis $\frac{1}{2} \dot{b} y$ $=$ ſectori CVX, & fluens quantitatis $\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$ eſt ſector Hyperbolæ, quod ſic oſtenditur.

Tab 46. fig. 7. Centro C ſemiaxe tranſverſo CV $= c$ deſcribatur Hyperbola æquilatera, & ex duobus punctis infinite vicinis B & D ad axem ordinentur duæ rectæ BE, DF; ducantur item CB, CD. Et erit fluxio ſeu incrementum trianguli CBE $=$ triangulo CBD $+$ BE $\times$ EF; unde triangulum CBD, ſeu ſector minimus CBD, erit $=$ incremento trianguli CBE $-$ BE $\times$ EF. Dicatur CE z, & erit BE $= \sqrt{z^2 - c^2}$, & BE $\times$ EF $= \dot{z} \sqrt{z^2 - c^2}$. Eſt quoque triangulum CBE $= \frac{1}{2} z \sqrt{z^2 - c^2}$, cujus fluxio eſt $\frac{1}{2} \dot{z} \times \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{\frac{1}{2} \dot{z} \times z^2}{\sqrt{z^2 - c^2}}$; à quo ſi ſubtrahatur quantitas $\dot{z} \times \sqrt{z^2 - c^2}$, fit ſector minimus CBD $=$

$$\frac{\frac{1}{2} \dot{z} \times z^2}{\sqrt{z^2 - c^2}} - \frac{1}{2} \dot{z} \times \sqrt{z^2 - c^2} = \frac{\frac{1}{2} \dot{z} \times z^2 - \frac{1}{2} \dot{z} \times \overline{z^2 - c^2}}{\sqrt{z^2 - c^2}} = \frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$$

unde conſtat ſectorem CBV eſſe fluentem quantitatis $\frac{\frac{1}{2} c^2 \dot{z}}{\sqrt{z^2 - c^2}}$. Præterea ſi BT tangens Hyperbolam Axi tranſverſo occurrat in T, ex natura Hyperbolæ fit CE : CV $::$ CV : CT, hoc eſt $z : c :: c : \frac{c^2}{z} =$ CT $= x$.

Tab. 46. fig. 8. Hinc deducimus ſequentem conſtructionem. Centro C, ſemiaxe tranſverſo CV $= c$, deſcribatur Hyperbola æquilatera VB, & circulus CeG ex centro C. Ad hyperbolam du-

ducatur recta CB, & hyperbolæ Tangens BT axi transverso occurrat in T. Capiatur circuli sector CVe, qui sit ad sectorem Hyperbolicum CVB ut n ad 1. In Ce capiatur CK=CT, & erit K punctum in curva quæsita, cujus perpendiculum e centro C ad Tangentem in K demissum, si CK dicatur x, est æquale $\frac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}$.

Et in hac curva, urgente vi centripeta, quæ sit reciproce ut cubus distantiæ, movebitur corpus, si secundum directionem Tangentis cum justa velocitate exeat. Qualis autem debet esse velocitas, quæ faciat ut corpus harum curvarum quamvis describat, sic invenietur.

Cum velocitas qua corpus in trajectoria quacunque movetur sit reciproce ut quantitas p, assumendo constantem quamvis, a, ea semper exponi potest per $\frac{a}{p}$. Et si ad Axem CV ordinentur rectæ, quæ sint reciproce ut cubi distantiarum à centro, seu ut vires centripetæ, & hac ratione formetur figura curvilinea, ejus Area indefinite extensa semper exponi potest per $\frac{b^2}{x^2}$, ut ex Quadraturis constat. At Area illa est ut quadratum velocitatis quæ acquiritur ab infinita distantia cadendo, adeoque velocitas hoc casu acquisita erit ut $\frac{b}{x}$. Hinc si velocitas illa dicatur y, & velocitas, qua corpus in Trajectoria movetur, dicatur v, talesque assumantur quantitates a & b, ut in una aliqua à centro distantia sit $y : v :: \frac{b}{x} : \frac{a}{p}$, erit ubique in omnibus distantiis $y : v :: \frac{b}{x} : \frac{a}{p} :: p : \frac{ax}{b}$. Unde si $y = v$, erit $p = \frac{ax}{b}$, & curva hac

 velo-

velocitate descripta erit Spiralis Nautica; vel circulus existente $p=x$ & $a=b$.

Si y sit major quam v, tunc p major erit quam $\frac{ax}{b}$: eritque illa, ut ex præcedentibus constat, $\frac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}$. Curva autem construetur per sectorem Hyperbolicum, ut in ultimo casu ostensum fuit, ubi distantia corporis à centro per concursum Tangentis Hyperbolæ cum Axe transverso determinatur. Si y sit minor quam v, at in tantilla ratione ut maneat b major quam a, curva formabitur per eundem sectorem hyperbolicum. At distantia corporis à centro desumitur ex concursu Tangentis cum Axe conjugato.

Si sit $y : v :: p : x$, erit in eo casu $a=b$, & curva evadit spiralis Hyperbolica, ubi est $p=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hinc si de loco quovis projiciatur corpus secundum datam rectam, cum ea velocitate, quæ sit ad velocitatem ab infinito cadendo acquisitam, ut distantia corporis à centro ad perpendicularem e centro ad lineam directionis demissam, movebitur illud corpus in Spirali Hyperbolica. Si denique sit v tanto major quam y, ut sit etiam a major quam b, curva construetur per sectores circulares. Atque hac ratione datâ velocitate semper determinari possit relatio quantitatum a & b, ac proinde curva describetur in qua corpus cum illa velocitate movebitur: & vicissim data curva, seu datis quantitatibus a & b, invenietur velocitas qua curva illa describitur.

TAB 46. fig. 2. Omnium curvarum areæ (si circulum excipias) quæ urgente hac vi centripeta describi possunt, sunt perfecte quadrabiles. Nam primo, in Spirali Logarithmica, quia est $p=\frac{ax}{b}$, erit KN $=\frac{ax}{\sqrt{b^2-a^2}}=\frac{ax}{c}$ ponendo $b^2-a^2=c^2$:

adeo

adeoque erit triangulum CKI $= \frac{\frac{1}{2}axx}{c}$, cujus fluens est $\frac{ax^2}{4c} =$ Areæ curvæ.

Si p sit $\frac{ax}{\sqrt{b^2+x^2}}$, & a major quam b, ostensum est KN $= \frac{ax}{\sqrt{x^2-c^2}}$, unde KN $\times \frac{1}{2}$ CI $= \frac{\frac{1}{2}axx}{\sqrt{x^2-c^2}}$, cujus fluens est $\frac{1}{2}a \times \sqrt{x^2-c^2} =$ areæ curvæ. At si a minor sit quam b, fit KN $= \frac{ax}{\sqrt{x^2+c^2}}$, & KN $\times \frac{1}{2}$CI $= \frac{\frac{1}{2}axx}{\sqrt{x^2+c^2}}$ cujus fluens est $\frac{1}{2}a\sqrt{x^2+c^2} -$ Q $=$ Areæ curvæ. Ponatur $x = o$, & fiet $\frac{1}{2}ac -$ Q $= o$, unde Q $= \frac{1}{2}ac$, & area curvæ fit $= \frac{1}{2}a\sqrt{x^2-c^2} - \frac{1}{2}ac$.

In spirali Hyperbolica evanescit quantitas c, & Area Curvæ fit $\frac{1}{2}ax$.

Si p sit $= \frac{ax}{\sqrt{b^2-x^2}}$, ostensum est esse KN $= \frac{ax}{\sqrt{c^2-x^2}}$, unde $\frac{1}{2}$CI $\times$ KN $= \frac{\frac{1}{2}a \times xx}{\sqrt{c^2-x^2}}$, cujus fluens est Q $- \frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$ $=$ Areæ. Fiat $x = o$, & erit Q $- \frac{1}{2}ac = o$, seu Q $= \frac{1}{2}ac$; unde erit Area curvæ semper æqualis $\frac{1}{2}ac - \frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$. Fiat $c^2 - x^2 = o$ seu $c = x$, & Area curvæ fit $\frac{1}{2}ac$. Unde si initium Areæ non capiatur ab initio ipsius x, seu ubi x est $= o$, sed ubi $x = c$ est maxima, hoc est si area ab V incipiat, erit area semper æqualis $\frac{1}{2}a\sqrt{c^2-x^2}$. TAB 47. fig. 7.

De areis quas describunt corpora radiis ad centrum ductis urgente vi centripeta quæ sit reciproce, ut distantiarum cubi,

se-

sequentia adnotavit peritissimus *Hallejus*. Nempe si corpora diversos circulos vel diversas spirales Hyperbolicas hac lege describunt; erunt areæ sectorum, tam in circulis quam in spiralibus illis omnibus; æqualibus temporibus descriptæ, semper æquales: nam velocitates corporum in circulis motorum secundum hanc legem, debent esse radiis seu distantiis reciproce proportionales, adeoque arcus simul percursi erunt quoque in eadem radiorum reciproca ratione, unde statim patebit sectores simul descriptos esse æquales.

In reliquis omnibus curvis cum sit velocitas ad velocitatem corporis in eadem distantia in circulo moti, ut $\frac{a}{b} \times x$ ad p, seu ut $\frac{a}{x} \times IK$ ad KN; interea dum corpus in Trajectoria percurrit lineolam IK, corpus aliud in eadem distantia motum percurret arcum $\frac{b}{a} \times KN$; & area sectoris circuli & Trajectoriæ simul descriptæ erunt $\frac{b}{a} \times KN \times \frac{1}{2}CN$, & $KN \times \frac{1}{2}CN$ quæ duæ areæ sunt in ratione data, scil. ut b ad a. Adeoque ubi est $a = b$, uti fit in Spirali Hyperbolica, area sic descripta erit semper æqualis areæ sectoris circularis in æquali tempore descriptæ.

Tab. 46. fig. 3.

PRO-

TAB. XLVI.

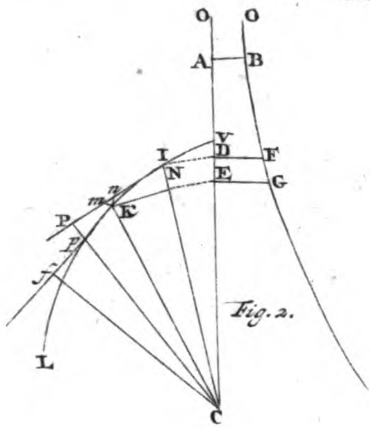
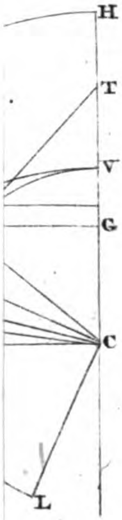


Fig. 2.



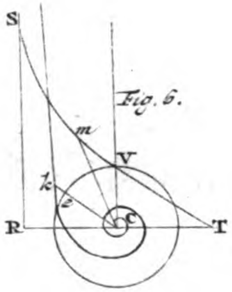


Fig. 6.

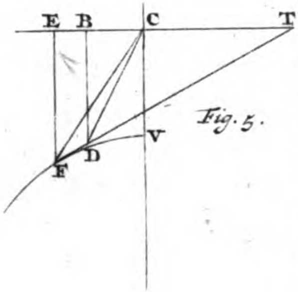


Fig. 5.

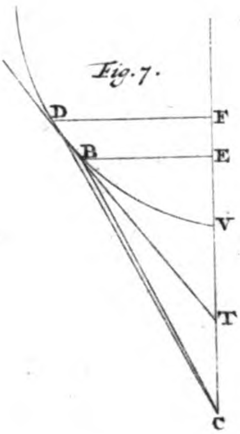


Fig. 7.

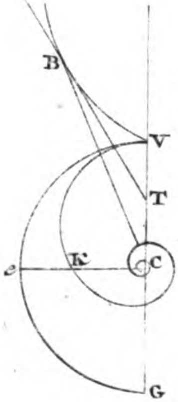


Fig. 8.

DE
LEGIBUS
ATTRACTIONIS,
ALIISQUE
PHYSICES PRINCIPIIS.

EPISTOLA JOANNIS KEILLII,

Ex Æde Christi Oxon. A. M. ad Clar. Virum

GULIELMUM COCKBURN,

MEDICINÆ DOCTOREM

IN QUA

LEGES ATTRACTIONIS,

ALIAQUE

PHYSICES PRINCIPIA

TRADUNTUR

Cum summa benevolentia & non vulgari amicitia me complexus sis, iniquus essem, vir ornatissime, nisi conarer aliquam tibi vicissim referre gratiam. Theoremata igitur hæc, quibus non modo rem Physicam, sed & Medicam aliquatenus illustrari posse arbitror, ad te mitto; munus, uti quibusdam fortasse videri potest, perexiguum. Tibi tamen & gratissimum fore spero, & non parvi æstimandum. Cum enim tum Philosophiam Mechanicam penitus perspexeris & in praxi Medica felicissime sis versatus; tum etiam utrique promovendæ gnaviter incumbas, gratissima sine dubio tibi erunt vera Medicinæ principia, quoniam optime intelligis, quam periculosi ex falsis oriantur errores. Hæc igitur Theoremata tibi Vir Clarissime, in manus trado, tuoque arbitrio libens permitto.

Ponenda sunt fundamenti loco hæc tria, quibus omnis Physice innititur, Principia. 1. Spatium hanc. 2. Quantitatis in infinitum divisibilitas. 3. Materiæ vis Attractrix. Dari spatium inane constat ex motu corporum. Quantitatis in infinitum divisibilitatem ex continuæ quantitatis natura demonstrant Geometræ. Materiæ inesse vim attractricem confirmat experientia. Ex duobus primis principiis sequitur.

THEOREMA I.

Materiæ exigua quælibet particula potest ita spatium quantumvis magnum occupare, ut pororum seu omnium meatuum diametri sint datâ rectâ minores, vel ut particulæ omnes sint à se invicem remotæ intervallo datâ rectâ minore.

THEOREMA II.

Dari possunt duo corpora mole æqualia, at pondere seu densitate (id est, quantitate materiæ) utcunque inæqualia, in quibus erunt meatuum seu pororum summæ fere æquales.

Sit v. g. digitus cubicus alter auri, alter aëris: quamvis materia in cubo aureo vicesies millies superat materiam in cubo aërio, fieri tamen potest, ut spatia vacua in digito cubico auri sint fere æqualia spatiis vacuis in digito cubico aëris, scil. ut auri vacuitates sint ad vacuitates aëris ut 999999 ad 1000 000.

THEOREMA III.

Particulæ quæ aquam vel aërem vel alia ejusmodi fluida constituunt (si modo se tangant) non sunt absolute solidæ, sed ex aliis compositæ particulis multos meatus & poros intra se continentibus.

Par-

Particulæ corporum minimæ & absolute solidæ, hoc est vacui omnino expertes, vocentur primæ compositionis; Moleculæ ex pluribus hisce particulis coalescentibus ortæ vocentur particulæ secundæ compositionis; Moles ex pluribus moleculis coëuntibus conflatæ, vocentur particulæ tertiæ compositionis; & sic deinceps, donec tandem perventum fuerit ad particulas, è quibus corporum fit ultima compositio, & in quas eorundem fit prima resolutio.

Materiæ inesse vim Attractricem, quâ omnis materiæ particula trahit ad se omnem aliam materiæ particulam, & vicissim trahitur, primus ex phænomenis collegit Dominus Isaacus Newtonus. Vis hæc datâ materiâ in diversis distantiis reciprocè proportionalis est quadratis distantiarum; ex qua oritur vis illa quam gravitatem dicimus, quâ corpora omnia terrestria ad terram rectâ feruntur, estque pondus corporum quantitati materiæ semper proportionale. Prolatâ hâc, quam ipse primus detexit, materiæ vi Attractrice omnes Planetarum motus Cometarumque phases pulcherrime explicavit, physicamque coëlestem, ab iis quæ tot retro fluxerunt seculis vix dum inchoatam, felicissime consummavit Dominus Newtonus; vir ingenio pene supra humanam sortem admirabili, dignusque cujus fama per omnes terras pervagata, cœli quos descripsit meatibus permaneat coæva.

Divina sagacissimi viri inventa sæpenumero mecum recolens, in eam tandem cogitationem incidi, principium quoddam Newtoniano non absimile, ad phænomena terrestria explicanda, adhiberi posse. Post iterata sæpius experimenta, materiæ terrestri inesse deprehendi vim quandam attractricem, ex qua plurimorum phænomenon ratio petenda est; meaque hac de re cogitata abhinc quinquennio, Domino Newtono indicavi: ex eo autem intellexi, eadem fere, quæ ipse investigaveram, sibi diu ante animadversa fuisse. Quæstiones aliquot ad hanc vim attractricem spectantes, sub finem Optices abhinc biennio latinè editæ, proposuit Dominus Newtonus; quem cum istiusmodi studia ulterius excolere ætas ingravescens, & alia negotia vetant, tanti viri vestigiis insistere, eumque longo licet intervallo sequi, haud alienum duxi. Impræsentiarum nuda quædam proponam Theoremata, quæ fortasse aliquando fusius enunciata & demonstrata, justo volumine sum traditurus.

THEOREMA IV.

Præter vim illam Attractricem, qua Planetarum Cometarumque corpora, in propriis orbitis retinentur, alia etiam inest materiæ potentia, qua singulæ, ex quibus illa constat, particulæ se invicem attrahunt, & reciprocè à se invicem attrahuntur: quæ vis decrescit in majore quam duplicatâ ratione distantiæ augescentis.

Theorema hoc multis potest probari experimentis; at ratio quâ minuitur vis illa, dum à se invicem recedunt particulæ, num scilicet sit triplicata, quadruplicata, vel alia quævis distantiarum augescentium ratio, quæ major sit duplicatâ, nondum æque per experimenta patet; erit fortasse aliquando tempus, cum accuratiore adhibita diligentia innotescet.

THEOREMA V.

Si corpus constet ex particulis, quarum singulæ vi pollent attractrice, in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum decrescente; erit vis qua ab eo corpore urgetur corpusculum, in ipso contactu, vel intervallo à contactu infinite exiguo infinite major, quam si corpusculum illud ad datam à dicto corpore distantiam locaretur. Vide Prop. 80. & 91. Princip. Newtoni.

THEOREMA VI.

Iisdem positis, si vis illa attractiva in assignabili distantia, ad gravitatem obtineat rationem finitam; eadem in ipso contactu, vel in distantia infinite parva, vi Gravitatis erit infinite major.

THEO-

THEOREMA VII.

Si vero in ipso contactu, vis corporum attractiva ad gravitatem obtineat rationem finitam, eadem in omni distantia assignabili est vi gravitatis infinite minor, adeoque evanescit.

THEOREMA VIII.

Vis attractiva, qua pollent singulæ materiæ particulæ in ipso contactu, vim gravitatis prope in immensum superat; non tamen est vi gravitatis infinite major; adeoque, in data distantia, vis illa evanescet.

Vis igitur hæc materiæ superaddita, non nisi per spatiola admodum perexigua diffunditur; in majoribus distantiis prorsus nulla est; unde motus corporum cœlestium (quæ longis intervallis à se invicem disjuncta sunt) per vim hanc attractivam nulla ratione turbari possunt, sed eadem ratione continuo peraguntur, ac si vis illa à corporibus iis prorsus abesset.

THEOREMA IX.

Si corpusculum aliquod corpus tangat, vis, quâ urgetur illud corpusculum, hoc est, vis quâ cùm eo corpore cohæret, erit quantitati contactus proportionalis; nam partes à contactu remotiores nihil conferunt ad cohærentiam.

Adeoque pro vario particularum contactu varii orientur cohærentiæ gradus; omnium autem maximæ sunt vires cohærentiæ, quando superficies, in quibus se invicem tangunt corpora, planæ existunt; quo in casu, cæteris paribus, vis quâ corpusculum cum aliis cohæret, erit ut superficierum partes sese tangentes.

Hinc patet ratio, cur duo marmora exactissimè polita, & sese secundum superficies planas tangentia, à se invicem divelli

velli non possunt, nisi à pondere, quod gravitatem aëris incumbentis multum superat.

Hinc etiam decantatissimi istius problematis, de cohærentia materiæ, solutio elici potest.

THEOREMA X.

Ea corpuscula facillime à se invicem separantur, quorum contactus cum aliis sunt paucissimi, & minimi; quales contingere solent in corpusculis sphæricis infinite exiguis.

Hinc fluiditatis ratio redditur.

THEOREMA XI.

Vis qua corpusculum aliquod ad aliud corpus maxime propinquum attrahitur, quantitatem suam non mutat, sive augeatur corporis attrahentis materia, sive minuatur, eadem manente corporis densitate, & corpusculi distantia.

Nam cum vires particularum attractrices per minima tantum diffundantur spatia; liquet partes remotiores ad C D & E, nihil conferre ad attrahendum corpusculum A. Adeoque eadem vi versus B trahetur corpusculum, sive adsint hæ partes, sive amoveantur, sive denique aliæ ipsis conjungantur.

Tab. 47. fig. 10.

THEOREMA XII.

Si ea sit corporis alicujus textura, ut particulæ ultimæ compositionis, per vim quandam externam (qualis est pondus eas comprimens, vel ab altero corpore proveniens ictus) à primigeniis suis contactibus paululum dimoveantur, nec interim in novos contactus commigrent, particulæ, per vim attractivam sese mutuo petentes, ad contactus primigenios citò redibunt: iisdem vero redeuntibus particularum corpus quodvis componentium contactibus & positionibus, eadem quoque redibit corporis figura; adeoque per vim attractivam corpora, pristinas quas amiserunt figuras, possunt denuo recuperare.

Hinc

Hinc Elasticitatis ratio reddi potest. Cum autem per vim Elasticam corpora, in se invicem impingentia, à se mutuo resiliant (uti demonstratum est in lectionibus nostris physicis) à vi attractiva corporum oriri etiam debet eorundem à se invicem discessus.

THEOREMA XIII.

Quod si ea sit corporis textura, ut particulæ à prioribus contactibus per vim impressam dimotæ, in alios qui ejusdem sunt gradus immediate deveniant, corpus illud in pristinam figuram non se restituet.

Hinc qualis sit textura, in qua corporum mollities consistit, intelligi potest.

THEOREMA XIV.

Particulæ materiæ pro diversa ipsarum structura & compositione diversis pollebunt viribus attractivis, puta non erit æque fortis attractio, cum particula datæ magnitudinis pluribus perforata sit meatibus, ac si omnino solida & vacui expers esset.

THEOREMA XV.

Particularum perfecte solidarum vires attractivæ ex figuris ipsarum multum pendent: Nam si parva aliqua materiæ particula in laminam circularem indefinite exiguæ crassitudinis formetur, & corpusculum in recta per centrum transeunte & ad planum circuli normali locetur; sitque distantia corpusculi æqualis decimæ parti semidiametri circuli: vis qua urgetur corpusculum tricesies minor erit, quam si materia attrahens coalesceret in Sphæram, & virtus totius particulæ ex uno quasi puncto Physico diffunderetur. Quin etiam eadem

 cir-

circularis lamella fortius ad se trahit corpusculum, quam alia ejusdem ponderis particula, quæ in tenuem & longum formatur Cylindrum.

THEOREMA XVI.

Sales sunt corpora, quorum particulæ ultimæ compositionis magna vi attractiva pollent, inter quas tamen particulas plurimi interjacent meatus, particulis, quas habet aqua, ultimæ compositionis pervii: quæ igitur à salinis particulis fortiter attractæ, in eas cum impetu ruunt, & à mutuo contactu eas disjungunt, cohærentiamque salium dissolvunt.

THEOREMA XVII.

Si corpuscula duo viribus attractivis decrescentibus in triplicata aut plusquam triplicata ratione distantiarum se mutuo petunt; erit velocitas in se invicem impingentium infinite major quam in dato intervallo. Vide Prop. 39. Princip. Newtoni.

THEOREMA XVIII.

Corporis aqua gravioris eo usque diminui potest magnitudo, ut tandem in aqua suspensum maneat, nec vi propriæ Gravitatis descendat.

Hinc patet ratio, cur particulæ Salinæ, Metallicæ, & aliæ ejusmodi, in minima redactæ, in suis menstruis suspensæ hæreant.

THEO-

THEOREMA XIX.

Corpora majora minore velocitate ad se invicem accedunt, quam minora.

Vis enim, qua se mutuo petunt corpora A & B, particulis maxime propinquis tantum inest; remotiorum quippe vires nullæ sunt. Non igitur major vis adhibetur ad movenda corpora A & B quam ad particulas *c* & *d* movendas, sed corporum eadem vi motorum velocitates sunt corporibus reciproce proportionales: unde erit velocitas quâ corpus A tendit versus B, ad velocitatem, qua particula *c*, à corpore soluta, versus idem B tenderet, ut particula *c* ad corpus A. Multo igitur minor est velocitas corporis A, quam foret velocitas particulæ *c* à corpore solutæ. TAB. 47. *fig.* 11.

Hinc fit, ut corporum majorum motus sua natura adeo languidus & lentus fit, ut ab ambiente fluido & aliis circumjacentibus corporibus plerumque impediatur. In minimis vero corpusculis viget virtus, & ab iis perplurimi producuntur effectus: tanto plus energiæ minoribus inest corporibus, quam majoribus.

Hinc patet ratio istius axiomatis Chymici, sales non agunt nisi soluti.

THEOREMA XX.

Duo corpuscula sese non contingentia, adeo sibi vicina locari possunt, ut vis, qua se mutuo petunt, vim Gravitatis superet.

THEOREMA XXI.

Si corpusculum in fluido locatum à particulis ambientibus undique æqualiter trahatur, nullus exinde orietur corpuscu-

li motus; quod si ab aliis particulis magis, ab aliis minus urgeatur, ad eam partem tendet corpusculum, ubi major est attractio: & motus productus inæqualitati attractionis respondebit, scilicet in majori inæqualitate major erit motus, in minore minor.

THEOREMA XXII.

Corpuscula in fluido natantia & magis se invicem trahentia quam fluidi particulas interjectas, depulsis fluidi particulis ad se invicem accedent ea vi, qua ipsorum attractio mutua superat attractionem particularum fluidi.

THEOREMA XXIII.

Si corpus aliquod in fluido locetur, cujus partes fluidi particulas magis ad se trahunt, quam fluidi particulæ à se invicem trahuntur; sintque in corpore meatus plurimi particulis fluidi pervii, per hos meatus fluidum illud cito se diffundet; & si partium in corpore connexio non tam firma sit, quin ab impetu irruentium particularum superari possit, orietur exinde corporis immersi dissolutio.

Hinc ut menstruum dato corpori dissolvendo sit idoneum, tria requiruntur. 1. Ut partes corporis particulas menstrui magis ad se trahant, quam eæ à se invicem trahuntur. 2. Ut corpus habeat meatus particulis menstrui patentes, & pervios. 3. Ut cohærentia particularum corpus constituentium tanta non sit, quin ab impetu irruentium particularum menstrui divelli possit. Hinc quoque constat particulas Spiritum vini constituentes, magis à se invicem trahi, quam à particulis corporis salini in Spiritu vini demersi.

THEO-

THEOREMA XXIV.

Si corpuscula in fluido natantia, & se invicem petentia, Elastica sint, post congressum, à se mutuo resilient, & inde in alia corpuscula rursus impingentia, denuo reflectentur: ex quo fient innumeri alii cum aliis corpusculis conflictus continuaque resilitiones. Per vim autem attractivam continuo augebitur corpusculorum velocitas, & sensui patebit partium motus intestinus; sed prout fortius aut imbecillius se invicem trahunt corpuscula, & pro varia, qua pollent Elasticitate, varii erunt hi motus, & diversis gradibus atque temporibus, fient sensibiles,

THEOREMA XXV.

Si corpuscula se invicem trahentia, se mutuo contingant, nullus orietur motus; propius enim accedere nequeunt. Si ad exiguum admodum à se invicem seponantur spatium, orietur motus; sed si longius distent, non majore vi se invicem trahent, quam fluidi particulas interjectas; adeoque nullus producetur motus.

Ex hisce principiis pendent omnia fermentationis & effervescentiæ Phænomena. Hinc patet ratio cur oleum Vitrioli, cui paululum aquæ immittitur, effervescit atque ebullit: corpuscula enim salina infusâ aquâ à mutuo contactu paululum dimoventur; unde cum magis se invicem trahant quam aquæ particulas, & cum undique æqualiter non trahuntur, motum exinde oriri necesse est.

Hinc etiam liquet ratio, cur tanta cietur ebullitio, cum limatura chalybis mixturæ supradictæ injicitur: particulæ enim chalybis magna pollent Elasticitate, unde valida oritur reflectio. Hinc etiam videre est, cur menstrua quædam fortiori vi agunt, citiusque corpus aliquod dissolvunt, si aqua dilutiora fiant.

THEOREMA XXVI.

Si corpuscula se mutuo attrahentia vi Elastica careant, à se invicem non reflectuntur; sed congeries seu moleculas particularum efficient, unde fiet Coagulum: *& si particularum sic coacervatarum Gravitas superet Gravitatem fluidi, succedet quoque* Præcipitatio *Oriri quoque potest præcipitatio ex aucta vel diminuta Gravitate menstrui, in quo natant corpuscula.*

THEOREMA XXVII.

Si corpusculorum sese invicem attrahentium, & in fluido natantium, ea sit figura, ut in datis quibusdam ipsorum partibus, majori vi attractiva polleant, quam in aliis, & major sit in iisdem contactus; corpuscula illa coibunt in corpora datas figuras habentia, & inde emergent Chrystallisationes; corpusculorumque componentium figuræ, ex data figura Crystalli per Geometriam determinari possunt.

THEOREMA XXVIII.

Si corpuscula magis trahantur à fluidi particulis, quam à se invicem; fiet ut quasi se mutuo fugientes, à se invicem recedant, & per omne fluidum cito diffundentur.

THEOREMA XXIX.

Si inter duas fluidi particulas aliquod intercedat corpusculum, cujus binæ oppositæ facies maximis pollent viribus at-

attractivis, hoc interjectum corpusculum particulas fluidi sibi agglutinabit; & plura istiusmodi corpuscula per fluidum diffusa ejus particulas omnes in corpus firmum compingent, fluidumque in Glaciem *reducent.*

THEOREMA XXX.

Si corpus aliquod maximam emittat effluviorum copiam, quorum vires attractrices sunt fortissimæ; cum effluvia hæc corpori alicui leviusculo appropinquent, ipsorum vires attractrices Gravitatem corporis levioris tandem superabunt; & effluvia corpus illud ad se sursum trahent; cumque multo magis conferta sunt effluvia, in minoribus ab emittente corpore distantiis, quam in majoribus; corpus leve versus densiora effluvia semper urgebitur, donec tandem ipsi corpori effluvia emittenti adhæreat. Hinc plurimæ Electricitatis *Phænomena explicari possunt.*

Contra nostram hanc de viribus attractricibus doctrinam, fortasse objiciet aliquis; si vis hæc attractrix omni inesset materiæ; corpora ponderosiora & plus materiæ in dato spatio habentia, plus debere attrahere, quam corpora minus gravia, quod experientiæ repugnat. Sed huic objectioni facile respondetur. Particulæ scilicet ultimæ compositionis (quibus solis tribuitur vis attractrix) confertim juxta se invicem locatæ, possunt corpus ponderosum constituere, etiamsi ipsæ in se sint rariores, quam eæ quæ corpus leve constituunt, ultimæ compositionis particulæ, à se invicem remotiores, & plures & patentiores meatus inter se habentes.

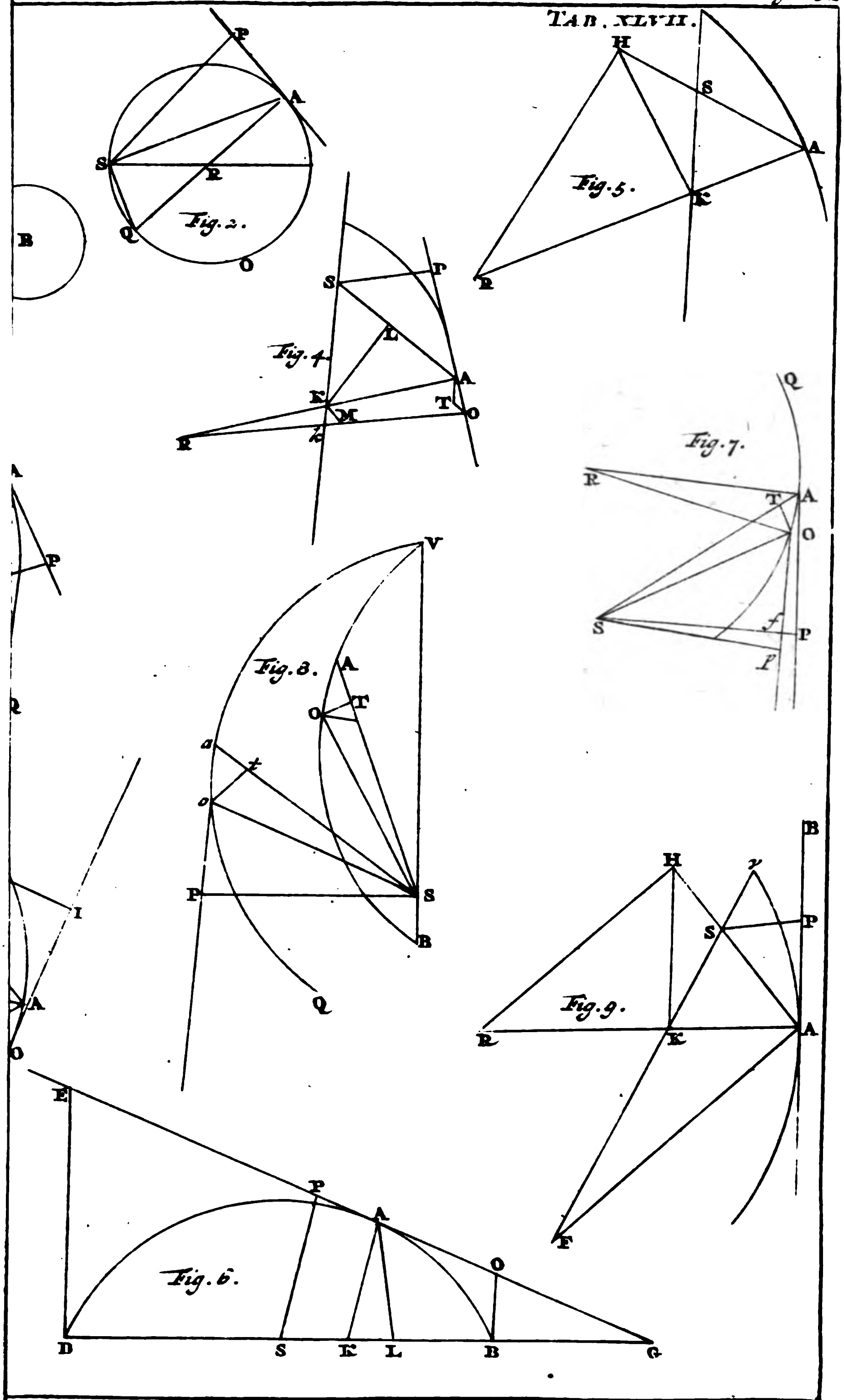
Alia multa sunt naturæ phænomena, quæ mihi videntur iisdem principiis explicari posse, uti ascensus succi in plantis & arboribus, foliorum & florum determinatæ & constantes figuræ, eorumque virtutes specificæ, &c. Multa quoque quæ in corpore animali quotidie occurrunt; præcipue quæ ad flui-

fluidorum cursus secretionesque spectant, ab iisdem materiæ qualitatibus pendent, & hinc morborum *Theoriæ* & medicamentorum effectus optime eruuntur. Quantum huic usui inserviant hujusmodi principia melius innotescet ex eo, quod frater meus nunc meditatur, opusculo; qui quidem Mathematicas cum Anatomicis rationes consocians in eo elaboravit, ut aliquam etiam praxi Medicæ lucem afferret.

FINIS.

IN-

TAB. XLVII.



INDEX
RERUM ET TERMINORUM,
qui in hoc opere explicantur.

Phy-

Q.

R.

S.

T,

FINIS.